

УДК 535.3+537.6

А. И. Серый

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: alexey_sery@mail.ru

**ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЙЯНИЯ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ
ПОЛЯРИЗАЦИИ ФОТОНОВ**

Получено приближенное решение задачи о величине вращения плоскости поляризации фотонов в полностью поляризованном по спину электронном газе в квантующем магнитном поле. Рассмотрен второй порядок теории возмущений по электромагнитной константе связи с использованием модифицированного дисперсионного соотношения Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга и оптической теоремы. Использована приближенная формула, полученная Фоминым и Холодовым для резонансного сечения эффекта Комптона. Для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются гораздо заметнее, чем в первом порядке теории возмущений.

SERY A. I.**THE INFLUENCE OF RESONANCE COMPTON SCATTERING IN MAGNETIC FIELD
ON THE ROTATION OF THE PLANE OF POLARIZATION OF PHOTONS**

The approximate solution of the problem of the value of rotation of photon polarization plane in totally spin-polarized electron gas in quantizing magnetic field is obtained. The second order perturbation theory on electromagnetic coupling is considered using modified Gell-Mann–Goldberger–Thirring dispersion relationship and optical theorem. Approximate formula obtained by Fomin and Kholodov for resonance Compton effect cross-section is used. For magnetic fields with strength of the order of Schwinger value the obtained dependence of the value of rotation on the energy of photons is consistent with the results obtained in the first order perturbation theory qualitatively and by the order of magnitude. The value of rotation changes sign for photons with energy of the order of 100 keV, the maximum value of rotation at either side of the corresponding frequency differ much significantly than in the first order perturbation theory.

Введение

Вращение плоскости поляризации фотонов в веществе возможно вследствие эффектов Фарадея или Барышевского – Любшица, причем во втором случае необходимо наличие спиновой поляризации электронов, присутствующих в веществе [1, с. 88–89].

В экспериментах по наблюдению вращения плоскости поляризации, выполненных в земных лабораториях, внешнее магнитное поле отсутствовало либо оказывало влияние на структуру уровней энергии электрона в атоме, не приводившее к нарушению целостности атома, т. е. движение электронов оставалось финитным по всем 3 пространственным направлениям. При этом выяснилось, что указанные эффекты наблюдаются в разных частях спектра: эффект Фарадея преобладает в видимом диапазоне, а эффект Барышевского – Любшица – в жестком рентгеновском.

В последнем случае эффект возникает во втором порядке теории возмущений по электромагнитной константе связи $\alpha = e^2/(\hbar c)$, где e – элементарный заряд, \hbar – постоянная Планка, c – скорость света [1, с. 88–94].

При магнитных полях, реализуемых в астрофизических условиях (например, вблизи замагниченных нейтронных звезд), ситуация кардинально меняется, поскольку существенную роль начинает играть квантование Ландау. При этом привычная структура вещества нарушается, а движение электронов теряет финитность в направлении

силовых линий магнитного поля. При таких обстоятельствах появляется возможность резонансного комптоновского рассеяния, когда промежуточный (виртуальный) электрон попадает на какой-либо уровень Ландау [2, с. 321]. Если частота фотона далека от резонанса, то преобладает эффект Барышевского – Любошица, который возникает уже не во втором, а в первом порядке теории возмущений по α (результаты исследований изложены в [3, р. 420–422; 4, с. 30–36; 5, с. 36–43]). Если же частота близка к резонансной, то возникает сложное взаимодействие (суперпозиция) двух эффектов, а также эффекта Макалюзо – Корбино [6, с. 582].

Постановка задачи и ее место среди аналогичных задач, исследованных ранее

Таким образом, требуется рассчитать угол поворота плоскости поляризации на единицу пройденного фотоном пути $d\varphi/dx$ в среде с поляризованными по спину электронами вдоль направления вектора поляризации. Будем учитывать также следующие требования:

- 1) спиновая поляризация электронов близка к полной;
- 2) внешнее магнитное поле является квантующим;
- 3) исследуется вклад второго порядка теории возмущений по α ;
- 4) исследуются частоты порядка резонансных.

