

УДК 535.3+537.6

Алексей Игоревич Серый*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Alexey Sery***¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: alexey_sery@mail.ru*

ОБ УСЛОВИИ БЕТА-РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННО-НУКЛОННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ ВБЛИЗИ ПОРОГА НЕЙТРОНИЗАЦИИ

Исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов, протонов и нейтронов, соответствующих бета-равновесию вблизи порога нейтронизации. Исследование выполнено в приближении идеальности электронного и нуклонных газов, а также в приближении температур, которые являются низкими для протонов и электронов (поскольку отличная от нуля тепловая энергия намного меньше энергии Ферми) и высокими – для нейтронов (поскольку отличная от нуля тепловая энергия намного больше энергии Ферми, которая мала при низких концентрациях вблизи порога нейтронизации). Для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами всех компонентов использованы известные соотношения. Показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, увеличивается.

Ключевые слова: электронно-нуклонное вещество, бета-равновесие, порог нейтронизации, низкие температуры.

On the Condition of Beta Equilibrium of the Electron-Nucleon Substances at Low Temperatures Near the Neutronization Threshold

The effect of the temperature of an electron-neutral electron-nucleon substance on the concentrations of electrons, protons and neutrons corresponding to beta equilibrium near the neutronization threshold is investigated. The study was carried out in the approximation of the ideality of electron and nucleon gases, as well as in the approximation of temperatures that are low for protons and electrons (since the nonzero thermal energy is much less than the Fermi energy) and high for neutrons (since the nonzero thermal energy is much greater than the Fermi energy, which is small at low concentrations near the neutronization threshold). Known relations are used for the relationships between temperature, concentrations and chemical potentials of all components. It is shown that at the same value of the concentration of electrons and protons with increasing temperature, the value of the neutron concentration corresponding to beta equilibrium increases.

Key words: electron-nucleon matter, beta equilibrium, neutronization threshold, low temperatures.

Введение

Расчет условий бета-равновесия электронно-нуклонного вещества представляет интерес для различных астрофизических приложений. Ранее подобные задачи рассматривались в приближении абсолютного нуля температуры и в пределе высоких температур, в т. ч. при наличии интенсивного магнитного поля [1, с. 88–92, 167–168], а также с учетом и без учета энергии взаимодействия между частицами и спиновой поляризации нуклонов [2, с. 549–555; 3, с. 30–37; 4, с. 30–43].

Для низких, отличных от нуля температур в [5, с. 52–61] (одна из последних статей, написанных с участием В. С. Секержицкого), были решены задачи о нахождении условий порога нейтронизации электронно-протонного вещества и бета-равновесия электронно-нуклонного вещества. Было дано объяснение причин, по которым ранее такие задачи не рассматривались, проанализированы недостатки методов приближенных

вычислений, разработанных для нерелятивистских идеальных газов при низких отличных от нуля температур [6, с. 201–202; 7, с. 596–597], а также аналогичными методами получена формула для химического потенциала релятивистского электронного газа. При этом в обеих задачах электронный и нуклонные газы считались идеальными, а в задаче о бета-равновесии рассматривались концентрации нейтронов n_n , заметно далекие от порога нейтронизации. Малые концентрации нейтронов (вблизи порога нейтронизации) не рассматривались по той причине, что процедура получения приближенных формул для вычисления термодинамических характеристик нерелятивистских ферми-газов при низких, отличных от нуля температур напрямую учитывает факт малости тепловой энергии kT (k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура) по сравнению с химическим потенциалом μ , отсчитываемым от энергии покоя соответствующих частиц mc^2 (m – масса частицы, c – скорость света в вакууме). В связи с этим для нерелятивистского ферми-газа малой концентрации (когда то же самое значение тепловой энергии kT не мало по сравнению с химическим потенциалом μ) применение таких соотношений некорректно. Таким образом, одна и та же температура, будучи низкой для электронов и протонов, будет высокой для нейтронов вблизи порога нейтронизации, т. е. должны одновременно выполняться соотношения (с учетом того, что для релятивистских электронов химический потенциал μ_e включает энергию покоя $m_e c^2$, где m_e – масса электрона [5, с. 55, 56])

$$\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} \gg kT, \mu_p \gg kT, \mu_{0n} \ll kT \quad (1)$$

