УДК 101.1:510.2

Н.В. Михайлова

«НЕВЕРОЯТНАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ» КАК ПРАКТИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Статья посвящена философско-методологическому анализу практической эффективности современной математики. Философы науки солидарны в том, что непостижимая эффективность не может быть объяснена без прояснения на генетическом уровне практической востребованности математических теорий.

Введение

Философия и математика были рождены в попытках выяснить возможные пути познания истины благодаря напряженным усилиям человеческого разума. Не вдаваясь в философское обсуждение того, что есть истина, заметим, что в математике достаточно принять, что есть такие исходные и неопределяемые понятия, как «истина» и «ложь», которые могут быть значениями высказываний. Как только математики пытаются предложить другие значения, дополнительные к этим, например, «неизвестность» или «неопределенность», они сразу вынуждены преодолевать философские трудности, возникающие в связи с тем, что степеней неизвестности много, и поэтому сама по себе она не является логическим значением.

Говоря о философской экспликации практической эффективности математики в контексте университетского образования, следует иметь в виду следующее обстоятельство. Как заметил математик С.С. Кутателадзе, «не стоит смешивать очную и заочную формы передачи и сохранения знаний. Надо различать книгу, излагающую предмет, и способ преподавания предмета» [1, с. 62]. Специфика математического знания проявляется в том, что математические идеи оказывают влияние не только на человеческое мышление в целом, но и на его практическое применение. Феномен неразрывной связи теоретической математики и реального физического опыта известный физик-теоретик лауреат Нобелевской премии Евгений Вигнер образно назвал «необоснованной эффективностью математики в естественных науках». Как интерпретировать это явление в контексте философско-методологической проблемы обоснования современной математики?

Одно из наиболее популярных объяснений состоит в том, что основные математические понятия, например, понятие натурального ряда чисел, изначально имеют эмпирический характер. Если допустить, что математические понятия имеют эмпирическую природу, то тогда загадка эффективности математики уже не покажется столь загадочной и непостижимой, поскольку реальные применения математики – это один из способов контакта мира идей, или мира математики, с миром опыта. Математики, как бы парадоксально это ни звучало, ради «чистоты» математического результата сознательно ограничивали себя, образно говоря, миром математических понятий, точнее, специальным миром определенных математических моделей. Исследование таких моделей, абстрагированных от их отражающих аспектов, становилось для них самоцелью.

Тем не менее, хотя математика весьма эффективна, ее выводы нуждаются в перепроверке, поскольку для разных целей требуются разные приближения. Кроме того, «невероятная эффективность современной математики» состоит еще в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Практическое применение математической теории, как правило, шире, чем решение той практической задачи, с которой эта теория первоначально была связана. Например, феномен поразительной эффективности приложений современной алгебры в решении прикладных задач связан с проблемой защиты информации. Что касается «мира абстрактной математики», то он, как и прежде, редко открыт для непосредственного восприятия, поэтому его нельзя отождествить с «миром математических идей».

Если предположить, что в интуитивных математических понятиях скрыты какие-то аспекты, которые могут не проявляться довольно долго в реальной математической практике, то это по существу все тот же математический платонизм, рассматривающий мир математических объектов как независимый от рассуждений математиков. Говоря о непостижимой эффективности математики, Е. Вигнер имел в виду конкретные примеры, прежде всего, свою фундаментальную работу «Теория групп и ее применение к квантово-механической теории атомных спектров» (1931), переведенную на русский язык в 1961 году. В частности, говоря о невероятной эффективности математики следует иметь в виду, что, например, полное доказательство классификации простых конечных групп, полученное в начале 80-х годов XX столетия, занимает примерно 10–15 тысяч журнальных страниц.

Эта работа была проделана объединенными усилиями более ста математиков и опубликована на страницах различных научных журналов примерно в 500 статьях. Полнота философского исследования нам видится не в полноте и математической завершенности доказательства, а прежде всего в последовательности и убедительности изложения философско-методологических аргументов. Спрашивается, откуда берется уверенность в надежности математических конструкций у профессиональных математиков? Фактически психологией работающих математиков, отвлекающихся от «отражающего аспекта модели» и умеющих погружаться в математический мир разрабатываемых теорий, является платонизм. Психология человека такова, что придуманные им структуры он считает атрибутами самого мира, что является источником многих конфликтов нашего времени. В генезисе математических структур важно понять активную роль субъекта.