Исследование задачи с перечисленным набором требований представляет интерес по следующим причинам.

1. Ранее при вычислении амплитуды комптоновского рассеяния вперед в пренебрежении магнитным полем использовались дисперсионное соотношение Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга, оптическая теорема и формула Гандельмана для разности комптоновских сечений при параллельных и антипараллельных спинах электрона и фотона (т. е. общий алгоритм, на который можно опираться, известен) [1, с. 88–94].

2. В случае квантующего магнитного поля можно, сохраняя прежнюю структуру алгоритма, вместо формулы Гандельмана использовать приближенную дифференциальную формулу Фомина – Холодова для резонансного комптоновского сечения [2, с. 323]. Указанную формулу легко проинтегрировать по углам, особенно в пределе полной спиновой поляризации электронов, когда необходимо вычислить только одну разновидность сечения взаимодействия фотона и электрона, а не разность двух сечений. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что при взаимодействии фотона, движущегося параллельно силовым линиям магнитного поля, с любым электроном получается одно и то же соотношение направлений спинов фотона и электрона (при полной поляризации не существует электронов, которые находились бы на нижнем уровне Ландау с магнитными моментами, направленными против магнитного поля).

Основные сведения, относящиеся к разновидностям поставленной задачи, приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Разновидности задачи о расчете угла поворота плоскости поляризации фотона в эффекте Барышевского – Любошица

A1. Порядок теории возмущения по α	Первый	Второй
A2. Метод расчета основан на	непосредственном вычислении разности амплитуд комптоновского рассеяния вперед	вычислении разности сечений комптоновского рассеяния вперед с последующим применением дисперсионного соотношения
Б1. В земных условиях при $\hbar\omega \gg \mu_B B$	эффекта нет, т. к. разность амплитуд равна нулю	исследован в 1960–70-е гг. (теоретически и экспериментально)

Окончание таблицы 1

Б2. В астрофизических условиях (квантующие магнитные поля) при $\hbar\omega \sim \mu_B V$	исследован в 2000–2010-е гг. (теоретически, вдали от резонансов, где влияние эффектов Фарадея и Макалусо – Корбино должно быть ослаблено) [3, р. 420–422; 4, с. 30–36; 5, с. 36–43]	является предметом исследования в данной работе вблизи резонансов промежуточного электрона на уровне Ландау (ожидается совместное проявление разных эффектов)
---	---	---

Также следует отметить, что дисперсионное соотношение Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга применено в [1, с. 93] в модифицированном виде во избежание расходимости интеграла. В случае квантующего магнитного поля представляется целесообразным поступить аналогично, учитывая, что целочисленная степень энергии (или частоты) в известных дисперсионных соотношениях может варьироваться [7, с. 642–643]. При этом для квантующего магнитного поля возможны 2 варианта целочисленной степени частоты, при которой интеграл не расходится.

Замечания по алгоритму расчета в отсутствие внешнего магнитного поля

Если фотон прошел расстояние dx , а плоскость его линейной поляризации повернулась на угол $d\varphi$, то при расчете $d\varphi/dx$ будем использовать следующие обозначения (помимо тех, которые уже были перечислены ранее): n_e – число электронов в единице объема, ω – частота фотона, \vec{p} – средний вектор спиновой поляризации электронов в атомах вещества, \vec{n} – единичный вектор в направлении распространения фотонов, $f_2(\omega)$ – функция, отвечающая за вклад в амплитуду комптоновского рассеяния вперед фотона на электроне, зависящая от соотношений между направлениями спинов фотона и электрона, $\text{Re } f_2(\omega)$ – действительная часть этой функции. Тогда из [1, с. 91] следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} (\vec{p} \cdot \vec{n}) \text{Re } f_2(\omega). \quad (1)$$