При этом в (1) μ_p – химический потенциал протонного газа при отличной от нуля температуре, а μ_{0n} – химический потенциал нейтронного газа при температуре абсолютного нуля. В силу малости рассматриваемых значений температуры величины μ_e и μ_p в (1) могут быть заменены, соответственно, на μ_{0e} и μ_{0p} (химические потенциалы, соответственно, электронного и протонного газов при абсолютном нуле температуры). В результате вместо (1) можно записать

$$\sqrt{\mu_{0e}^2 - m_e^2 c^4} \gg kT, \mu_{0p} \gg kT, \mu_{0n} \ll kT \quad (2)$$

Выражения для химических потенциалов электронов и нуклонов

Будем учитывать соотношения [1, с. 25, 45]

$$\mu_{0e} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 c^2 n_e^{2/3}}, \quad (3)$$

$$\mu_{0p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p}, \quad (4)$$

$$\mu_{0n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n}, \quad (5)$$

где \hbar – постоянная Планка, m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, n_n – концентрация нейтронов, n_e – концентрация электронов, которая в случае электронейтрального вещества (рассматриваемого в данной работе) равна концентрации протонов n_p , т. е.

$$n_e = n_p. \quad (6)$$

В связи с изложенным выше для химического потенциала нейтронов μ_n при различных от нуля температурах следует применять другие известные соотношения, поэтому данный случай требует отдельного рассмотрения.

Величина μ_p , в силу того что температура T для протонного газа считается низкой, выражается по формуле [7, с. 281]

$$\mu_p \approx \mu_{0p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0p}} \right)^2 \right). \quad (7)$$

Величина μ_e находится из уравнения [5, с. 56]

$$n_e \approx \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \left(\frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{2\mu_e^2 - m_e^2 c^4}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (8)$$

Химический потенциал нейтронного газа в случае (2) находится по формуле [1, с. 52]

$$\mu_n \approx -kT \ln \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{kT}{\mu_{0n}} \right)^{3/2} \right) = -kT \ln \left(\frac{1}{4n_n} \left(\frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right). \quad (9)$$

Уравнение бета-равновесия электронно-нуклонного вещества вблизи порога нейтронизации

Уравнение бета-равновесия в общем случае выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = \mu_n + m_n c^2. \quad (10)$$

Для удобства дальнейших исследований введем вспомогательные функции

$$N_n(n_n, T) = m_n c^2 - kT \ln \left(\frac{1}{4n_n} \left(\frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right), \quad (11)$$

$$N_p(n_p, T) = m_p c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Переходя к условию (2), выражаем μ_e из (10) с учетом (4), (7), (9), (11), (12), и, подставляя в (8), можно после некоторых преобразований получить (учитывая также (6)) уравнение бета-равновесия в виде

$$3n_p \pi^2 (\hbar c)^3 \sqrt{(N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4} - ((N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4)^2 - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 (2(N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4) \approx 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно решать численно относительно n_n при заданных значениях T (в соответствии с ограничениями (2)) при значениях n_p выше порога нейтронизации [5, с. 57].

Численные результаты исследования уравнения (13) представлены в таблицах 1 и 2, а также на рисунках 1–5, где для удобства введены вспомогательные величины $n_{01} = 1 \text{ см}^{-3}$ и $n_{02} = 10^{30} \text{ см}^{-3}$.