Рассматривая математические структуры как продукты мысли, математику можно исследовать и в контексте активности по созданию таких структур, опирающихся на глубинные структуры психики. Даже чувственный образ множества возник в математике благодаря нашей способности мыслить совокупность как единое целое. Математические структуры обладают той уникальной и отличительной способностью, что, будучи однажды сформулированными, они могут логически развиваться без дальнейшего обращения к действительному миру. Но для того, чтобы эта работа была плодотворной, по мнению такого профессионала, как французский математик Анри Лебег, «нужна редкая способность не только проникать в чужую мысль, но также придумывать и распознавать различные способы обращения с проблемой; короче нужны качества философа» [2, с. 10]. Отметим, что сам Лебег считал, что математика – это «внутренняя наука», рождающаяся и развивающаяся от «столкновения ума с умом», а вне человечества ее вообще не существует. В качестве учебного иллюстративного примера можно, например, рассмотреть формирование понятия интеграла Лебега, которое не было связано с целью изучения материальной действительности, а происходило по внутренним, чисто математическим причинам.

Заметим, что математическое совершенство – это, строго говоря, не всеобщее свойство, но в математическом сообществе о нем может быть достигнуто согласие. По существу, правила действий с элементами группы, соответствующим образом обобщенные, заимствованы из арифметики. Согласно одному неформальному определению, группа – это некоторое множество с определенной операцией, удовлетворяющей «легко забываемым аксиомам». Такое определение вызывает вполне естественный протест: зачем здравомыслящему человеку такая непонятная операция? Гораздо более мотивированным является подход, при котором начинают не с группы, а с понятия преобразования взаимно-однозначного отображения множества в себя, как это в действительности было сделано исторически. После этого набор преобразований какого-либо множества можно назвать группой, если вместе с любыми двумя преобразованиями он содержит результат их последовательного применения, а также вместе с каждым преобразованием содержит и его обратное преобразование.

Отличительной чертой математики является так же то, что все ее предложения относятся к бесконечному множеству объектов, а точнее к классам, содержащим бесконечное множество объектов. История математики наглядно показывает, что в результате развития математических теорий самоорганизуется практический и эффективный механизм очистки математических доказательств от некорректных утверждений, обусловленный системным подходом к ее обосновательным процедурам и практической направленностью на решение естественнонаучных задач. По своему смыслу самоорганизация – это процесс, в котором нечто происходит само собой, без видимых причин и внешнего вмешательства. В сложных самоорганизующихся системах, к которым относится современная математика, появляется новое понимание обоснования как процесса взаимодействия различных направлений философии математики. Несмотря на аналогию с процедурой освобождения опытных теорий от ложных гипотез, принципиальное отличие от формирования математических теорий состоит в том, что очистка эмпирических теорий от некорректных допущений в принципе не может быть закончена.

В философско-методологическом анализе обоснования можно исходить из общепризнанного факта особой достоверности математического знания и неправомерности отождествления математики с опытными науками. В таком контексте системное обоснование математических теорий, безусловно, более общезначимо, чем логическое, поскольку все программы логического обоснования математики базируются на некоторых видах редукции. Системный подход, по мнению методолога науки Ю.В. Сачкова, дает новый взгляд на проблему целостности программы обоснования математики: «Если ранее целостные представления об объектах исследования складывались исключительно на основе их внешних взаимодействий, на основе того, как они проявляют себя во внешних взаимодействиях, то системный подход дополняет изучение целостности анализом их внутренней дифференциации» [3, с. 48]. Используя при этом дополнительные внутренние связи и целостные свойства самой системы, получают ее определенное философское обоснование.

С точки зрения релевантности такого методологического решения, следует заметить, что обоснование математики в целом – это прежде всего его согласование с основаниями. Даже со становящейся аксиоматикой, которая устанавливает относительное методическое единство математических утверждений и позволяет сделать всю систему аксиом целостной и логически законченной в рамках определенных математических теорий. В столь сложном системном процессе, как становление математической теории, работают различные виды оснований. Среди них можно выделить внутренние, точнее, внутриматематические основания, позволяющие определить, как функционирует формальная теория в целостной системе математики, и внешние, то есть внематематические основания, отвечающие за работу новой теории в системе науки в целом, например, в качестве математического аппарата физической теории. Поэтому выявление интересующих философов математики философско-методологических проблем обоснования через эвристический потенциал современного математического знания может привести к глубокому проникновению в сущность этих проблем.

