УДК 535.3+537.6

А.И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ

О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследования в данной работе проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова и представляют, прежде всего, астрофизический интерес: степень линейной поляризации теплового излучения нейтронных звезд может достигать 20–50% [1, с. 1017], а плоскость линейно поляризованного фотона, являющегося суперпозицией 2 циркулярных, при определенных условиях может прийти во вращение (не фарадеевское).

Рассмотрим движение жестких рентгеновских фотонов в электронном газе под произвольным углом к линиям индукции квантующего магнитного поля, обеспечивающего практически полную спиновую поляризацию электронов. Будем считать, что до и после взаимодействия фотона с отдельно взятым электроном последний находится на основном уровне Ландау. При этом энергия фотонов сильно отличается от разности между уровнями Ландау, что позволяет пренебречь поглощением. Для постоянного однородного магнитного поля, направленного по оси z, выберем калибровку векторного потенциала [2, с. 320]:

$$A_0 = A_x = A_z = 0,\ A_y = Bx. \tag{1}$$

Пусть p_z – импульс электрона по оси z, m – его масса. Запишем выражение для энергии с квантованием Ландау ($n \geq 0$), а волновые функции выразим через биспиноры u_n и функции Эрмита H_n [2, с. 320; 3, с. 120]:

$$U_n(x) = \sqrt{\frac{f}{2}} H_n(x),\ H_n(x) = (-1)^n f^{-1} \frac{d^n f}{dx^n},\ \varepsilon_n = c\sqrt{\tilde{m}^2 c^2 + p_z^2},$$
$$\Psi(x) = A_n [\, i(2eBc\hbar)^{1/2} U_n(x) + c^2 (m + \sigma\tilde{m}) U_{n-1}(x) \gamma_1 \,] u_n,\ f = exp(-x^2)$$
$$A_0^{-1} = \sqrt{2\hbar c \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + mc^2)\sqrt{eBc\hbar}}\ \text{при}\ \sigma = -1,\ \tilde{m}c^2 = \sqrt{m^2c^4 + 2nBec\hbar},$$
$$A_n = \sqrt{\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \frac{\varepsilon_n + \sigma\tilde{m}c^2}{4c^4 p_z^2 \tilde{m} \varepsilon_n (\tilde{m}c^2 + \sigma\tilde{m}c^2)}},\ u_n = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\tilde{m}c^2 - \varepsilon_n & 0 & p_z c \end{bmatrix}^T. \tag{2}$$

Здесь T означает транспонирование. Матрицы Дирака γ_k (k = 0, 1, 2, 3) берутся в стандартном представлении. Не нарушая общности, можно выбрать систему координат, в которой волновой вектор фотона $\vec{k}$ лежит в одной из координатных плоскостей. Пусть θ – угол между $\vec{k}$ и $\vec{B}$. В силу законов сохранения, при упругом рассеянии вперед $\vec{k}$ (и частота фотона ω), а также импульс электрона $\vec{p}$ не меняются.

На основе приведенных исходных данных в [4, с. 47] по аналогии с [5, с. 91] была получена формула для угла комптоновского поворота плоскости линейной поляризации жесткого рентгеновского фотона на единицу длины пути; после несложных преобразований эту формулу можно переписать следующим образом (n_e – концентрация электронов):

$$\frac{d\varphi}{dl}=\frac{\pi^2 ce^2 n_e \cos\theta(\varepsilon_0 - cp_z\cos\theta)\exp(-s)}{\varepsilon_0+\hbar\omega}\sum_{n=1}^{\infty}(2s)^{n-1}(t_n^{(+)}+t_n^{(-)}),$$

$$s=\frac{(\hbar\omega\sin\theta)^2}{2cBe\hbar}, t_n^{(\pm)}=(\hbar\omega^2-2nBce\pm 2\varepsilon_0\omega - i\cdot\Gamma)^{-1}, \varepsilon_0^2=m^2c^4+p_z^2c^2. \quad (3)$$

При движении фотона параллельно силовым линиям магнитного поля в сумме остается одно слагаемое (n = 1). Эта формула пригодна для исследования при одновременном выполнении условий: а) $\hbar\omega < 2mc^2$, т.е. нет рождения электронно-позитронных пар; б) вдали от резонансов, когда можно пренебречь поглощением и, как следствие, мнимой частью (в т.ч. в пропагаторе), т.е. $\Gamma \to 0$ (такой вид пропагатора см. в [2, с. 321]).