Таблица 1. – Значения концентраций протонов, соответствующих бета-равновесию при различных фиксированных значениях концентраций нейтронов для двух значений температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, а также разность таких значений концентраций протонов

$T, 10^5 \text{ К}$	1,00		9,00		$\Delta n_p = n_{p(9)} - n_{p(1)}, 10^{28} \text{ см}^{-3}$
	$n_{p(1)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	kT/μ_{0p}	$n_{p(9)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	kT/μ_{0p}	
1,00	7,34461	0,01148	7,24997	0,1042	9,464
$1,00 \cdot 10^9$	7,34821	0,01148	7,28220	0,1039	6,601
$1,00 \cdot 10^{16}$	7,35102	0,01148	7,30733	0,1037	4,369
$1,00 \cdot 10^{21}$	7,35302	0,01147	7,32532	0,1035	2,771
$1,00 \cdot 10^{25}$	7,35463	0,01147	7,33972	0,1034	1,490
$2,00 \cdot 10^{25}$	7,35475	0,01147	7,34081	0,1034	1,394
$3,00 \cdot 10^{25}$	7,35482	0,01147	7,34144	0,1034	1,338
$4,00 \cdot 10^{25}$	7,35487	0,01147	7,34189	0,1034	1,298
$5,00 \cdot 10^{25}$	7,35491	0,01147	7,34224	0,1034	1,266
$6,00 \cdot 10^{25}$	7,35494	0,01147	7,34253	0,1034	1,241
$7,00 \cdot 10^{25}$	7,35497	0,01147	7,34277	0,1034	1,220
$8,00 \cdot 10^{25}$	7,35499	0,01147	7,34298	0,1034	1,201
$9,00 \cdot 10^{25}$	7,35501	0,01147	7,34316	0,1034	1,185
$1,00 \cdot 10^{26}$	7,35503	0,01147	7,34333	0,1034	1,170
$1,10 \cdot 10^{26}$	7,35504	0,01147	7,34348	0,1034	1,157
$1,20 \cdot 10^{26}$	7,35506	0,01147	7,34361	0,1034	1,145

Разность Δn_p значений концентраций протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$, соответствующих бета-равновесию при заданных (в логарифмическом масштабе) значениях концентраций нейтронов для температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, отображена на рисунке 1.

Отношение значений (в логарифмическом масштабе) концентраций протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$ при тех же условиях отображена на рисунке 2.

По отдельности значения концентраций (в логарифмическом масштабе) протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$, соответствующих бета-равновесию при заданных (в логарифмическом масштабе) значениях концентраций нейтронов для температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, отображена на рисунке 3.

Разность значений бета-равновесных концентраций протонов, соответствующих фиксированным значениям концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ при различных температурах, представлена на рисунке 4.

Зависимость тех же концентраций протонов n_p от температуры тех же значениях концентрации нейтронов представлена на рисунке 5.

Данные таблицы 3 иллюстрируют выполнение условий (1) и (3) для нейтронов.

Таблица 2. – Значения концентраций протонов, соответствующих бета-равновесию при двух фиксированных значениях концентраций нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ для различных значений температур, а также разность таких значений концентраций протонов

$T, 10^5 \text{ К}$	$n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$	$\Delta n_p = n_p^{(26)} - n_p^{(25)},$ 10^{25} см^{-3}
	$n_p^{(25)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	$n_p^{(26)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	
1,00	7,354627	7,355027	4,01
2,00	7,353034	7,353836	8,02
3,00	7,351309	7,352512	12,02
4,00	7,349499	7,351102	16,03
5,00	7,347626	7,349630	20,045
6,00	7,345705	7,348108	24,04
7,00	7,343743	7,346547	28,04
8,00	7,341747	7,344952	32,04
9,00	7,339723	7,343327	36,04

Таблица 3. – Отношение тепловой энергии к химическому потенциалу нейтронов, вычисленному для абсолютного нуля температуры, для различных заданных значениях концентраций нейтронов при двух фиксированных значениях температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$

