от типа R-катиона. На полученных в инфракрасной области спектральных зависимостях коэффициентов отражения и спектров действительных компонент комплексной диэлектрической проницаемости выражены решеточные резонансы, характеризующие колебательные свойства кристаллических решеток. Результаты анализа оптических свойств образцов показали высокую чувствительность величин резонансных частот решеточных колебаний и их интенсивностей к малым изменениям состава изоструктурных соединений.

Полученные результаты могут быть использованы как при исследованиях структурных и диэлектрических свойств ортоферритов, так и при синтезе новых материалов с заданными физическими свойствами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толстик, А. М. Роль компьютерного эксперимента в физическом образовании / А. М. Толстик // Физ. образование в вузах. – 2002. – Т. 8, № 2. – С. 94–102.

2. Суздалев, И. П. Многофункциональные наноматериалы / И. П. Суздалев // Успехи химии. – 2009. – Т. 78 (3). – С. 266–301.

3. Wu, L. Recent progress in multiferroic materials / L. Wu, Y. Gao, J. Ma // Sci. China Technol. Sci. – 2015. – Vol. 58 (12). – P. 2207–2209.

4. Room-temperature multiferroicity in $CeFeO_3$ ceramics / L. Hou [et al.] // J. All. Comp. – 2019. – Vol. 797. – P. 363–369.

5. A comparative study of ultra-low-temperature thermal conductivity of multiferroic orthoferrites $RFeO_3$ (R = Gd and Dy) / J. Y. Zhao [et al.] // AIP Advances. – 2017. – Vol. 7. – P. 055806-1–055806-7.

6. Kuzmenko, A. B. Kramers – Kronig constrained variational analysis of optical spectra / A. B. Kuzmenko // Rev. Sci. Instrum. – 2005. – Vol. 76. – P. 083108-1–083108-9.

УДК 517.2

С. А. МАРЗАН
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

СОПОСТАВЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО И ДРОБНОГО АНАЛИЗА В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТУДЕНТАМ ФИЗИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Классический анализ предполагает, что интегралы и производные имеют порядки, выражаемые натуральными числами. Между тем поведение целого ряда объектов и процессов, в том числе физических, приводит к необходимости разрабатывать уточненные математические модели с привлечением анализа нецелых порядков. Последний основан на систематическом использовании понятий производных и интегралов, порядки которых не являются натуральными числами, а могут быть дробными, иррациональными или даже комплексными.

Понятия производной и интеграла нецелых порядков, лежащие в основе дробного исчисления, при первом знакомстве с ними вызывают затруднения, которые препятствуют их широкому использованию в прикладных областях исследований и разработок. Хотя история возникновения и развития дробного исчисления насчитывает уже более трех столетий, его основы не изучаются в курсе математического анализа учреждений высшего образования. Между тем переход от классического математического анализа к его обобщению, которым и является дробное исчисление, может быть достаточно просто изложен с помощью приемов, уже известных в математике [1].

Под факториалом натурального числа k понимают произведение натуральных чисел от 1 до k. Ясной алгебраической интерпретации факториала нецелого (дробного) числа не существует. В то же время обобщением понятия факториала на нецелые числа является гамма-функция Эйлера, которая определяется выражением

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt \quad (z > 0).$$

При натуральном k значения $(k-1)!$ и $\Gamma(k)$ связаны равенством $\Gamma(k) = (k-1)!$, используя которое можно обобщить понятие факториала на случай любого нецелого числа z такого, что $z > 0$: $(z-1)! = \Gamma(z)$.

Гамма-функция Эйлера играет фундаментальную роль в дробном математическом анализе. Первоначальное представление об интеграле нецелого порядка можно получить, рассматривая интегральную формулу Коши для многократного интегрирования некоторой функции $\varphi:[a,b] \to R$:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \ldots \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части (1) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому естественно определить интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Пусть $\varphi \in L_1(a,b)$. Интеграл

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,\; x > a,$$

где $\alpha > 0$, называют интегралом Римана – Лиувилля [2] дробного порядка α.

Для функции $f:[a,b] \to R$ выражение

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

называется дробной производной Римана – Лиувилля [2] порядка α, $0 < \alpha < 1$.

Если α – целое число, то под дробной производной порядка α понимают обычное дифференцирование. Если же α не целое, то естественно ввести производные дробного порядка по формуле

$$D_{a+}^{\alpha} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{a+}^{\{\alpha\}} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f.$$

Формулы целочисленного дифференцирования в большинстве своем допускают обобщение на нецелые порядки дифференцирования, а подстановка в формулы дробного дифференцирования вместо дробных порядков натуральных чисел приводит к известным формулам классического математического анализа.

Ряд свойств интегралов и производных, справедливых для классического анализа, остаются справедливыми и для дробных производных и интегралов.

В настоящее время применение дробного исчисления получает широкое распространение в различных областях науки, техники, естествознания, экономики и других отраслях человеческой деятельности, использующих математические методы и средства математического моделирования. В некоторых случаях можно говорить о проникновении дробных интегралов и производных в фундаментальные законы естествознания.

Например, в 1994 г. шведский математик Вестерлунд предложил обобщение второго закона Ньютона и показал, что закон Гука в теории упругости $(F = kx)$, ньютоновская модель вязкой жидкости $(F = kx')$ и второй закон Ньютона $(F = kx'')$ могут рассматриваться как частные случаи более общего соотношения вида $F = kx^{(\alpha)}$, где порядок производной α может быть любым действительным числом.

Не осталась без внимания и теория относительности Эйнштейна и связанный с ней известный «парадокс близнецов». Известному соотношению теории относительности $E = mc^2$ сопоставляется выражение для модели массы, которая является функцией времени: $\frac{d^{-2\alpha}W(t)}{dt^{-2\alpha}} = m(t)\cdot c_0^2$, где $0 < \alpha < 1$. Таким образом, дополнением к уравнениям теории относительности является, по существу, связь массы с дробным интегралом энергии.

Дробное исчисление коснулось и такой, казалось бы далекой от техники области человеческой деятельности, как экономика и финансы [1]. Дробные версии математических моделей финансовых систем демонстрируют динамическое поведение, которое может хорошо отражать фиксированные точки и периодические и хаотические движения, что дает возможность реализации хаотических и периодических решений и позволяет исследователям по-новому решать задачи устойчивости финансовых систем, исследовать влияние памяти процесса и предсказывать кризисоподобные явления и другие процессы, связанные с функционированием экономических систем.

В последние несколько десятилетий доказана полезность дробного исчисления в различных областях науки, таких как классическая и квантовая физика, теория поля, физика твердого тела, динамика жидкости, турбулентность, общая химия, нелинейная биология, стохастический анализ, нелинейная теория управления, обработка изображений.

Сопоставление классического и дробного анализа в преподавании математического анализа студентам физических специальностей повышает мотивацию студентов на получение математических знаний, необходимых при исследовании реальных физических процессов и решении практических задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – Киев : НАН Украины, 2008. – 256 с.

2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.