

УДК 539.171

А.И. СЕРЫЙ

Брест, БрГУ

**О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ПОПРАВКЕ К КРИТЕРИЮ СТОНЕРА
ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ НУКЛОННОЙ СРЕДЫ**

Вычисление плотности энергии электронно-нуклонной системы с учетом всевозможных поправок – важная задача, имеющая значение для астрофизики, ядерной энергетики и т.д. Во 2-м порядке теории возмущений по фреиховской константе в рамках диаграммной техники Фейнмана [1, с. 67–112] или Мацубары [1, с. 95–202] возникает проблема вычисления корреляционной энергии кулоновского взаимодействия. Рассмотрим выражение для корреляционной энергии протонов, находящихся (вместе с электронами) в жидком или газообразном состоянии, согласно [2, с. 205, 206]:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} w_{corr} = \frac{-\hbar c p_F}{8\pi^3 m_p c} \int_0^{+\infty} \kappa^4 \ln \left(1 + \frac{P_F^2}{\kappa^2 \hbar^2 P(s)} \right) P^2(s) ds, \quad P(s) = 1 - s \cdot \arctg \left(\frac{1}{s} \right),$$

$$p_{Fp} = (3\pi^2 n_p)^{1/3} \hbar, \quad \kappa^2 = 4\pi \hbar c v \alpha, \quad v = \frac{m_p p_{Fp}}{\pi^2 \hbar^3}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (1)$$

$P(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 0$, $P(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Если несобственный интеграл в (1) сходится равномерно по параметру α , то его можно интегрировать по α . Тогда с учетом обозначений в (1) получаем:

$$w_{corr} = -\frac{3m_p c^2 n_p \alpha^2}{\pi^3} F(X), \quad X = \frac{\pi p_{Fp}}{4m_p c \alpha P(s)},$$

$$F(X) = \int_0^{+\infty} \left(\ln(1+X) + X - X^2 \ln \left(1 + \frac{1}{X} \right) \right) P^2(s) ds \quad (2)$$

Перепишем (2) с учетом новых обозначений:

$$X_{\uparrow, \downarrow} = \frac{\pi \hbar (6\pi^2)^{2/3} (n_{p\uparrow, \downarrow} + \delta n_{p\uparrow, \downarrow})}{4m_p c \alpha P(s)}, \quad w_0 = \frac{3m_p c^2 n_p \alpha^2}{\pi^3}, \quad n_p = n_{p\uparrow} + n_{p\downarrow}, \quad (3)$$

$$w_{corr} = -\frac{w_0}{2} (F(X_{\uparrow}) + F(X_{\downarrow})). \quad (4)$$

В конечном интервале значений n_p можно считать, что несобственный интеграл в (2) сходится равномерно, и его можно дифференцировать по

параметру, в роли которого выступает n_p . В результате находим корреляционные поправки к химическому потенциалу протонов:

$$E_{corr\uparrow,\downarrow} = \frac{\partial w_{corr}}{\partial n_{p\uparrow,\downarrow}} = \frac{w_{corr}}{n_p} - \frac{w_0 Y}{6n_p} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{w_0 Y^2}{24n_p} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) ds + Z \delta n_{p\uparrow,\downarrow},$$

$$Y = \frac{\pi p_{Fp}}{m_p c \alpha}, \quad Z = \frac{w_0 Y}{n_p^2} \left(\frac{2}{9} \int_0^{+\infty} P(s) ds - \frac{YG}{36} \right), \quad G = \int_0^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) + \frac{1}{1+X} \right) ds. \quad (5)$$

Применяя алгоритм, использованный при выводе критерия Стонера для вырожденного электронно-протонно-нейтронного вещества в предположении наличия спиновой поляризации нейтронов и протонов [3, с. 33], можно убедиться, что корреляционную поправку к эффективной константе протон-протонного взаимодействия g_{pp} дает лишь выражение Z в (5):

$$\Delta g_{pp}^{corr} = - \frac{2c\alpha\hbar}{(3\pi^2)^{2/3} n_p^{2/3}} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{\pi\hbar^2 G}{4m_p n_p^{1/3} (3\pi^2)^{1/3}}. \quad (6)$$