$T, 10^5 \text{ К}$	1,00	9,00
$n_n, \text{ см}^{-3}$	kT/μ_{0n}	kT/μ_{0n}
1,00	$4,345 \cdot 10^{18}$	$3,910 \cdot 10^{19}$
$1,00 \cdot 10^9$	$4,345 \cdot 10^{12}$	$3,910 \cdot 10^{13}$
$1,00 \cdot 10^{16}$	$9,361 \cdot 10^7$	$8,425 \cdot 10^8$
$1,00 \cdot 10^{21}$	$4,345 \cdot 10^4$	$3,910 \cdot 10^5$
$1,00 \cdot 10^{25}$	93,61	842,5
$2,00 \cdot 10^{25}$	58,97	530,7
$3,00 \cdot 10^{25}$	45,00	405,0
$4,00 \cdot 10^{25}$	37,15	334,3
$5,00 \cdot 10^{25}$	32,01	288,1
$6,00 \cdot 10^{25}$	28,35	255,2
$7,00 \cdot 10^{25}$	25,58	230,2
$8,00 \cdot 10^{25}$	23,40	210,6
$9,00 \cdot 10^{25}$	21,64	194,7
$1,00 \cdot 10^{26}$	20,17	181,5
$1,10 \cdot 10^{26}$	18,93	170,3

Отметим, что приведенные в таблицах 1 и 2 значения концентрации протонов уступают значению $n_{0p} = 7,35586 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, которое соответствует порогу нейтронизации при $T = 0 \text{ К}$ [5, с. 57], причем, в отличие от выводов, сделанных в [5, с. 58], чем выше температура и ниже концентрация нейтронов, тем ниже соответствующая бета-равновесная концентрация протонов (которая, однако, понижается гораздо медленнее по сравнению с понижением концентрации нейтронов). Это объясняется тем, что при отличной от нуля температуре появляются свободные состояния с энергией ниже уровня Ферми, а с понижением концентрации влияние принципа Паули ослабевает.

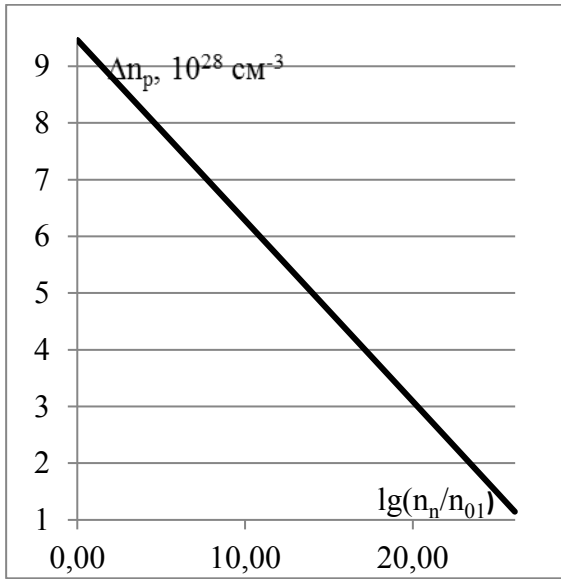


Рисунок 1. – Зависимость разности значений n_p , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К, согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

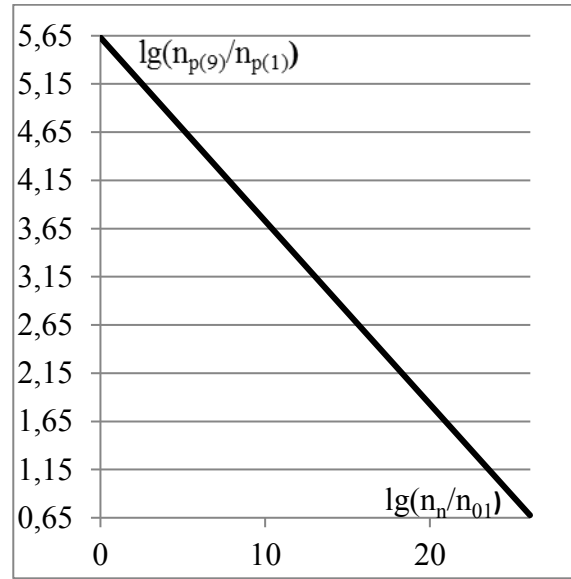


Рисунок 2. – Зависимость отношения бета-равновесных значений n_p (в логарифмическом масштабе) при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К, согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

