УДК 536+537.6

В. С. СЕКЕРЖИЦКИЙ, А. И. СЕРЫЙ

О ЧАСТИЧНО ПОЛЯРИЗОВАННОМ ИДЕАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электронный газ в квантующем магнитном поле является объектом исследования многих астрофизических задач. При этом во многих случаях используется его модель, в которой он считается идеальным, вырожденным и поляризованным по спину.

В [1, с. 19] была получена система уравнений, связывающих степень спиновой поляризации p_{0e} и химический потенциал $\zeta_e(B)$ идеального вырожденного электронного газа с концентрацией n_e в магнитном поле с индукцией B (где m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора):

$$n_e(1+p_{0e})=\frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{k}\sqrt{\zeta_e(B)-\mu_B B\cdot 2j}\,, \qquad (1)$$

$$n_e(1-p_{0e})=\frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\zeta_e(B)-\mu_B B\cdot 2(j+1)}, \qquad (2)$$

где не учитывается аномальный магнитный момент электрона, а суммирование ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не станет отрицательным. При этом попытки исключить величину $\zeta_e(B)$ из (1) и (2) или выразить ее в явном виде (без суммирования по j) не предпринимались. Между тем это можно сделать, вычитая (2) из (1). В результате в правой части остается только одно слагаемое – то, в котором под корнем присутствует только $\zeta_e(B)$:

$$2n_e p_{0e}=\frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{\zeta_e(B)}. \qquad (3)$$

Из (3) легко получить, что

$$\zeta_e(B)=\frac{n_e^2 p_{0e}^2\pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2}\,. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (1), получаем [2, с. 74]:

$$n_e(1+p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{k}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2} - \mu_B B\cdot 2j}\,. \quad (5)$$

Вместе с тем можно подставить (4) еще и в (2), в результате чего получим:

$$n_e(1-p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\sum_{j=0}^{k-1}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2} - \mu_B B\cdot 2(j+1)}\,. \quad (6)$$

Вычитание (6) из (5) уже не дает ничего нового, но вместо вычитания можно выполнить сложение, и тогда получим:

$$2n_e = \frac{(2m_e)^{3/2}\mu_B B}{\pi^2\hbar^3}\left(\frac{n_e p_{0e}\pi^2\hbar^3}{\sqrt{2}m_e^{3/2}\mu_B B} + 2\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\frac{n_e^2 p_{0e}^2 \pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2} - \mu_B B\cdot 2j}\right). \quad (7)$$

Легко убедиться, что если в (5) $k=0$, то $p_{0e}=1$. При $k=1$ из (5), (6) или (7) независимыми способами получается одно и то же квадратное уравнение относительно p_{0e}:

$$3p_{0e}^2 + 2p_{0e} - 1 - \frac{2(2m_e)^3(\mu_B B)^3}{n_e^2\pi^4\hbar^6} = 0\,. \quad (8)$$

В соответствии с исходным смыслом, для уравнения (8) берется только положительный корень (отрицательный корень к тому же превосходит единицу по модулю, что лишено физического смысла):

$$p_{0e} = \frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt{1 + 3\left(1 + 2(2m_e)^3(\mu_B B)^3 / \left(n_e^2\pi^4\hbar^6\right)\right)}\right) = 0\,. \quad (9)$$

С дальнейшим ростом k получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Секержицкий, В. С. О поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. – Брэст : БрДУ, 2020. – Вып. 16, ч. 2. – С. 69–78.