УДК 536

А. И. СЕРЫЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОМЕГА-ПОТЕНЦИАЛА ИДЕАЛЬНЫХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИ- И БОЗЕ-ГАЗОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ОТСУТСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Общее выражение для большого термодинамического потенциала квантового газа при конечных температурах имеет вид (знак «+» соответствует фермионам, а «–» – бозонам) [1, с. 48; 2, с. 195; 3, с. 195]

$$\Omega_{\pm} = \mp kT \frac{4\pi g V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} ln\left(1 \pm exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right)\right) p^2 dp . \qquad (1)$$

В (1) приняты обозначения: T – температура, k – постоянная Больцмана, $g = 2s+1$, s – спин, V – объем, χ – химический потенциал, p – импульс отдельного фермиона, ε – его энергия.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений ε справедливо соотношение

$$exp\left(\frac{\varepsilon - \chi}{kT}\right) > 1. \qquad (2)$$

При выполнении (2) для логарифма в (1) в случае фермионов можно выполнить следующее разложение:

$$ln\left(1 + exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} exp\left((j+1)\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right). \qquad (3)$$

В случае бозонов вместо (3) получаем:

$$ln\left(1-exp\left(\frac{\chi-\varepsilon}{kT}\right)\right)=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi-\varepsilon}{kT}\right). \qquad (4)$$

С учетом (3) можно переписать (1) для фермионов в виде:

$$\Omega_{+}=-kT\frac{gV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi}{kT}\right)\int_0^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\varepsilon}{kT}\right)p^2dp. \qquad (5)$$

Аналогично для бозонов с учетом (4) можно переписать (1) в виде:

$$\Omega_{-}=-kT\frac{gV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi}{kT}\right)\int_0^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\varepsilon}{kT}\right)p^2dp. \qquad (6)$$

Для нерелятивистского газа (как для фермионов, так и для бозонов) выполняются соотношения:

$$\chi=\zeta+mc^2,\ \varepsilon=\frac{p^2}{2m}+mc^2, \qquad (7)$$

где m – масса частицы, c – скорость света. С учетом (7) можно переписать (5) и (6) в виде

$$\Omega_{+}=-\frac{kTgV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\int_0^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p^2}{2mkT}\right)p^2dp, \qquad (8)$$

$$\Omega_{-}=-\frac{kTgV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\int_0^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p^2}{2mkT}\right)p^2dp. \qquad (9)$$

На основе известных формул [4, с. 277] можно показать, что интеграл в (8) и (9) равен

$$\int_0^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p^2}{2mkT}\right)p^2dp=\left(\frac{2mkT}{j+1}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (9) и (8), окончательно получаем:

$$\Omega_{+}=-(kT)^{5/2}gV\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)^{5/2}}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right), \qquad (11)$$

$$\Omega_{-} = -(kT)^{5/2} gV \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{5/2}} exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT} \right). \qquad (12)$$

Таким образом, знакопеременный ряд получается только в случае фермионов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.

3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 5 : Статистическая физика, ч. 1. – 616 с.

4. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.