УДК 536

В. С. СЕКЕРЖИЦКИЙ, А. И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЛЯТИВИСТСКОГО ФЕРМИ-ГАЗА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Расчет характеристик ферми-газов (прежде всего, электронного) имеет важное значение для квантовой статистики, результаты которой широко применяются, например, в физике твердого тела и астрофизике. Вместе с тем, алгоритм расчета основных характеристик ферми-газа при низких отличных от нуля температурах хорошо разработан для нерелятивистского приближения [1, с. 596–597], применение которого не всегда корректно. Непосредственное применение формул, полученных для нерелятивистского газа, в релятивистском случае также некорректно, поэтому необходимо вывести некоторые основные формулы заново, что и предполагается сделать в данной работе.

В соответствии с [1, с. 190–192] запишем выражение для концентрации n ферми-газа при произвольной температуре T в отсутствие внешнего магнитного поля и спиновой поляризации:

$$n = 2\frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^{+\infty}\frac{p^2dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}, \tag{1}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, p – импульс отдельного фермиона, ε – его энергия, k – постоянная Больцмана, μ – химический потенциал. В нерелятивистском случае величины ε и μ не содержат энергии покоя отдельного фермиона mc^2 (m – масса фермиона, c – скорость света в вакууме), поэтому взаимосвязь между ε и p такова, что при переходе к интегрированию по ε в (1) нижний предел интеграла остается равным нулю. Это и позволяет применять формулы приближенного вычисления (1) при $kT/\mu << 1$, приведенные в [1, с. 597].

В релятивистском же случае взаимосвязь между ε и p выражается формулой

$$\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \tag{2}$$

а μ также, как и ε, содержит mc^2. Тогда (1) перепишется в виде

$$n = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3}\int_{mc^2}^{+\infty}\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2 - m^2c^4}\,d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}. \tag{3}$$

Нижний предел интеграла в (3) не равен нулю, поэтому применение упомянутого выше алгоритма к (3) недопустимо. Для решения данной проблемы произведем замену

$$\varepsilon = x + mc^2,\ \mu = \nu + mc^2. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), после несложных преобразований получим:

$$n = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3}\left(I_{3/2} + mc^2 I_{1/2}\right), \tag{5}$$

$$I_j = \int_0^{+\infty} \frac{x^j \sqrt{x + 2mc^2}\,dx}{\exp\left(\frac{x-\nu}{kT}\right) + 1}. \tag{6}$$

Для возможности применения к интегралам (6) рассуждений, приведенных в [1, с. 596–597], необходимо, чтобы функции

$$\varphi_j(x) = x^j \sqrt{x + 2mc^2} \tag{7}$$

при $x \to \infty$ возрастали не быстрее, чем $e^{\frac{x}{kT}}$, а при $x \to 0$ не возрастали быстрее, чем x^{-1}. Эти условия, очевидно, выполняются. Поэтому в соответствии с [1, с. 597] можно в общем виде приближенно записать:

$$I_j \approx \int_0^{\nu} \varphi_j(x)dx + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right)_{x=\nu}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8) и после несложных преобразований возвращаясь от ν к μ в соответствии с (4), для n в (5) получаем:

$$n \approx \frac{1}{3}\left(\mu^2 - m^2c^4\right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \frac{2\mu^2 - m^2c^4}{\sqrt{\mu^2 - m^2c^4}}. \tag{9}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: учеб. пособие. / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.