Для возможности вычисления $d\varphi/dx$ требуется найти функцию $\text{Re } f_2(\omega)$, входящую в правую часть (1). Для этого можно воспользоваться дисперсионным соотношением Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга (оно приводится здесь в несколько измененном виде по сравнению с [1, с. 93], т. е. в той системе единиц, где $\hbar \neq c \neq 1$):

$$\text{Re } f_2(\omega) = \frac{\omega}{\hbar c^2} (\Delta\mu)^2 + \frac{2\omega^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im } f_2(\xi) d\xi}{\xi^2 (\xi^2 - \omega^2)}. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) содержит аномальный магнитный момент электрона (где m_e – масса электрона) [8, с. 510]:

$$\Delta\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c} \cdot \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0.328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (3)$$

В свою очередь, для возможности вычисления $\text{Re } f_2(\omega)$ требуется знать выражение для $\text{Im } f_2(\omega)$ под интегралом в правой части (2). Для этого можно воспользоваться соотношением, которое следует из оптической теоремы [1, с. 92]:

$$\text{Im } f_2(\omega) = \frac{\omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) - \sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)}{2}. \quad (4)$$

В правой части (4) $\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega)$ и $\sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)$ – полные сечения комптоновского рассеяния фотона на электроны, соответственно, для случаев антипараллельной и параллельной ориентации спинов фотона и электрона. Эти сечения должны вычисляться в первом порядке по α без учета радиационных поправок. В соответствии с [8, с. 378] можно записать

$$\sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega) = \sigma + \sigma', \quad \sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) = \sigma - \sigma', \quad (5)$$

где σ – сечение рассеяния неполяризованных фотонов (которое не зависит от того, являются ли электроны поляризованными), а σ' – вклад в сечение, обусловленный наличием поляризации одновременно у фотона и электрона [8, с. 378]:

$$\sigma' = \pi r_0^2 \left(\frac{1 + 4\kappa + 5\kappa^2}{\kappa(1 + 2\kappa)^2} - \frac{(1 + \kappa)\ln(1 + 2\kappa)}{2\kappa^2} \right). \quad (6)$$

При этом в (6) $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ – электромагнитный радиус электрона, а вместо частоты ω введен безразмерный параметр

$$\kappa = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}. \quad (7)$$

Из (5) – (7) следует, что

$$\frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) - \sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)}{2} = -\sigma' = -\frac{\pi r_0^2}{2\kappa^2} \left(2\kappa - (1 + \kappa)\ln(1 + 2\kappa) + \frac{2\kappa^3}{(1 + 2\kappa)^2} \right). \quad (8)$$

Результат, аналогичный (8), был ранее получен Г. М. Гандельманом в 1953 г. [1, с. 92]. Правая часть (8) в 2 раза меньше результата, приведенного в [1, с. 92], что, однако, не приводит к разногласиям последующих формул с экспериментальными результатами [1, с. 95] по порядку величины. Более существенным замечанием является следующее. Если подставить правую часть (8) в правую часть (4), а затем полученный результат – в (2), то получим (с учетом перехода от переменной ω к переменной κ)

$$\text{Re } f_2(\kappa) = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2} (\Delta\mu)^2 - \frac{\kappa^3 r_0^2 m_e c}{4\pi\hbar} (I_{11} + I_{12}), \quad (9)$$

где

$$y = \frac{\hbar\xi}{m_e c^2}, \quad (10)$$

$$I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^3(y^2 - \kappa^2)} (2y - (1 + y)\ln(1 + 2y)), \quad (11)$$

$$I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^3(y^2 - \kappa^2)} \cdot \frac{2y^3}{(1 + 2y)^2}. \quad (12)$$

При этом оказывается, что I_{11} расходится на нижнем пределе, а I_{12} можно вычислить аналитически (несмотря на наличие полюса при $y = \kappa$), причем результат равен

$$I_{12} = \frac{4 \ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{4}{1-4\kappa^2} = 4 \left(\frac{\ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + 1 + \frac{4\kappa^2}{1-4\kappa^2} \right). \quad (13)$$

В точности результат (13) не совпадает с результатами в [1, с. 93, 94], хотя по внешнему виду хорошо с ними согласуется.