При этом не забываем, что $X = X(s, n_p)$, т.е. 2-й интеграл в (6) снова зависит от n_p как от параметра. Численно 1-й интеграл в (6) приближенно равен 0.785398. Тогда, согласно [3, с. 33], критерий Стонера для вырожденной электронно-протонно-нейтронной системы (в предположении поляризации только нуклонов) принимает вид:

$$v_{0n} v_{0p} \Xi - |g_{nn}| v_{0n} + \tilde{g}_{pp} v_{0p} - 1 > 0,$$

$$v_{0i} = \frac{m_i p_{Fi}}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad \Xi = \tilde{g}^2 - \tilde{g}_{pp} g_{nn}, \quad \tilde{g} = g_{np}^{\uparrow\downarrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}, \quad J_{ij} = \pi\hbar^2 \frac{m_i + m_j}{m_i m_j},$$

$$g_{np}^{\uparrow\uparrow} = 2J_{np} a_t > 0, \quad g_{np}^{\uparrow\downarrow} = J_{np} (a_t + a_s) < 0, \quad g_{ii} = J_{ii} a_i < 0,$$

$$\tilde{g}_{pp} = g_{pp} + \Delta g_{pp}^{exch} + \Delta g_{pp}^{corr}, \quad \Delta g_{pp}^{exch} = \frac{2\pi e^2}{(3\pi^2 n_p)^{2/3}}. \quad (7)$$

Длины s -рассеяния (в 10^{-13} см) [4, с. 20, 30, 31]: $a_s = -23.71$, $a_t = 5.42$, $a_p = a_n = -17.2$ (когда протонная энергия Хартри компенсируется фоном электронов).

От параметров в интегралах G можно избавиться, представив их в виде бесконечных рядов. При $n_p < 2.9 \cdot 10^{33}$ см $^{-3}$ возможно $X < 1$ и $X > 1$, в связи с чем каждый интеграл разбивается на 2 интеграла – от 0 до s_l и от s_l до $+\infty$, где $X(s_l) = 1$ при заданном n_p . Тогда получим:

$$G = \frac{2}{Y_1} \int_{s_1}^{+\infty} P(s) ds + \int_0^{s_1} \ln(P(s)) ds - s_1 \ln Y_1 + s_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (j-1)}{j} Y_1^j \int_0^{s_1} P^{-j}(s) ds +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (j+1)}{j} Y_1^{-j} \int_{s_1}^{+\infty} P^j(s) ds, Y_1 = \frac{Y}{4}. \quad (8)$$

При $n_p > 2.9 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$ $X > 1$ при любом s , и тогда

$$G = \frac{2}{Y_1} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{P(s)}{Y_1} \right) ds + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} Y_1^j \int_0^{+\infty} P^{-j}(s) ds +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1} Y_1^{-j} \int_0^{+\infty} P^j(s) ds. \quad (9)$$

Если аналогичное разложение выполнить для w_{corr} , то результат не вполне совпадет с результатом, полученным в [5, с. 53], поскольку там сначала было выполнено разложение, а затем интегрирование по α , и при этом не было учтено, что s_l также зависит от α .

Энергия протонной подсистемы в жидкой фазе:

$$w_{ж} = \frac{3}{5} n_p \mathcal{E}_{Fp} + w_{exch} + w_{corr}, \quad \mathcal{E}_{Fp} = \frac{p_{Fp}^2}{2m_p}, \quad w_{exch} = -\frac{e^2 (3\pi^2)^{4/3} n_p^{4/3}}{4\pi^3} \quad (10)$$

При $n_p = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ $w_{TT} \approx -0.035 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$ [5, с. 52]. С учетом (2), (10) получаем, что $w_{ж} \approx -0.016 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$, что отличается от результата в [5, с. 53] в силу замечания после (9). Таким образом, получаем, что $w_{TT} < w_{ж}$.