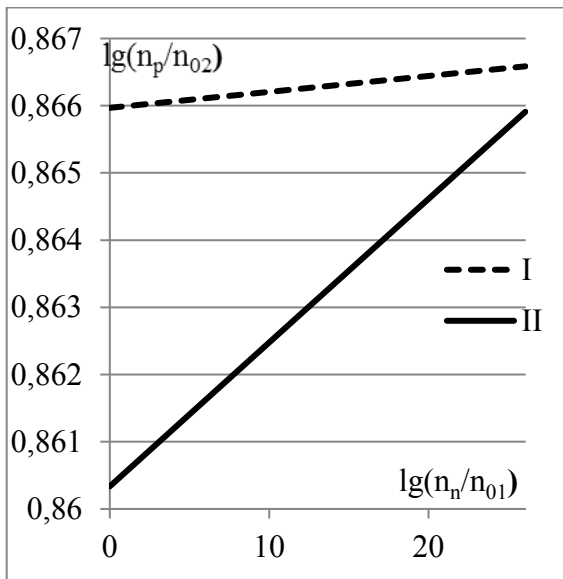


Рисунок 3. – Зависимость (в логарифмическом масштабе) значений n_p , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К (I) и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К (II), согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

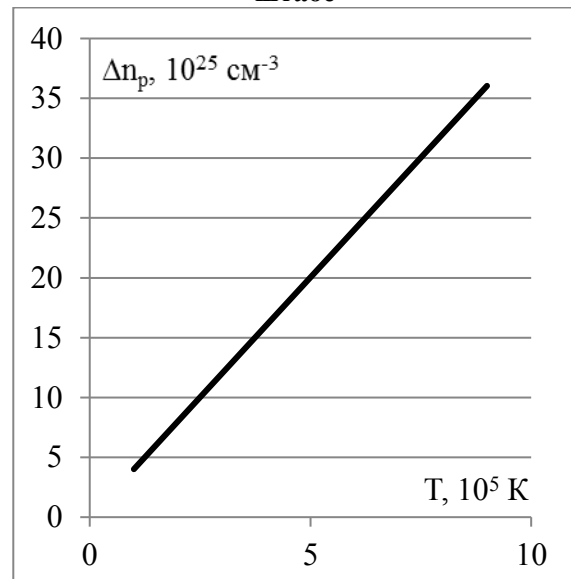


Рисунок 4. – Разность значений бета-равновесных концентраций протонов n_p , соответствующих фиксированным значениям концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ при различных температурах

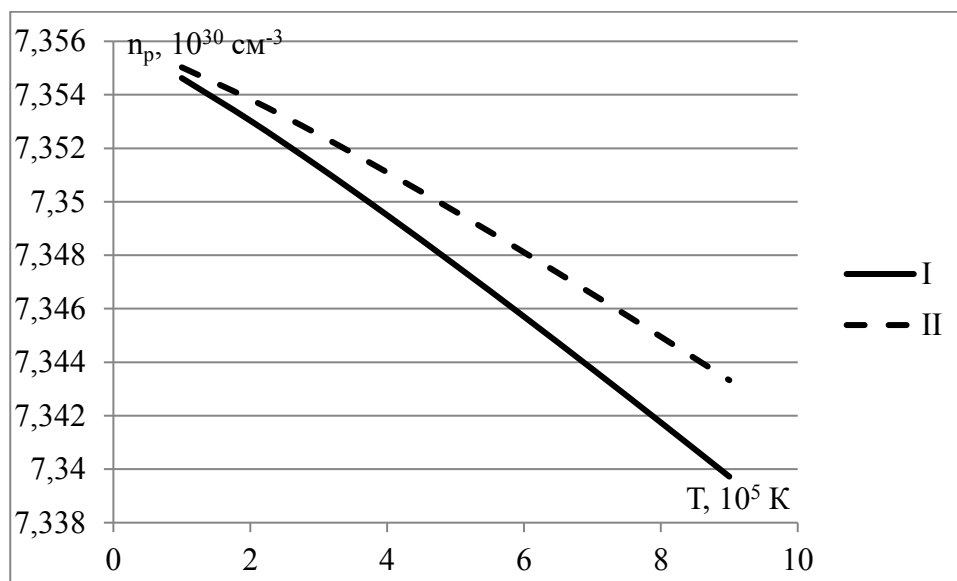


Рисунок 5. – Зависимость бета-равновесных концентраций протонов n_p от температуры при фиксированных значениях концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ (I) и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ (II)