Для устранения расходимости в (11) дисперсионное соотношение (2) были применено в [1, с. 93] в модифицированном виде:

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) = \frac{\omega}{\hbar c^2} (\Delta\mu)^2 + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_2(\xi) d\xi}{\xi^2 - \omega^2}. \quad (14)$$

Тогда с учетом (4) и (8) получаем:

$$\operatorname{Re} f_2(\kappa) = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2} (\Delta\mu)^2 - \frac{\kappa r_0^2 m_e c}{4\pi\hbar} (I_{21} + I_{22}), \quad (15)$$

где

$$I_{21} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y(y^2 - \kappa^2)} (2y - (1+y)\ln(1+2y)), \quad (16)$$

$$I_{22} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2 - \kappa^2)(1+2y)^2}. \quad (17)$$

При этом оказывается, что I_{21} уже берется численно, а I_{22} можно, как и I_{12} , вычислить аналитически (несмотря на наличие полюса при $y = \kappa$), причем результат равен

$$I_{22} = \frac{4\kappa^2 \ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{1}{1-4\kappa^2} = 1 + 4\kappa^2 \left(\frac{\ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{1}{1-4\kappa^2} \right). \quad (18)$$

В точности результат (18), как и (13), не совпадает с результатами, приведенными в [1, с. 93, 94], хотя по внешнему виду, как и (13), хорошо с ними согласуется.

Таким образом, применение дисперсионного соотношения в виде (14) приводит к гораздо лучшим результатам по сравнению с (2). Численные расчеты показывают, что первым слагаемым в правой части (15) можно пренебречь, поэтому с учетом (7) можно переписать (15) в виде

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) \approx -\frac{\omega r_0^2}{4\pi c} (I_{21} + I_{22}). \quad (19)$$

Вместе с тем с учетом замечания, сделанного после (8), в [1, с. 93] приводится формула, похожая (с учетом замечания после (18)) на

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) \approx -\frac{\omega r_0^2}{2\pi c} (I_{21} + I_{22}). \quad (20)$$

Численное согласие с экспериментом выглядит лучше в случае применения (20), а не (19) [1, с. 94, 95], что составляет определенную трудность. Вместе с тем расходимость в (11) в случае применения (2) позволяет утверждать, что формула (14) более правильная.

Следовательно, и при наличии квантующего магнитного поля допустимо использовать (14) (или еще какой-либо вариант дисперсионного соотношения, в котором

из-под интеграла в знаменатель выносится частота в положительной степени, меньшей, чем 2) в том случае, если использование (2) приводит к расходимости.

Особенности алгоритма расчета при наличии внешнего магнитного поля

Теперь рассмотрим модель полностью поляризованного по спину электронного газа в квантующем магнитном поле. Приведенный выше алгоритм расчета $d\varphi/dx$ требует существенного пересмотра, т. к. по сравнению со случаем, когда внешнее магнитное поле отсутствует, происходит кардинальная перестройка уровней энергии электронов и их волновых функций. Изменения в алгоритме расчета заключаются в следующем.

1. При полной поляризации спины всех электронов направлены в одну сторону, и одно из сечений в (4) обращается в ноль, т. к. не существует электронов, которые находились бы на нижнем уровне Ландау с магнитными моментами, направленными против магнитного поля. При этом формулу (2) (для (14) рассуждения аналогичны) с учетом (4) можно упростить на основе следующих рассуждений (таблица 2).

Таблица 2. – Преобразования формулы (2) при движении фотона в полностью поляризованном по спину электронном газе параллельно и антипараллельно линиям индукции магнитного поля

Случай	$\vec{p} \cdot \vec{n}$	При этом не равно нулю сечение σ	И тогда $\frac{d\varphi}{dx}$ с учетом (4)
1) $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$	$= -1$	это σ_{\downarrow}	$= -2\pi n_e \left(\frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right)$
2) $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{B}$	$= +1$	это σ_{\uparrow}	$= 2\pi n_e \left(\frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} - \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right)$

В ходе рассуждений учитывалось, что под сечением σ будет пониматься сечение, которое выражается формулой (24) (см. ниже), а также то обстоятельство, что у электрона спин и собственный магнитный момент направлены противоположно [9, с. 550]. Таким образом, если все собственные магнитные моменты электронов выстроены по направлению вектора \vec{B} , то для вектора спиновой поляризации электронов \vec{p} получаем

$$|\vec{p}| = 1, \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{B}) = -1. \tag{21}$$

