УДК 524.3+537.6

А.И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О НАГРЕВАНИИ БЕЛОГО КАРЛИКА ПРИ АККРЕЦИИ

В [1, с. 554] был рассмотрен вопрос о происхождении магнитных полей с индукцией $B \sim 10^6$–10^9 Гс у водородных белых карликов. Сущность предложенного механизма заключается в следующем. 1. Белый карлик остывает и полностью кристаллизуется. 2. На его поверхность начинается аккреция водорода с более массивного компаньона в тесной двойной системе. 3. Внешние слои нагреваются и расплавляются, водород переходит в жидкую металлическую фазу, в которой становится энергетически выгодной спиновая поляризация протонов. 4. В результате спиновой поляризации возникает магнитное поле, проникающее в более глубокие слои. 5. Поскольку протоны в более глубоких слоях находятся в узлах кристаллической решетки и подчиняются статистике Бозе, то могут поляризоваться в указанном магнитном поле, усиливая его. 6. Это должно произойти быстрее, чем тепло с поверхности дойдет до внутренних слоев.

Последний пункт следует рассмотреть более строго математически. В рассматриваемом приближении будем пренебрегать конвекцией. Задачу можно разделить на 3 этапа. I. Вывод уравнения для нахождения пространственно-временного распределения температуры. II. Вывод краевых условий. III. Математическая запись требования пункта 6 (см. предыдущий абзац). Перейдем к более подробному рассмотрению этих этапов.

I. Количество тепла, втекающее в сферический слой толщиной dr за время dt за счет теплопроводности, равно [2, с. 167]

$$4\pi\left[\left(jr^{2}\right)_{r}-\left(jr^{2}\right)_{r+dr}\right]dt=-4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}j\right)drdt\,. \tag{1}$$

Аналогичным образом можно учесть и диффузию излучения [3, с. 96]

$$L=-4\pi r^{2}\frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)}\frac{d}{dr}\left(aT^{4}\right), \tag{2}$$

$$\left[L_{r}-L_{r+dr}\right]dt=4\pi\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{c}{3\kappa(r,t)\rho(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(aT^{4}\right)\right)drdt\,. \tag{3}$$

где $a=7.56\cdot10^{-15}$ эрг/(см^3·К^4) [4, с. 609], $\kappa(r,t)$ – непрозрачность, в приближении Крамерса зависящая от температуры и плотности следующим образом [3, с. 96]:

$$\kappa(r,t)=\kappa_{0}\rho(r)T^{-7/2}(r,t), \tag{4}$$

где $\kappa_0=8.68\cdot10^{24}$ см^2/г в случае водорода [3, с. 97].

С другой стороны, изменение количества тепла в сферическом слое толщиной dr за время dt можно представить в виде [2, с. 167]

$$d^{2}Q=\rho(r)\cdot 4\pi r^{2}dr\cdot C_{V}(r,t)dT\,. \tag{5}$$

Приравнивая (5) к сумме выражений (1) и (3) и учитывая (4), а также соотношение [2, с. 168]

$$j=-\lambda(r,t)\frac{\partial T}{\partial r}, \tag{6}$$

разделяя полученное соотношение на $4\pi r^2 drdt$, получаем:

$$\rho(r)C_{V}(r,t)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,t)r^{2}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{c}{3\kappa_{0}r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{T^{7/2}}{\rho^{2}(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(aT^{4}\right)\right). \tag{7}$$

В уравнении (7) необходимо уточнить выражения для $\rho(r), C_V(r,t)$ и $\lambda(r,t)$. Плотность $\rho(r)$ в случае водорода связана с концентрацией соотношением

$$\rho(r)\approx m_{p}n(r). \tag{8}$$

Это соотношение, однако, не выполняется в более глубоких слоях, где водород отсутствует. Поэтому условие равновесия между давлением гравитационных сил (которое выражается через $\rho(r)$) и давлением вырожденных электронов (которое выражается через $n(r)$) вместе с (8) не является достаточным для нахождения $\rho(r)$ либо $n(r)$.

Теплоемкость $C_V(r,t)$ складывается теплоемкости из кристаллической решетки $C_{реш}$ и электронного газа $C_{эл}$. При этом теплоемкость решетки равна [3, с. 106]

$$C_{реш}(r,t)=\frac{9R}{M_H y^3}\int_0^y \frac{x^4 e^x dx}{\left(e^x-1\right)^2}, y=\frac{\theta_D(r)}{T(r,t)},\ \theta_D(r)=A_1\rho^{1/2}(r), \tag{9}$$

где $A_1=4\cdot 10^3$ К·см$^{3/2}$/г$^{1/2}$ [3, с. 104]. Теплоемкость электронного газа при низких температурах в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях равна соответственно [5, с. 203, 212].

$$C_{эл}^{н/р}(r,t)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3}\frac{m_e}{M_H\hbar^2 n^{2/3}(r)}RkT(r,t), \tag{10}$$

$$C_{эл}^{у/р}(r,t)=\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{3M_H\hbar c n^{1/3}(r)}RkT(r,t), \tag{11}$$

где M_H = 1 г/моль – молярная масса водорода. При более строгом вычислении выражение для теплоемкости электронного газа в общем случае существенно усложняется, например, из-за наличия интегралов и бесконечных сумм.

Коэффициент теплопроводности $\lambda(r,t)$ можно найти через удельную электропроводность, используя закон Видемана–Франца [6, с. 80]:

$$\lambda(r,t)=\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2\tilde{\sigma}_{эл}(r,t)T(r,t), \tag{12}$$

$$\tilde{\sigma}_{эл}(r,t)=A_2\frac{\rho(r)}{T(r,t)}\left(1+A_3\frac{\rho(r)}{T^2(r,t)}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

где (в СГС) $A_2=6\cdot 10^{21}$ К·см^3/(г·с), $A_3=0.24\cdot 10^6$ К^2·см^3/г [7, с. 2].

