УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Модель релятивистского поляризованного по спину электронного газа в квантующем магнитном поле широко используется в задачах астрофизики. В ряде случаев допустимо модельное приближение, в котором такой газ считается идеальным и вырожденным.

Уравнение, связывающее химический потенциал $\chi_e(B)$ идеального вырожденного релятивистского электронного газа с концентрацией n_e в магнитном поле с индукцией B (где m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора) может быть записано на основе сведений из [1, с. 45] (без учета аномального магнитного момента электрона) следующим образом:

$$n_e = F\left(\sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4} + 2\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\chi_e^2(B) - m_e^2 c^4 - 4 j m_e c^2 \mu_B B}\right), \qquad (1)$$

$$F = \frac{m_e \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3 c}. \qquad (2)$$

Суммирование в (1) ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не окажется отрицательным. При $k = 0$ сумма в правой части (1) исчезает, поэтому величина $\chi_e(B)$ легко выражается через остальные:

$$\chi_e(B) = \sqrt{n_e^2 \pi^4 \hbar^6 c^2 / (m_e \mu_B B)^2 + m_e^2 c^4}. \qquad (3)$$

При $k = 1$ из (1) получается квадратное уравнение относительно величины

$$y = \chi_e^2(B) - m_e^2 c^4. \qquad (4)$$

Для удобства анализа корней упомянутого уравнения можно после несложных преобразований переписать его следующим образом:

$$9y^2 - \left(96\mu_B B m_e c^2 + 10\frac{n_e^2}{F^2}\right)y + \left(16\mu_B B m_e c^2 + \frac{n_e^2}{F^2}\right)^2 = 0. \qquad (5)$$

Корни уравнения (5) выражаются следующим образом:

$$y_\pm = \frac{96\mu_B B m_e c^2 + 10\frac{n_e^2}{F^2} \pm \sqrt{768\mu_B B m_e c^2\,\frac{n_e^2}{F^2} + 64\frac{n_e^4}{F^4}}}{18}. \qquad (6)$$

Поскольку $\chi_e(B)$ определяется однозначно, следует оставить только один корень в (6).

Из (1) при $k=1$ можно сделать следующие оценки:

$$y > \frac{n_e^2}{9F^2},\; y < \frac{n_e^2}{9F^2} + 4\mu_B B m_e c^2. \qquad (7)$$

Для установления границ корней (6) можно либо пренебрегать слагаемым, зависящим от B, под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата. В этом случае получим:

$$y_- > \frac{n_e^2}{9F^2} + \frac{8}{3}m_e c^2 \mu_B B, \qquad (8)$$

$$y_- < \frac{n_e^2}{9F^2} + \frac{16}{3}m_e c^2 \mu_B B. \qquad (9)$$

$$y_+ > \frac{n_e^2}{F^2} + \frac{16}{3}m_e c^2 \mu_B B, \qquad (10)$$

$$y_+ < \frac{n_e^2}{F^2} + 8m_e c^2 \mu_B B. \qquad (11)$$

Неравенства (8), (9) и (11) не противоречат неравенствам (7), а неравенство (10) противоречит второму неравенству (7). Поэтому в (6) оставляем только корень y_-, откуда следует, что

$$\chi_e(B)=\sqrt{\frac{96\mu_B B m_e c^2+10\dfrac{n_e^2}{F^2}-\sqrt{768\mu_B B m_e c^2\dfrac{n_e^2}{F^2}+64\dfrac{n_e^4}{F^4}}}{18}+m_e^2c^4}\,. \quad (12)$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.