Объединяя результаты, полученные в таблице 2, можно обобщенно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 2\pi n_e \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n}) \left(\frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} - \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n}) \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right) = \\ &= -2\pi n_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Если пренебречь первым слагаемым в скобках (22), то получим результат, который уже не зависит от знака произведения $\vec{p} \cdot \vec{n}$ (это характерно и для эффекта Фарадея [10, с. 276]):

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\omega^2 n_e}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)}. \tag{23}$$

Следует также отметить, что резонансное сечение эффекта Комптона хотя и является преобладающим, но не может считаться полным (что требуется в оптической теореме) из-за наличия, например, поглощения и магнитотормозного излучения [2, с. 323]. Поэтому дальнейшие результаты будут носить оценочный характер (в т. ч. по причине, которая будет указана перед формулой (26)).

2. Для нахождения оставшегося в формулах (22) и (23) сечения вблизи резонанса (когда промежуточный электрон попадает на какой-либо уровень Ландау) воспользуемся дифференциальной формулой, предложенной П. И. Фоминым и Р. И. Холодовым [2, с. 322–323]. Пусть электрон в начальном и конечном состояниях находится на нулевом уровне Ландау со спином, направленным против вектора \vec{B} (в соответствии с условием поставленной задачи), а промежуточный электрон находится на уровне Ландау с номером n . Тогда, используя общие соотношения, приведенные в [2, с. 322–323], для соответствующего дифференциального сечения можно записать:

$$\frac{d\sigma_n}{du} = \pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^{2n} \cdot \frac{n^{4n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{(1+v^2)(1-v^2)^{n-1}(1+u^2)(1-u^2)^{n-1}}{(\hbar\omega - bm_e c^2 n)^2 + \Gamma_n^2/4}, \quad (24)$$

где использованы, помимо введенных выше, обозначения:

$$b = \frac{B}{B_0}, B_0 = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}, \Gamma_n = \frac{4}{3}(2n-1)\alpha m_e c^2 b^2, v = \cos\theta, u = \cos\theta'. \quad (25)$$

При этом B_0 – швингеровское значение индукции магнитного поля, Γ_n – ширина соответствующего резонанса, θ – угол, под которым движется начальный фотон по отношению к вектору \vec{B} , θ' – аналогичный угол для конечного фотона. На основе результатов, полученных в [4, с. 30–36; 5, с. 36–43] можно показать, что в первом порядке теории возмущений по α основной вклад во вращение вносит уровень с $n = 1$. Ограничиваясь аналогичным приближением для второго порядка, на основе (24) запишем:

$$\frac{d\sigma_1(u, v)}{du} = \frac{\pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^2}{4} \cdot \frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(\hbar\omega - bm_e c^2)^2 + \Gamma_1^2/4}. \quad (26)$$

Интегрируя (26) по углам рассеяния конечного фотона от 0 до π (т. е. по переменной u от -1 до $+1$), получаем:

$$\sigma_1(v) = \frac{2\pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^2 (1+v^2)}{3((\hbar\omega - bm_e c^2)^2 + \Gamma_1^2/4)}. \quad (27)$$

Если фотон движется вдоль линий индукции магнитного поля, то в (27) следует положить $v = 1$, что соответствует $\theta = 0$, и тогда получаем:

$$\sigma(\kappa, B) = \frac{4\pi r_0^2 b^2}{3((\kappa - b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4)}. \quad (28)$$

Таким образом, сечение зависит не только от частоты фотона ω , но и от индукции магнитного поля B . По структуре формула (28) похожа на формулу Брейта-Вигнера, где ширина резонанса зависит от индукции магнитного поля.

3. При устранении расходимости в формулах (22) и (23) с учетом подстановки (28) следует иметь в виду, что при использовании (28) вместо (8) необязательно выносить

из-под знака интеграла в знаменатель вторую степень частоты, поскольку первая степень для этого тоже достаточна. Следовательно, можно попробовать 2 варианта (с первой и второй степенью частоты) и сравнить полученные результаты.