Графики на рисунках 1–4 внешне напоминают отрезки прямых, но более детальный анализ полученных численных данных (в т. ч. отображенных в таблицах 1 и 2) показывает, что это не совсем так, поскольку при одинаковой разности между значениями соседних ячеек в крайних левых столбцах таблицы 1 (значения $n_n \sim 10^{25} \text{ см}^{-3}$) и таблицы 2 (значения температуры) разность между значениями соответствующих соседних ячеек других столбцов этих таблиц (имеющими отношение к $n_e = n_p$), строго говоря, не одна и та же.

Кроме того, полученные результаты позволяют сделать следующие выводы (везде подразумевается выполнение условий (2) при бета-равновесии).

1. При заданном значении температуры большему значению n_n соответствует большее значение $n_e = n_p$; при этом относительный рост n_n происходит гораздо быстрее (на много порядков) относительного роста $n_e = n_p$, поскольку по абсолютной величине $n_e = n_p$ в исследуемом диапазоне значений значительно превосходит n_n (что закономерно вблизи порога нейтронизации). 2. При заданном значении n_n большему значению температуры соответствует меньшее значение $n_e = n_p$; наоборот, при заданном значении $n_e = n_p$ большему значению температуры соответствует большее значение n_n . 3. Рост значения $n_e = n_p$ с ростом n_n при заданном значении температуры происходит тем быстрее, чем выше температура; наоборот, рост значения n_n с ростом $n_e = n_p$ при заданном значении температуры происходит тем быстрее, чем ниже температура. 4. Для двух фиксированных значений температуры (в нашем случае это $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ K}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ K}$) большему значению n_n соответствует меньшая разность между значениями концентрации $n_e = n_p$, соответствующими бета-равновесию при указанных температурах; из этого следует и уменьшение отношения указанных двух значений концентрации $n_e = n_p$, а также логарифма этого отношения.

Заклучение. Основные результаты

В приближении низких, отличных от нуля температур и идеальности ферми-газов исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значения концентраций нуклонов и электронов, соответствующих бета-равновесию вблизи порога нейтронизации. При этом электронный и протонный газы считались вырожденными, нейтронный – невырожденным. Показано, что при заданном значении температуры большему значению концентрации протонов и электронов соответствует большее значение концентрации нейтронов, причем относительный рост концентрации нейтронов происходит гораздо быстрее (на много порядков) относительного роста концентрации протонов и электронов, поскольку по абсолютной величине концентрация протонов и электронов в исследуемом диапазоне значений значительно превосходит концентрацию нейтронов. Также показано, что при заданном значении концентрации протонов и электронов большему значению температуры соответствует большее значение концентрации нейтронов.

Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования сверхплотных астрофизических объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
4. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
5. Секержицкий, В. С. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 52–61.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 5 : Статистическая физика : в 2 ч. – Ч. I. – 616 с.
7. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.

REFERENCES

1. Siekierzickij, V. S. Ravnoviesnyje sistiemy fermionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzickij ; Briest. gos. un-t. im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Sieryj, A. I. O ferromagnietizmie vyrozhdiennoj nejtronno-protonnoj sistiemy / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – № 1. – S. 30–37.

-
4. Sieryj, A. I. O niekotorykh poliarizacionnykh effiektakh v astrofizichieskoj plazmie / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.
 5. Siekierzhickij, V. S. O beta-ravnoviesii eliektronno-nuklonnogo vieshchiestva pri nizkikh tiempieraturakh / V. S. Siekierzhickij, A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 52–61.
 6. Landau, L. D. Teorietichieskaja fizika : uchieb. posobije dlia vuzov : v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. –M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika : v 2 ch. – Ch. I. – 616 s.
 7. Rumer, Yu. B. Tiermodinamika, statistichieskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije. / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – 2-je izd., ispr. i dop. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.01.2022