УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОМЕГА-ПОТЕНЦИАЛА ИДЕАЛЬНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО НЕЙТРОННОГО ГАЗА ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ В ИНТЕНСИВНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вычисление большого термодинамического потенциала нейтронного газа в магнитном поле имеет важное значение для астрофизических приложений [1, с. 9]. Выражение для большого термодинамического потенциала идеального замагниченного нейтронного газа при конечных температурах в общем виде записывается следующим образом [1, с. 48, 50]

$$\Omega = -kT\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\sum_s\int_0^{+\infty} ln\left(1+exp\left(\frac{\chi-\varepsilon(s)}{kT}\right)\right)p^2dp. \tag{1}$$

В нерелятивистском случае при наличии магнитного поля можно записать:

$$\chi = \zeta + mc^2,\ \varepsilon(s) = \frac{p^2}{2m} + mc^2 + 2s\sigma_n\mu B. \tag{2}$$

В (1) и (2) приняты обозначения: T – температура, k – постоянная Больцмана, s – спиновое квантовое число, которое принимает значения $\pm 1/2$, V – объем, χ – химический потенциал, p – импульс отдельного нейтрона, $\varepsilon(s)$ – его энергия, m – его масса, μ – ядерный магнетон, B – индукция внешнего магнитного поля, σ_n – отношение магнитного момента нейтрона к ядерному магнетону, c – скорость света.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений $\varepsilon(s)$ справедливо соотношение

$$exp\left(\frac{\varepsilon(s)-\chi}{kT}\right) > 1. \tag{3}$$

Из (2) следует, что (3) выполняется при

$$\zeta < -|\sigma_n|\mu B. \qquad (4)$$

При выполнении (3) к логарифму в (1) можно применить следующее разложение:

$$ln\left(1 + exp\left(\frac{\chi - \varepsilon(s)}{kT}\right)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} exp\left((j+1)\frac{\chi - \varepsilon(s)}{kT}\right). \qquad (5)$$

С учетом (5) перепишем (1) в виде:

$$\Omega = -kT \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} exp\left((j+1)\frac{\chi}{kT}\right) \sum_s \int_0^{+\infty} exp\left(-(j+1)\frac{\varepsilon(s)}{kT}\right) p^2 dp. \qquad (6)$$

С учетом (2) перепишем (6) в виде

$$\Omega = -\frac{kTV}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right) \sum_s exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma_n\mu B}{kT}\right) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} exp\left(-(j+1)\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp. \qquad (7)$$

На основе известных справочных формул [2, с. 277] несложно показать, что вычисление интеграла в (7) дает следующий результат:

$$\int_0^{+\infty} exp\left(-(j+1)\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp = \left(\frac{2mkT}{j+1}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \qquad (8)$$

Суммирование по спину приводит к результату:

$$\sum_s exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma_n\mu B}{kT}\right) = 2ch\left((j+1)\frac{\sigma_n\mu B}{kT}\right). \qquad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и (7), окончательно получаем:

$$\Omega = -\frac{V}{4}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)^{5/2}} exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right) ch\left((j+1)\frac{\sigma_n\mu B}{kT}\right). \qquad (10)$$

Если сумму (10) ограничить только слагаемым с $j = 0$, то получится уже известный результат для высоких температур [1, с. 51].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.