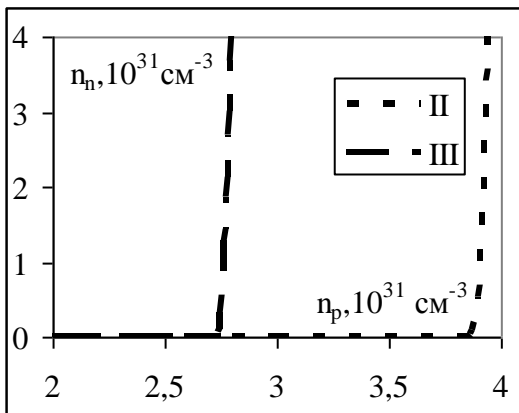


Рисунок 1 – Область ферромагнетизма для низких плотностей

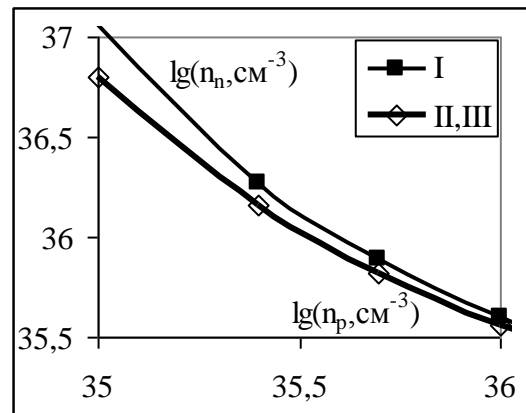


Рисунок 2 – Область ферромагнетизма для высоких плотностей

Из рисунков 1 и 2 и данных таблицы видно, что качественно графики не отличаются от полученных при учете только обменной поправки для кулоновского протон-протонного взаимодействия [3, с. 35], т.е. по-прежнему имеется 2 области ферромагнетизма на диаграмме (n_p, n_n) , причем обе несколько уменьшаются по сравнению со случаем учета лишь обменной поправки (на рисунке 2 различия почти нет). Таким образом, обменная кулоновская энергия благоприятствует ферромагнетизму, а корреляционная энергия несколько ослабляет его, хотя в целом ситуация остается более благоприятной по сравнению с учетом только контактного ядерного взаимодействия. Порог нейтронизации по-прежнему находится в области ферромагнетизма.

На рисунках 1 и 2, как и в таблице, приняты обозначения: I – модель, в которой учтено только контактное ядерное межнуклонное взаимодействие, II – дополнительно учтена обменная кулоновская протон-протонная поправка, III – помимо обменной поправки учтена еще и корреляционная. Минимальные значения n_n , выше которых выполняется критерий Стонера при соответствующих значениях n_p , рассмотрим в таблице.

Таблица – Минимальные значения n_n и соответствующие им n_p

Область	минимальное n_n	значения n_p , при которых есть ферромагнетизм		
		I	II	III
Левая	0	---	$< 3.85 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$< 2.73 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
	$+\infty$	---	$6.91 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$4.68 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
Правая	$+\infty$	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.079 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.127 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$
	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Приведенные здесь рассуждения основаны на предположении газового или жидкого состояния электронно-нуклонной среды. Но, согласно выводам, сделанным после (10), под оболочками водородных белых карликов вблизи порога нейтронизации водород может быть кристаллическим. Действительно, фрелиховская константа может оказаться больше единицы, т.е.

$$\frac{m e^2}{\hbar p_{Fp}} > 1 \Rightarrow n_p < 1.42 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}. \quad (11)$$

Тогда вещество имеет тенденцию к кристаллизации, и радиус локализации отдельного протона не больше размеров кристаллической ячейки [2, с. 210]. Но если рассматривать водород выше порога нейтронизации, то возникает вопрос о влиянии последней на агрегатное состояние водорода. Кроме того, вследствие различных дефектов кристаллической или аморфной решетки (если она существует) локализация электронов (как и прото-

нов) может иметь андерсоновский характер, т.е. область локализации должна возрастать [6, с. 82, 83], что также может оказывать влияние на вопрос об агрегатном состоянии.

С другой стороны, по отношению к водороду ниже порога нейтронизации результаты сравнимы с результатами, полученными для невырожденного водорода (где ферромагнетизм возможен при $n_p < 6.75 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ [5, с. 53, 56]); можно было бы применить обе модели к белым карликам (в связи с проблемой происхождения их магнитных полей, которая в настоящее время исследуется совсем в других направлениях [7]), но в белых карликах при таких плотностях уже возможна кристаллизация. Для Сверхновых II типа получение критерия Стонера с учетом нейтронов в невырожденном случае затруднительно, поэтому модель чистого водорода не годится, и можно применять рассмотренную здесь модель крайне вырожденной нуклонной среды. Но не следует забывать, что у Сверхновых II типа хотя и отсутствует кристаллическая решетка, но температуры слишком велики для того, чтобы приближение крайнего вырождения можно было считать удовлетворительным.

Некоторые идеи, лежащие в основе данной работы, принадлежат В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. IX / Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. В 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // 3-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 496 с.
2. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов. – М.: Физматлит, 2003. – 392 с.
3. Серый, А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы. / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
4. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский // М.: Атомиздат, 1972. – 351 с.
5. Серый, А.И. К вопросу о магнитных полях белых карликов и Сверхновых II типа. / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 50–58.
6. Физическая энциклопедия / гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол.: Д.М. Алексеев [и др]. – Т. I: Ааронова–Бома эффект – Длинные линии. – М.: Сов. Энцикл., 1988. – 704 с.
7. Tout, Christopher A. The origin of the strongest magnetic fields in dwarfs. / Christopher A. Tout // Pramana – J. Phys. – July 2011. – Vol. 77, № 1. – P. 199–212.