Результаты расчетов

Подставляя (28) в (22), с учетом (7) и (10) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -2\pi m_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(y, B) dy}{y(y^2 - \kappa^2)} \right) = -2\pi m_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(y, B) y dy}{y^2(y^2 - \kappa^2)} \right) = \\ &= -2\pi m_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2 \kappa^2}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y dy}{y^2(y^2 - \kappa^2) \left((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4 \right)} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку интеграл в (29) расходится, необходимо модифицировать полученную формулу. Одним из способов может быть тот же самый, который был использован при переходе от (2) к (14). Тогда вместо (29) получаем:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\pi m_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y dy}{(y^2 - \kappa^2) \left((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4 \right)} \right). \quad (30)$$

Оказывается, что преобразование (29) можно модифицировать и другим способом, когда из-под интеграла выносятся только первая степень y в знаменателе, что влечет за собой уменьшение степени множителя κ перед интегралом также только на единицу. В результате получаем:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\pi m_e \left(\mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2 \kappa}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2 - \kappa^2) \left((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4 \right)} \right). \quad (31)$$

Вычисляя интегралы в (30) и (31) (путем разбиения отрезка интегрирования на 2 части – от 0 до $\kappa - \varepsilon$ и от $\kappa + \varepsilon$ до $+\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$), получаем результаты, которые обобщенно можно записать в виде:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2\pi m_e r_0^2}{\alpha} \left(\mp \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right)^2 + \frac{F_1 F_2(b, \kappa)}{(b^2 - \kappa^2)^2 + b^4 \left(\frac{4}{3} \alpha \right)^2 (b^2 + F_3(b) + 2\kappa^2)} \right), \quad (32)$$

где конкретный вид F_1 и $F_2(b, \kappa)$ различен для (30) и (31) (таблица 3).

Таблица 3. – Конкретный вид F_1 и $F_2(b, \kappa)$ в (32) в соответствии с (30) и (31)

Интеграл в	F_1 в (32)	$F_2(b, \kappa)$ в (32)
(30)	$\frac{b}{4\pi}$	$\frac{2}{3} \alpha b (4b\kappa \ln \kappa + (F_3(b) + \kappa^2) \ln(F_3(b))) + (F_3(b) - \kappa^2) F_4(b)$
(31)	$\frac{1}{8\pi}$	$\frac{8}{3} (F_3(b) + \kappa^2) \alpha b^2 \ln \kappa + \frac{8}{3} \kappa \alpha b^3 \ln(F_3(b)) + (F_3(b) + \kappa^2 + 2b\kappa - 4\kappa b^2) F_4(b)$

Выражения для $F_3(b)$ и $F_4(b)$ одинаковы и равны:

$$F_3(b) = b^2 + \left(\frac{4}{3}\alpha\right)^2 b^4, F_4 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{3}{4\alpha b}\right). \quad (33)$$

Результаты при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $B = 10^{13} \text{ Гс}$ (полная поляризация при таких значениях n_e и B реализуется [11, с. 20, 41, 42]) для формулы (30) представлены графически на рисунке 1 (обычная шкала), а для формулы (31) – на рисунке 2 (логарифмическая шкала, $\varphi_0 = 1 \text{ рад/см}$). При этом влияние первого слагаемого в скобках (30) и (31) ничтожно мало, поэтому не имеет значения, с каким знаком оно берется.

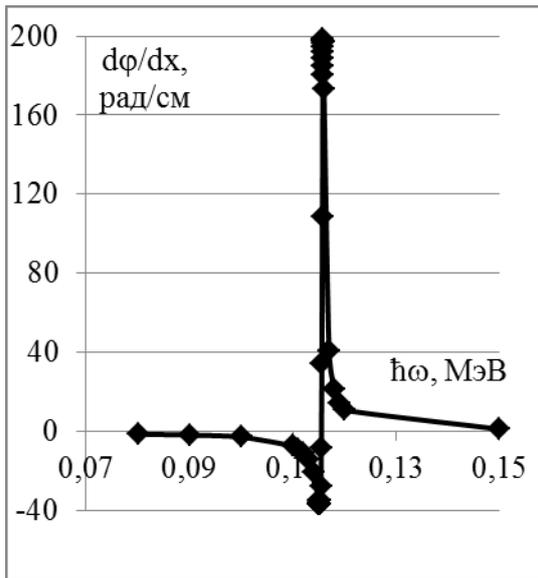


Рисунок 1. – Значение $d\varphi/dx$, вычисленное по формуле (30) при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $B = 10^{13} \text{ Гс}$