Следующая задача – неравновесное или равновесное усреднение (3) по энергиям или импульсам электронов. В астрофизике (в частности, вблизи поверхностей пульсаров) встречаются и те, и другие примеры [6, с. 181], поэтому эти способы сравним в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Различные пути усреднения формулы (3)

случай	равновесный	неравновесный
сущность процедуры усреднения	через распределения Ферми-Дирака для электронов по p_z	подстановка среднего значения энергии электронов
необходимость взятия интеграла ч-з вычеты	да	нет
в конечной формуле	температура есть	температуры нет
необходимость учета конечной ширины резонанса ($\Gamma \neq 0$) [2, с. 323; 7, с. 449; 8, с. 2729; 9, с. 825–827]	да, т.к. иначе полюс будет находиться вплотную к вещественной оси, что позволит взять интеграл только по правилу Фейнмана, но результат будет не совсем корректным	нет, т.к. доля электронов, могущих попасть в «Ландау-резонанс» с фотоном, невелика, а среднее значение энергии можно подобрать, не попадая в полюс
пропадают ли нечетные степени p_z	да (в силу симметричности пределов интегрирования и нечетности функции по p_z)	нет (в силу движения электронов почти параллельно $\vec{B}$ в одном направлении) [6, с. 181]

В таблице 2 выпишем необходимые данные для подстановок в (3).

Таблица 2 – Необходимые численные данные

величина	ε_0/mc^2 (неравновесный случай)	kT, кэВ	$\lg(n_e$, см$^{-3})$	$\hbar\omega$, кэВ	$\lg(B$, Гс)
примерные значения	10–10^4 у поверхности; 10^6–10^7 в пучке	0.1–30; 100 при всплесках	13–19 у поверхности; 9–15 в пучке	10–100	12–14
источники	[6, с. 181]	[1, с. 1014; 7, с. 448; 10, с. 256–287; 11, с. 461, 462; 12, с. 40]	[6, с. 181; 12, с. 40]	[7, с. 448]	[7, с. 448; 10, с. 255]

Таким образом, в сильнонеравновесном случае электроны ультрарелятивистские, т.к. ε_0/mc^2 >> 1. Численные оценки делаются просто. Для начала учтем, что в ультрарелятивистском случае

$$\varepsilon_0 - cp_z\cos\theta = cp_z(\sqrt{1+(\frac{mc}{p_z})^2} - \cos\theta) \approx \frac{m^2c^4}{2\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (4)$$

Если для виртуального электрона основной вклад вносит 1-я зона Ландау [10, с. 285], то с учетом (4) при малых θ получим ($\alpha = e^2(\hbar c)^{-1}$):

$$W \approx \frac{(\pi\hbar c)^2\alpha n_e(m^2c^4+\tilde{\varepsilon}_0^2\theta^2)}{(\tilde{\varepsilon}_0+\hbar\omega)\tilde{\varepsilon}_0} exp(-\frac{(\hbar\omega\theta)^2}{g(B)})\frac{g_1(B)}{g_1^2(B)-4\tilde{\varepsilon}_0^2(\hbar\omega)^2},$$

$$g(B) = 4mc^2\mu_B B, g_1(B) = \hbar^2\omega^2 - g(B), W \equiv \frac{d\tilde{\varphi}}{dl}. \qquad (5)$$

При значениях $\tilde{\varepsilon}_0 = 10^3 mc^2$, $n_{0e} = 10^{16}$см$^{-3}$, $B_0 = 10^{14}$ Гс и $\theta = 0$ формула (5) дает $W_0 \sim 10^{-13}$ рад/см в широких пределах изменения $\hbar\omega_0$ (по крайней мере, от 50 до 500 кэВ). При $\hbar\omega_0$ = 50 кэВ, $\tilde{\varepsilon}_0 = 10mc^2$, $n_{0e} = 10^{19}$см$^{-3}$, $B_0 = 10^{14}$ Гс и $\theta = 0$ имеем $W_0 \sim 10^{-6}$ рад/см. При такой энергии фотонов примерно такая же величина у фарадеевского вращения, но она достигается благодаря более высокой концентрации электронов в лабораторных условиях ($n_{0e} = 10^{23}$см$^{-3}$ [5, с. 89]). При такой же концентрации последний набор данных давал бы $W_0 \sim 10^{-2}$ рад/см, что на порядок превосходит экспериментальное и теоретическое значение для комптоновского вращения в отсутствие магнитного поля [5, с. 95]. Таким образом, чем меньше средняя энергия электронов и чем больше их концентрация, тем более заметным должно быть комптоновское вращение в магнитном поле при прочих равных условиях.

