УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОМЕГА-ПОТЕНЦИАЛА ИДЕАЛЬНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАМАГНИЧЕННОГО ГАЗА ЗАРЯЖЕННЫХ БОЗОНОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Общее выражение для большого термодинамического потенциала газа заряженных бозонов в квантующем магнитном поле при конечных температурах, согласно [1, с. 48, 59], имеет вид

$$\Omega = kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ln\left(1 - exp\left(\frac{\chi - \varepsilon_n}{kT}\right)\right)dp_z . \quad (1)$$

В (1) приняты обозначения: m – масса частицы, T – температура, k – постоянная Больцмана, V – объем, χ – химический потенциал бозе-газа, p_z – проекция импульса отдельного бозона на ось z, ε_n – энергия бозона, n – номер уровня Ландау, B – индукция магнитного поля, μ – соответствующий магнетон (либо просто половина произведения заряда бозона на его комптоновскую длину волны).

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений энергии бозона ε_n справедливо соотношение

$$exp\left(\frac{\varepsilon_n - \chi}{kT}\right) > 1. \quad (2)$$

При этом в нерелятивистском случае справедливы соотношения:

$$\chi = \zeta + mc^2,\ \varepsilon_n = \frac{p_z^2}{2m} + mc^2 + (2n+1)\mu B, \quad (3)$$

где c – скорость света. Поскольку минимальное значение n равно нулю, то из (3) следует, что (2) выполняется при

$$\zeta < \mu B. \quad (4)$$

При выполнении (4) для логарифма в (1) справедливо разложение:

$$ln\left(1 - exp\left(\frac{\chi - \varepsilon_n}{kT}\right)\right) = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi - \varepsilon_n}{kT}\right). \quad (5)$$

С учетом (5) выражение (1) может быть переписано в виде:

$$\Omega=-kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z\,. \qquad (6)$$

Далее преобразуем интеграл в (6) к интегралу Пуассона [2, с. 277]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z=\sqrt{\frac{2mkT}{j+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-x^2\right)dx=\sqrt{\frac{2\pi mkT}{j+1}}\,. \qquad (7)$$

Выполняя суммирование геометрической прогрессии, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right)=\frac{exp\left(-(j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}{1-exp\left(-(j+1)\frac{2\mu B}{kT}\right)}. \qquad (8)$$

Данный результат легко преобразуется к виду

$$\frac{exp\left(-(j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}{1-exp\left(-(j+1)\frac{2\mu B}{kT}\right)}=\frac{1}{2sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}. \qquad (9)$$

Подставляя (7) и (9) в (6), можно окончательно получить:

$$\Omega=-\mu BV\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)}{(j+1)^{3/2}sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}. \qquad (10)$$

Если в сумму (10) ограничить слагаемым, которое соответствует $j=0$, получится уже известный результат для высоких температур [1, с. 59].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.