Можно к этому добавить, что давать аргументированные оценки эффективности – это привилегия выдающихся математиков и экспертов, но эксперты тоже, как известно, могут ошибаться. С точки зрения программы интуиционизма (одного из философско-математических направлений в обосновании математики, основателем которого был голландский математик Лейтзен Л. Брауэр) математическое доказательство должно вместе с обоснованием давать соответствующее конструктивное построение. Поэтому методы, дающие такое построение, Брауэр и его последователи называли эффективными. Он считал, что математическое построение – это некая сущность достаточно высокого уровня, поэтому для его обоснования недостаточно одних ссылок на практику, поскольку иногда приходится рассуждать одновременно на нескольких уровнях обоснования. Именно такой методический прием был применен при создании нестандартного анализа.

Философско-математический анализ проблемы обоснования способствует развитию интегрального процесса на основе системного мировоззренческого синтеза, поскольку математика дает возможность некоторого приближения к совершенным идеям. Возможно, именно в этом причина невероятной эффективности современной математики в приложениях к тем наукам, которые поддаются формализации. Хотя математика весьма эффективна, ее выводы нуждаются в перепроверке, поскольку для разных целей требуются разные приближения. Кроме того, неподдающаяся обоснованию эффективность математики состоит еще в том, что математические теории имеют более широкое смысловое содержание, чем это изначально закладывается в их аксиоматику. Практическое применение математической теории, как правило, шире, чем решение той практической задачи, с которой эта теория первоначально была связана.

Справедливости ради следует заметить, что сами математики всегда надеются, что их исследования могут принести определенную пользу, если не в смежных науках, то хотя бы в самой математике. Однако способность математиков предвидеть, какие именно математические средства могут понадобиться для развития физических теорий, совершенно фантастична. Именно об этом говорит в своем знаменитом эссе сам Е. Вигнер. «С одной стороны, – пишет он, – невероятная эффективность математики в естественных науках есть нечто граничащее с мистикой, ибо никакого рационального объяснения этому факту нет. С другой стороны, именно эта непостижимая эффективность математики в естественных науках выдвигает вопрос о единственности физических теорий» [4, с. 536]. Высказывания в таком духе свидетельствуют о живучести платонистского взгляда на математику, особенно среди тех, для кого не столь уж значимы собственные методологические проблемы преподавания современной математики.

Тем не менее то, что подразумевается, по выражению Е. Вигнера, под загадочной эффективностью математики в естественных науках, для профессиональных физиков достаточно очевидно, поскольку, моделируя мир в терминах математических структур, они ощущают и наблюдают определенный резонанс между этими структурами и структурой мира. Одно из величайших чудес научного метода состоит в том, что чисто формальные математические структуры могут соответствовать структуре реального мира. Но остается философский вопрос: почему такая стратегия познания «необъяснима»? Речь идет о том, что теоретические структуры, сформулированные на языке математики, возвращают нам больше информации, чем мы вложили в них. Как сказал кто-то из физиков, «уравнения мудрее тех, кто их изобрел», то есть новая информация не только извлекается из математических уравнений, но, что более удивительно, довольно часто замечательно соответствует тому, что собственно и наблюдают исследователи.

Если мы выходим на метауровень за пределы наших математических конструкций, то мы тем самым уже вносим элемент иррациональности. Поэтому, является ли эффективность математики «непостижимой», как писал об этом Е. Вигнер, или «постижимой», хотя он не дал никакого объяснения и ограничился лишь констатацией, не столь сейчас для нас важно, поскольку содержательное обсуждение этого вопроса может вестись только математиками-профессионалами высокого класса. Различные философские объяснения носят порой характер апологий, из-за того что их авторы скорее всего сами пребывают в неведении относительно причин невероятной эффективности математики. Переплетение теории и практики, конечно, сообщает математическому поиску определенную самодостаточность, в пределе уподобляя ее порочному кругу, хотя совокупный научный опыт говорит о его принципиальной преодолимости, но, с другой стороны, универсальность математики, а также ее широкая применимость невозможна без предельного восхождения к абстрактному знанию.

