УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

СПИНОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Модель идеального вырожденного релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле находит многочисленные астрофизические приложения. В частности, представляет интерес вопрос о спиновой поляризации такого газа.

На основе соотношений [1, с. 45] можно записать систему уравнений, связывающих степень спиновой поляризации p_{0e} и химический потенциал $\chi_e(B)$ идеального вырожденного релятивистского электронного газа с концентрацией n_e в магнитном поле с индукцией B (где m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора):

$$n_e(1+p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=0}^{k}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4-4jm_ec^2\mu_B B}, \qquad (1)$$

$$n_e(1-p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4-4jm_ec^2\mu_B B}, \qquad (2)$$

где не учитывается аномальный магнитный момент электрона, а суммирование ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не станет отрицательным. Можно исключить величину $\chi_e^2(B)-m_e^2c^4$ из (1) и (2) или выразить ее в явном виде, вычитая (2) из (1). Тогда в правой части остается только одно слагаемое – то, в котором под корнем присутствует лишь $\chi_e^2(B)-m_e^2c^4$:

$$n_e p_{0e}=\frac{m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sqrt{\chi_e^2(B)-m_e^2c^4}. \qquad (3)$$

Из (3) легко получить, что

$$\chi_e^2(B)-m_e^2c^4=\frac{n_e^2p_{0e}^2\pi^4\hbar^6c^2}{(m_e\mu_B B)^2}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем:

$$n_e(1+p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=0}^{k}\sqrt{\frac{n_e^2p_{0e}^2\pi^4\hbar^6c^2}{(m_e\mu_B B)^2}-4jm_ec^2\mu_B B}. \qquad (5)$$

Можно подставить (4) также в (2), в результате чего получаем:

$$n_e(1-p_{0e})=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{n_e^2p_{0e}^2\pi^4\hbar^6c^2}{(m_e\mu_B B)^2}-4jm_ec^2\mu_B B}. \qquad (6)$$

Вычитание (6) из (5) уже не приводит к новым уравнениям, но вместо вычитания можно выполнить сложение, в результате чего получим:

$$2n_e=\frac{2m_e\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\left(\frac{n_e p_{0e}\pi^2\hbar^3 c}{m_e\mu_B B}+2\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{n_e^2p_{0e}^2\pi^4\hbar^6c^2}{(m_e\mu_B B)^2}-4jm_ec^2\mu_B B}\right). \qquad (7)$$

Легко убедиться, что если в (5) $k=0$, то $p_{0e}=1$. При $k=1$ из (5), (6) или (7) независимыми способами можно получить одно и то же квадратное уравнение относительно p_{0e}, которое внешне не отличается от аналогичного уравнения для нерелятивистского газа [2, с. 15]:

$$3p_{0e}^2+2p_{0e}-1-\frac{16(m_e\mu_B B)^3}{n_e^2\pi^4\hbar^6}=0. \tag{8}$$

В соответствии с теми же замечаниями, что и в [2, с. 15], для уравнения (8) выбирается только положительный корень:

$$p_{0e}=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{1+3\left(1+16(m_e\mu_B B)^3/\left(n_e^2\pi^4\hbar^6\right)\right)}\right). \tag{9}$$

С дальнейшим ростом k получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Секержицкий, В. С. О частично поляризованном идеальном электронном газе в квантующем магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Астрофизические исследования в БрГУ имени А. С. Пушкина : сб. материалов науч.-практ. семинара, Брест, 12 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. И. Серого. – Брест : БрГУ, 2022. – С. 14–15.