

тике : материалы Междунар. студен. науч.-практ. интернет-конф., Минск, 22 апр. 2022 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка ; редкол.: С. И. Василец [и др.]. – Минск : БГПУ, 2022. – С. 44–47.

УДК 534.014.2+37.091.321

П. Б. КАЦ, О. А. СЕМЕНЮК

Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

О МЕТОДИКЕ РАССМОТРЕНИЯ ЯВЛЕНИЯ РЕЗОНАНСА ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ

В [1] предложен следующий вывод амплитуды и фазы вынужденных колебаний при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости.

Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t, \quad (1)$$

где $2\beta \equiv r/m$, $\omega_0^2 \equiv k/m$, $f_0 \equiv F_0/m$. Решая (1), получаем:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\Omega t + \gamma), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2)$$

Постоянные b и γ найдем, подставив второе слагаемое (2) в (1) и приравняв коэффициенты при $\cos \Omega t$ и $\sin \Omega t$ в полученном уравнении:

$$b((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \gamma - 2\beta\Omega \sin \gamma) = f_0, \quad b((\Omega^2 - \omega_0^2) \sin \gamma - 2\beta\Omega \cos \gamma) = 0. \quad (3)$$

Отсюда получаем:

$$b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}. \quad (4)$$

Для получения системы (3) требуются достаточно громоздкие вычисления. При последующем выводе амплитуды оба уравнения возводятся в квадрат и складываются.

На наш взгляд, более предпочтителен вывод, приведенный в [2]. Проведем его с использованием обозначений, принятых в [1]. Применим замену гармонических функций комплексными функциями:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\Omega t}, \quad x_2 = B e^{i\Omega t}. \quad (5)$$

Подставляя x_2 в дифференциальное уравнение, находим

$$B = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega}, \quad (6)$$

Чтобы избавиться от комплексного числа в знаменателе, домножаем и числитель, и знаменатель на комплексно-сопряженную величину:

$$B = \frac{f_0(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\beta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = \frac{f_0\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2 + 4\beta^2\Omega^2} e^{i\gamma}}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = \frac{f_0 e^{i\gamma}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

Отсюда получаем (4). Решение с использованием комплексных функций полезно с дидактической точки зрения, так как показывает применение комплексных функций для анализа колебательного движения.

В [3, с. 28] приводится график, изображающий амплитудную резонансную кривую (рисунок). Согласно определению, приведенному в [3], *резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты ω внешней силы... к частоте ω_0 собственных колебаний системы*. Но из рисунка видно, что максимум амплитуды для случая 2 лежит не при ω_0 , а для случая 3 амплитуда вообще непрерывно убывает с ростом частоты вынуждающей силы. При опросе школьных учителей высказывалось предположение о типографском браке.

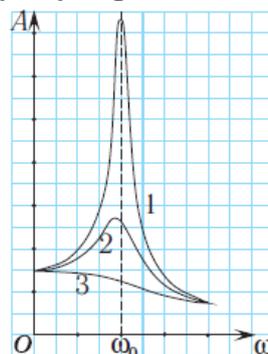


Рисунок 1

Исследовав формулу (4) на экстремум, можно определить, что резонанс наступает при частоте вынуждающей силы

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (7)$$

Таким образом, с ростом коэффициента затухания β резонансная частота уменьшается. Согласно (7) $\Omega_{рез}$ обращается в 0 при $\beta = \omega_0 / \sqrt{2}$. При этом условии максимальное отклонение от положения равновесия будет иметь место при статической силе F_0 . То же самое будет при больших значениях β . На это полезно обратить внимание при изложении темы в вузе, а также в школе при работе с одаренными учащимися.

Авторы выражают признательность А. М. Кузьмич за предоставление конспекта лекций В. С. Секержицкого.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретическая механика [Электронный ресурс] : учеб.-метод. комплекс для специальности 1-31 04 01-03 «Физика (науч.-пед. деятельность)» / сост. В. С. Секержицкий. – Режим доступа: <https://rep.brsu.by/handle/123456789/525?show=full>. – Дата доступа: 12.10.2022.

2. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности : учеб. для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – 3-е изд. – М. : ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. – 432 с. : ил.

3. Жилко, В. В. Физика : учеб. пособие для 11 кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения (с электрон. прил. для повыш. уровня) / В. В. Жилко, Л. Г. Маркович, А. А. Сокольский. – Минск : Нар. асвета, 2021. – 287 с.

П. Б. КАЦ, О. А. СЕМЕНЮК

Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

О НЕКОТОРЫХ НЕТОЧНОСТЯХ В ШКОЛЬНОМ УЧЕБНИКЕ ПО АСТРОНОМИИ

Рассмотрим некоторые неточности и дискуссионные моменты в школьном учебнике по астрономии [1].

С. 54. Дано значение гравитационной постоянной $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$. Несмотря на два столетия экспериментов, значение G остается наименее точно известной из фундаментальных констант.

Рекомендованное Комитетом данных для науки и техники (CODATA) на 2018 г. значение гравитационной постоянной с той же точностью: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ [2].

С. 65. *Элементы орбиты искусственных спутников Земли связаны между собой формулой $v_0^2 = GM\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right)$, где v_0 – начальная скорость спутника, M – масса Земли, r_0 – расстояние точки выхода спутника на орбиту от центра Земли, a – большая полуось орбиты спутника. Формула справедлива для любой точки эллиптической орбиты.*

Последнее предложение трудно понять, так как перед ним указано, что v_0 и r_0 относятся к конкретной точке выхода на орбиту. На самом деле в указанной формуле нет необходимости ставить индекс 0, так как действительно она связывает расстояние от центра Земли и скорость в любой точке орбиты. Действительно, согласно [3, с. 53] полная энергия спутника