З. Н. Серая, А. И. Серый, Н. В. Силаев
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

О РАЗНОВИДНОСТЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

В связи с тем, что студенты физико-математического факультета УО «БрГУ имени А. С. Пушкина» изучают численные методы, представляет интерес систематизация основных сведений по отдельным темам для закрепления материала.

Далее в виде сравнительных таблиц (которые могут быть использованы в образовательном процессе) отображены некоторые сведения по полиномиальным методам (далее – ПМ). Важность составления таких таблиц обусловлено тем, что термин «ПМ» является многозначным, поскольку эти методы применяются для самых разных типов задач.

Таблица 1 – Полиномиальные методы в задачах различных типов

Исследуемая функция	Уже задана каким-либо образом	Должна быть найдена путем решения уравнения
Типы задач	Аппроксимация, интерполяция	Для уравнений: а) обыкновенных дифференциальных (ОДУ); б) интегральных (ИУ); в) интегро-дифференциальных (ИДУ)
Подробнее	См. в таблице 2	См. в таблице 3
Примечания	Вместо степенного базиса можно выбрать тригонометрический, экспоненциальный и др.	а) Для решения указанных типов уравнений вместо полиномиальных методов возможны сеточные или вариационные; б) полиномиальные методы усложняются в случае перехода от линейных уравнений к нелинейным [1, с. 133–194]

Таблица 2 – Сравнительная характеристика аппроксимации и интерполяции как полиномиальных методов

Тип задач	Сущность	Разновидности
Аппроксимация	а) Приближенное представление функции, выражение для которой известно на каком-либо отрезке, в виде полинома с конечным числом слагаемых	На равномерной сетке; на чебышевской сетке; непосредственное применение ряда Тейлора – Маклорена
	б) Приближенное представление функции, значения которой известны в n точках, в виде полинома наилучшего приближения (степени $k < n - 1$)	Линейная регрессия; квадратичная регрессия и т. д.
Интерполяция	Нахождение выражения для функции, значения которой известны в n точках, в виде полинома степени $k = n - 1$, проходящего через все указанные точки	Интерполяционный полином Лагранжа, Ньютона, сплайны [2, с. 104, 110, 117], через матрицу Вандермонда

Аппроксимация первого типа может применяться там, где использование вместо исходной функции ее приближенного выражения более удобно. В качестве примера можно привести метод Канторовича при численном нахождении значений несобственных интегралов с особой точкой (аддитивное выделение особенностей) [2, с. 163]. Кроме того, в случае численного нахождения определенных классов интегралов методы нахождения оптимальных узлов (но не сами методы интегрирования!) в квадратурных формулах типа Гаусса также можно отнести к полиномиальным, поскольку в этих формулах используются корни специальных полиномов (обзор в виде сравнительных таблиц был дан в [3]).

Таблица 3 – Полиномиальные методы решения уравнений

Уравнения	Количество переменных в искомой функции	Примеры методов
Обыкновенное дифференциальное уравнение (краевая задача)	1	Галеркина и моментов (для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений) [2, с. 207]; через фрешиан [1, с. 189] (для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений)

Продолжение таблицы 3

Интегральные уравнения	1	Галеркина (для линейных интегральных уравнений) [1, с. 112, 116]
Интегро-дифференциальные уравнения	1 или 2	Параметрический Ньютона [1, с. 148–152] (для нелинейных интегро-дифференциальные уравнения [1, с. 191–194])

Таким образом, полиномиальные методы занимают важное место среди разнообразных методов численного анализа, а монография [1] демонстрирует, что исследования в данном направлении продолжаются и в наше время. Вместе с тем более подробное сравнение полиномиальных методов с альтернативными им (прежде всего, сеточными) заслуживает отдельных публикаций. Примерами важнейших вопросов в этом случае являются следующие: а) условия сходимости; б) локальность; в) быстродействие (что влияет на необходимое количество итераций и требуемые ресурсы памяти компьютера).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов, В. В. Полиномиальные методы прикладного анализа : монография / В. В. Морозов ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2011. – 200 с.

2. Сборник задач по методам вычислений / под ред. П. И. Монастырного. – Минск : Изд-во БГУ, 1983. – 287 с.

3. Серый, А. И. О квадратурных формулах типа Гаусса / А. И. Серый, Н. В. Силаев, З. Н. Серая // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов VI междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 окт. 2017 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест : БрГУ, 2017. – 274 с.