УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОМЕГА-ПОТЕНЦИАЛА ИДЕАЛЬНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКИОГО ГАЗА ЗАРЯЖЕННЫХ ФЕРМИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Общее выражение для большого термодинамического потенциала замагниченного газа заряженных фермионов при конечных температурах имеет вид [1, с. 48, 50, 51; 2, с. 289]

$$\Omega = -kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_s\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ln\left(1+exp\left(\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right)\right)dp_z\,. \qquad (1)$$

В (1) приняты обозначения: m – масса частицы, T – температура, k – постоянная Больцмана, s – спиновое квантовое число, V – объем, χ – химический потенциал ферми-газа, p_z – проекция импульса отдельного фермиона на ось z, ε_n – энергия фермиона, n – номер уровня Ландау, B – индукция магнитного поля, μ – соответствующий магнетон (магнетон Бора для электронов или позитронов, ядерный магнетон для протонов).

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда для любых физически допустимых значений ε_n справедливо соотношение

$$exp\left(\frac{\varepsilon_n-\chi}{kT}\right)>1. \qquad (2)$$

Для энергии и химического потенциала выполняются соотношения:

$$\chi=\zeta+mc^2,\ \varepsilon_n=\frac{p_z^2}{2m}+mc^2+(2n+1+2\sigma s)\mu B, \qquad (3)$$

где c – скорость света, σ – отношение собственного магнитного момента фермиона к соответствующему магнетону. Если величина s принимает значения, равные $\pm 1/2$, а минимальное значение n равно нулю, то из (3) следует, что (2) справедливо при

$$\zeta<(1-|\sigma|)\mu B. \qquad (4)$$

При выполнении (4) для логарифма в (1) можно выполнить следующее разложение:

$$ln\left(1+exp\left(\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right)\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\chi-\varepsilon_n}{kT}\right). \qquad (5)$$

С учетом (5) можно переписать (1) в виде:

$$\Omega=-kT\frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j+1}exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right)\sum_s exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z\,. \qquad (6)$$

Далее учтем, что [3, с. 277]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-(j+1)\frac{p_z^2}{2mkT}\right)dp_z = \sqrt{\frac{2\pi mkT}{j+1}}. \tag{7}$$

Выполняя суммирование, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} exp\left(-(j+1)\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) = \frac{1}{2sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}, \tag{8}$$

$$\sum_{s} exp\left(-(j+1)\frac{2s\sigma\mu B}{kT}\right) = 2ch\left((j+1)\frac{\sigma\mu B}{kT}\right). \tag{9}$$

Подставляя (7)–(9) в (6), окончательно получаем:

$$\Omega = -2\mu BV\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)^{3/2}} exp\left((j+1)\frac{\zeta}{kT}\right) \frac{ch\left((j+1)\frac{\sigma\mu B}{kT}\right)}{sh\left((j+1)\frac{\mu B}{kT}\right)}. \tag{10}$$

Если в сумме (10) оставить только слагаемое, соответствующее $j=0$, то получится уже известный результат для высоких температур [1, с. 51].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
2. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
3. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев [и др.] ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.