Фундаментальной ошибкой относительно природы математики является представление о том, что математическое знание более определено, чем какая-либо другая форма знания. Такая ошибка не оставляет другого выбора в теории доказательств, кроме как считать ее частью математики. Любая серьезная теория требует глубоких возражений, поскольку взаимосвязь научного знания гораздо сильнее, чем можно вообразить, наблюдая современную математическую науку, разделенную, казалось бы, на почти невзаимодействующие области знания. Мы опять возвращаемся к вопросу: что есть математика? Такой вопрос возникает чаще всего при контакте с философами, когда математики начинают философски осознавать не только специфические свойства своей науки, но и ее методологические границы. Если нет убедительного ответа на поставленный вопрос, то тогда утверждение, что фиксированная система аксиом не в состоянии представить богатство математики полностью, становится просто некорректной.

Самое непостижимое в окружающем мире – это то, что он постижим на математическом языке. Если гипотетически рассматривать математические конструкции как произвольные творения человеческого ума, то тогда вопрос о причинах непостижимой эффективности математики нельзя строго и разумно сформулировать. Важнейшую причину такой эффективности математики философ В.Я. Перминов видит в том, что «абстрактные структуры математики обладают способностью к содержательно различным воплощениям, что никоим образом не может быть объяснено из особенностей генезиса» [5, с. 109]. Возможно, поэтому в современной математике наиболее распространен позитивистский подход, состоящий в рассмотрении математических теорий как некоторых формальных конструкций, и поэтому вопросы о мировоззренческом статусе используемых математиками понятий и методов можно считать ненаучными. К подобным подходам можно отнести прежде всего аксиоматический метод, методологически развитый в теории доказательств выдающимся немецким математиком Давидом Гильбертом.

Хотя за пределами физики математизация знания является фрагментарной, она завоевывает все новые области, демонстрируя свою эффективность. Эффективность математического анализа явлений связана с тем, что окружающему нас миру присуща скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых и эффективных математических законах. Это проявляется в эффективной организации теоретического исследования, в которой возможно целостное видение объекта исследования. Поэтому всем, кто занимается науками об обществе, необходимы хотя бы элементарные познания в области современной математики, поскольку даже если человеческие знания не являются единым целым, то они не являются и разобщенным множеством наук. Математизация социально-гуманитарного знания состоит не только и не столько в том, чтобы использовать готовые математические методы и результаты, а в том, чтобы начать поиски того специального математического аппарата, который позволил бы наиболее полно описывать интересующий нас круг социально-гуманитарных явлений.

Заключение

В заключение отметим, что не необозримое количество конкретных математических результатов, а математические методы лучше всего учат нас выявлению тайны эффективности научного метода. Один из основных выводов современной философии математики состоит в том, что истинность теоремы, точнее, истинность доказательства – это лишь часть знания, содержащегося в доказательстве, и, хотя эту часть проще всего изложить словами, ее невозможно выразить в терминах истинности. Несмотря на все аргументы, проблема «невероятной эффективности» математики остается пока загадкой. Как и методическая проблема недостаточной эффективности общего математического образования, несмотря на все усилия методологов математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутателадзе, С.С. Апология Евклида / С.С. Кутателадзе // Владикавказский мат. журн. – 2006. – Т. 8. Вып. 2. – С. 61–63.
2. Лебег, А. Предисловие к книге Н.Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их приложениях» / А. Лебег // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40. – Вып. 3. – С. 9–14.
3. Сачков, Ю.В. Научный метод: вопросы и развитие / Ю.В. Сачков. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 160 с.
4. Вигнер, Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках / Е. Вигнер // Успехи физ. наук. – 1968. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 535–546.
5. Перминов, В.Я. Закономерности развития математики / В.Я. Перминов // Философия математики и технических наук. – М. : Прогресс-Традиция, 2006. – С. 70–115.

Michailova N.V. **«The Incomprehensible Efficiency» as the Practical Composition of the Philosophy-methodological Basing of Mathematics**

The article is devoted to the philosophical and methodological analysis of practical effectiveness of contemporary mathematics. Philosophers of sciences are united in the fact that the incomprehensible efficiency can not be explained without clarification on the genetic level of the practical usefulness of mathematical theories.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.03.2011