В случае температурного усреднения по импульсам для возможности взятия интеграла через вычеты подынтегральная функция должна быть рациональной. В равновесном случае, как видно из данных Таблицы 2, электронный газ можно считать нерелятивистским невырожденным, т.к. $p_F^2 / 2m_e << kT << mc^2$, что позволит обеспечить рациональность по p_z при переходе к нерелятивистскому приближению, а также разложить в экспоненту в распределении Ферми-Дирака в бесконечный ряд, предварительно пренебрегая единицей в знаменателе. При $\theta = 0$ ряд по зонам Ландау отсутствует, и тогда вычисляя интеграл через вычеты для каждого слагаемого разложения экспоненты, а затем суммируя, получаем:

$$W \sim \frac{\alpha n_e}{m\omega^2 kT}(\hbar^2\omega^2 - 4mc^2\mu_B B)\times$$

$$\times(\Omega_1 - \frac{\hbar\omega}{kT}(\frac{mc^2}{2kT} + \frac{\hbar\omega}{kT} + (\frac{\hbar^2\omega^2 - 4mc^2\mu_B B}{2\hbar\omega\sqrt{2mc^2kT}})^2)^{-1}(\Omega_1 - \frac{exp(\frac{\hbar\omega + mc^2}{kT})}{\sqrt{\frac{\hbar\omega + mc^2}{kT}}})),$$

$$\Omega_1 = \frac{exp(\Omega_2)}{\sqrt{\Omega_2}}, \Omega_2 = \frac{mc^2}{2kT} - (\frac{\hbar^2\omega^2 - 4mc^2\mu_B B}{2\hbar\omega\sqrt{2mc^2kT}})^2. \tag{6}$$

При $kT_0 = 10$ кэВ, $\hbar\omega_0$ = 500 кэВ, $n_{0e} = 10^{19}$ см$^{-3}$, B_0 = 10^{14} Гс имеем

$$\frac{\alpha n_e}{m\omega^2 kT} \approx 0.02,\ \Omega_2 \approx 12.6,\ \Omega_1 \approx 8.7 \cdot 10^4.$$

Таким образом, величина вращения должна быть более существенной (по сравнению с неравновесным случаем), сильно зависящей от всех вышеперечисленных параметров, вследствие чего для более корректных расчетов необходим также учет конечной ширины «Лпндау-резонансов».

Основные механизмы, влияющие на спектры излучения пульсаров [10, с. 283–285]: 1) расщепление и слияние фотонов в сверхсильном магнитном поле (равновесие между ними не всегда имеет место); 2) тормозное излучение; 3) двойное комптоновское рассеяние; 4) циклотронное излучение. Рассматриваемый эффект должен быть включен в этот перечень, т.к. должен влиять, прежде всего, на 1-й эффект, приводящий к покраснению спектра при kT > 35 кэВ [10, с. 291]. Условия расщепления для фотонов, когда вектор собственного магнитного поля электромагнитной волны перпендикулярен плоскости векторов $\hbar\vec{k}$ и $\vec{B}$, либо лежит в ней, различны [13, с. 639]. Вращение плоскости поляризации ведет к чередованию этих состояний, создавая условия более или менее благоприятные для распада.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pavlov, G.G. Polarization of Thermal X-rays from Isolated Neutron Stars / G.G. Pavlov, V.E. Zavlin // The Astrophys. J. – 2000 February. – Vol 529, № 1. – P. 1011–1018.

2. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.

3. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак // Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.

4. Серый, А.И. О комптоновском вращении при движении фотонов под произвольным углом к линиям индукции магнитного поля / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. 4 Матэматыка. Фізіка. – 2011. – № 2. – С. 43–48.

5. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.

6. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. кол.: Д.М. Алексеев, А.М. Балдин, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. – М.: Большая Российская энциклопедия, Т. 4. Пойнтинга – Робертсона – Стримеры 1994. – 704 с., ил.

7. Bussard, R.W. One- and Two-Photon Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / R.W. Bussard, S.B. Alexander, P. Meszaros // Phys. Rev. D – 1986. – Vol 34, № 2. – P. 440–451.

8. Kuznetsov, A.V. The Exact Electron Propagator in a Magnetic Field as the Sum Over Landau Levels on a Basis of the Dirac Equation Exact Solutions / A.V. Kuznetsov and A.A. Okrugin // Intern. J. of Modern Phys. A – 2011. – Vol. 26, № 16. – P. 2725–2733.

9. Kachelrie, M. Is Compton scattering in magnetic fields really infrared divergent? / M. Kachelrie, D. Berg, and G. Wunner // Phys. Rev. D – 1995. – Vol. 51, № 2. – P. 824–828.

10. Thompson, C. The soft gamma repeaters as very strong magnetized neutron stars – I. Radiative mechanism for outbursts / C. Thompson and R.C. Duncan // Mon. Nat. R. Astron. Soc. – 1995. – 275. – P. 255–300.

11. Железняков, В.В. Астрофизическая плазма в экстремальных условиях / В.В. Железняков // УФН. – 1997. – Т.167, № 4. – С. 460–462.

12. Huba, J.D. NRL Plasma Formulary / J.D. Huba // Beam Physics Branch, Plasma Physics Division, Naval Research Laboratory, Washington D.C. 20375 – 2000 Revised. – 65 P.

13. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.