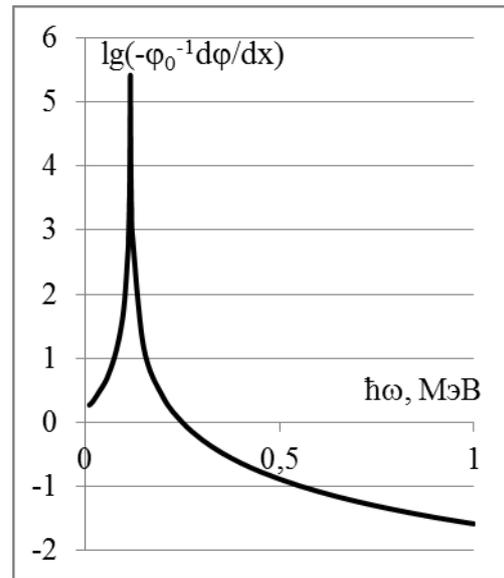


Рисунок 2. – Значение $\lg(-\varphi_0^{-1}d\varphi/dx)$, вычисленное по формуле (31) при $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $B = 10^{13} \text{ Гс}$

Таким образом, для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов в случае формулы (30) качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений при тех же значениях индукции магнитного поля и частоты фотона. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются между собой гораздо заметнее, чем в случае первого порядка теории возмущений, т. е. наблюдается более заметная асимметрия максимумов абсолютной величины вращения со стороны положительных и отрицательных значений. В случае формулы (31) величина вращения не меняет знак, а в максимуме достигает по абсолютной величине 10^5 рад/см , что на 3 порядка больше по сравнению с результатами, полученными на основе (30). Таким образом, формула (30), которая согласуется с алгоритмом, примененным в [1, с. 93], является более правдоподобной по сравнению с (31).

Заключение. Основные результаты

Во втором порядке теории возмущений по электромагнитной константе связи с использованием модифицированного дисперсионного соотношения Гелл-Мана –

Голдбергера – Тирринга и оптической теоремы получено решение задачи о величине вращения плоскости поляризации фотонов в полностью поляризованном электронном газе в магнитном поле со значениями индукции, при которых существенно квантование Ландау. Использована приближенная формула, полученная Фоминым и Холодовым для резонансного сечения эффекта Комптона. Для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений при тех же значениях индукции магнитного поля и частоты фотона. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются между собой гораздо заметнее, чем в случае первого порядка теории возмущений, т. е. наблюдается более заметная асимметрия максимумов абсолютной величины вращения со стороны положительных и отрицательных значений.

Часть идей, лежащих в основе данной статьи, принадлежит В. Г. Барышевскому и В. В. Тихомирову.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В. Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Фомин, П. И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П. И. Фомин, Р. И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 117, вып. 2. – С. 319–325.
3. Sery, A. I. To the Problem of Compton Rotation of Photons in a Strong Magnetic Field: Limit of Total Spin Polarization of Electrons / A. I. Sery // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, nr 4. – P. 420–422.
4. Серый, А. И. О комптоновском вращении в магнитном поле с учетом ширины резонанса / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 30–36.
5. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
6. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1980. – Т. 4 : Оптика. – 752 с.
7. Физическая энциклопедия : в 5 т. / А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988–1998. – Т. 1. : Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 1988. – 704 с.
8. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – М. : Наука, 1969. – 624 с.
9. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в X т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. III : Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 808 с.
10. Физическая энциклопедия : в 5 т. / А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988–1998. – Т. 5 : Стробоскопические приборы – Яркость. – 1988. – 691 с.
11. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 13.03.2020