II. Будем считать, что на поверхности белого карлика поток тепла обусловлен теплопроводностью, излучением и кинетической энергией падающего вещества, которая преобразуется в тепло.

$$j(r,t)\big|_{r=R_{WD}}=\frac{\dot{\mu}_S v^2}{2}-\sigma T^4(r,t)\big|_{r=R_{WD}}, \tag{14}$$

$$\dot{\mu}_S=\frac{\dot{M}}{4\pi R_{WD}^2},\ v^2=\frac{2GM_{WD}}{R_{WD}}. \tag{15}$$

С учетом (6) и (15) можно переписать (14) в виде:

$$\frac{\sigma T^4(r,t)|_{r=R_{WD}}}{\lambda(R_{WD},t)} - \frac{G\dot{M}M_{WD}}{4\pi R_{WD}^3 \lambda(R_{WD},t)} = \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R_{WD}}. \qquad (16)$$

При этом уровень аккреции $\dot{M}$ можно задавать в пределах от $10^{-11}M_{\odot}$/год до $10^{-8}M_{\odot}$/год [8, с. 10], где $M_{\odot}$ – масса Солнца. С учетом предела Чандрасекара, для массы белого карлика M_{WD} можно задавать значения, не превышающие $1.4M_{\odot}$. При низких плотностях, когда электронный газ нерелятивистский, имеется взаимосвязь между M_{WD} и радиусом R_{WD} белого карлика [3, с. 77]:

$$M_{WD} \sim R_{WD}^{-3}. \qquad (17)$$

При высоких плотностях, когда электронный газ ультрарелятивистский, указанная взаимосвязь отсутствует, поэтому для определения R_{WD} нужно задавать значение центральной плотности [3, с. 77].

III. Значения концентрации n_1, при которых уже возможна спонтанная спиновая поляризация (после расплавления), можно задавать, например, в пределах от 10^{25} до 10^{26} см$^{-3}$. Каждое из этих значений достигается на некоторой глубине x_1 или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD} - x_1$. Плавление происходит в некоторый момент времени t_1 при достижении температуры T_{melt}. Значение концентрации n_2, соответствующее максимально возможной плотности водорода (у порога нейтронизации) можно задать равным приблизительно $7.4 \cdot 10^{30}$ см$^{-3}$. Оно достигается на некоторой глубине $x_2 > x_1$ или на некотором расстоянии от центра белого карлика $R_{WD} - x_2 < R_{WD} - x_1$. Тепло доходит до этого слоя в некоторый момент времени t_2, а до этого можно считать, что температура слоя $T = 0$ К. С учетом п. 6 (в 1-м абзаце статьи) все это можно математически записать в следующем виде:

$$T(R_{WD} - x_1, t_1) = T_{melt},\ n(R_{WD} - x_1) = n_1, \qquad (18)$$

$$T(x_2, t) = 0, t \in (0, t_2),\ n(R_{WD} - x_2) = n_2, \qquad (19)$$

$$t_2 > t_1. \qquad (20)$$

Температура плавления водорода зависит от плотности (либо от давления, т.к. эти величины взаимосвязаны), причем в разных источниках предлагаются разные формулы (таблица).

Таблица – Формулы для температуры плавления водорода

Источник	Формула для T_{melt}	Значения коэффициентов
[9, с. 670]	$T_0(1+P/a)^b\, exp(-cP)$	T_0 = 14.025 К, a = 0.030355 ГПа, b = 0.59991, c = 0.0072997 ГПа$^{-1}$
[10, с. 12802]	$T_0(1+P/a)^b\, exp(-P/c)$	T_0 = 14.025 К, a = 0.1129 ГПа, b = 0.7155, c = 149 ГПа
[3, с. 104; 7, с. 2]	$A_4\rho^{1/3}$	$A_4 = 3{\cdot}10^4$ К·см/г$^{1/3}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серый, А. И. Спиновая поляризация нуклонов. Пределы низких и высоких температур / А. И. Серый // Изв. РАН. Серия физическая. – 2015. – Т. 79, № 4. – С. 549–555.

2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. – 552 с.

3. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : пер. с англ. : в 2 ч. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 1. – 256 с.

4. Шапиро, С. Л. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды : пер. с англ. : в 2 ч. / С. Л. Шапиро, С. А. Тьюколски – М. : Мир, 1985. – Ч. 2. – 257–656 с.

5. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика, ч. I. – 616 с.

6. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров; ред. кол.: Д. М. Алексеев [и др]. – М. : Большая рос. энцикл., 1998. – Т. 5. Стробоскопические приборы – Яркость. – 691 с.

7. Cumming, Andrew. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs [Electronic resource] / Andrew Cumming. – Mode of access: http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0202079. – Date of access: 10.03.2015.

8. Gänsicke, Boris T. Heating and cooling of accreting white dwarfs: Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Georg–August Universität zu Göttingen / Boris T. Gänsicke // Göttingen, 1997. – P. 1–119.

9. A quantum fluid of metallic hydrogen suggested by first-principles calculations / S. A. Bonev [et al.] // Nature. – 2004. – Vol. 431. – P. 669–672.

10. Evidence for a first-order liquid-liquid transition in high-pressure hydrogen from ab initio simulations / Miguel A. Morales [et al.] // PNAS – 2010, 20 July. – Vol. 107, № 29. – P. 12799–12803.