А. А. ЮДОВ, А. А. ШУЛЮК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается пространство R_5 – пятимерное евклидово пространство.

Рассматривается группа Ли G движений этого пространства, группа Ли H вращений этого пространства и их алгебры Ли $\bar{G}$ и $\overline{H}$ соответственно. Алгебра Ли $\bar{G}$ имеет базис $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5,\ i_6,\ i_7,\ i_8,\ i_9,\ i_{10},\ i_{12},\ \ i_{13}, i_{14}, i_{16},\ i_{17},\ i_{18}$:

$i_1 = E_{21};$
$i_2 = E_{31};$
$i_3 = E_{41};$
$i_4 = E_{51};$
$i_5 = E_{61};$
$i_7 = E_{23} - E_{32};$
$i_8 = E_{24} - E_{42};$
$i_9 = E_{25} - E_{52};$
$i_{10} = E_{26} - E_{62};$
$i_{12} = E_{34} - E_{43};$
$i_{13} = E_{35} - E_{53};$
$i_{14} = E_{36} - E_{63};$
$i_{16} = E_{45} - E_{54};$
$i_{17} = E_{46} - E_{64};$
$i_{18} = E_{56} - E_{65}.$

Причем: $E_{\alpha\beta}$ в-й строке, β-м столбце 1, а остальные элементы равны нулю.

Базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H вращений пространства R_5 образуют операторы: $\{\ i_7,\ i_8,\ \ i_9,\ i_{10},\ i_{12},\ \ i_{13},\ i_{14},\ i_{16},\ i_{17},\ i_{18}\}$.

В алгебре Ли $\bar{G}$ определена операция коммутирования по правилу: $[a, b] = ab - ba$.

Результаты операций коммутирования для базиса алгебры Ли $\overline{H}$ имеют вид:

1) $[i_7, i_8] = -i_{12};$
2) $[i_7, i_9] = -i_{13};$
3) $[i_7, i_{10}] = -i_{14};$
4) $[i_7, i_{12}] = -i_8;$
5) $[i_7, i_{13}] = -i_9;$
6) $[i_7, i_{14}] = -i_{10};$
7) $[i_7, i_{16}] = 0;$
8) $[i_7, i_{17}] = 0;$
9) $[i_7, i_{18}] = 0;$
10) $[i_8, i_9] = -i_{16};$
11) $[i_8, i_{10}] = -i_{17};$
12) $[i_8, i_{12}] = -i_7;$
13) $[i_8, i_{13}] = 0;$
14) $[i_8, i_{14}] = 0;$
15) $[i_8, i_{16}] = -i_9;$
16) $[i_8, i_{17}] = -i_{10};$
17) $[i_8, i_{18}] = 0;$
18) $[i_9, i_{10}] = -i_{18};$
19) $[i_9, i_{12}] = 0;$
20) $[i_9, i_{13}] = -i_{17};$
21) $[i_9, i_{14}] = 0;$
22) $[i_9, i_{16}] = -i_8;$
23) $[i_9, i_{17}] = 0;$
24) $[i_9, i_{18}] = i_{10};$
25) $[i_{10}, i_{12}] = 0;$
26) $[i_{10}, i_{13}] = 0;$
27) $[i_{10}, i_{14}] = -i_7;$
28) $[i_{10}, i_{16}] = 0;$
29) $[i_{10}, i_{17}] = -i_8;$
30) $[i_{10}, i_{18}] = -i_9;$
31) $[i_{12}, i_{13}] = -i_{16};$
32) $[i_{12}, i_{14}] = -i_{17};$
33) $[i_{12}, i_{16}] = i_{13};$
34) $[i_{12}, i_{17}] = -i_{14};$
35) $[i_{12}, i_{18}] = 0;$
36) $[i_{13}, i_{14}] = -i_{18};$
37) $[i_{13}, i_{16}] = -i_{12};$
38) $[i_{13}, i_{17}] = 0;$
39) $[i_{13}, i_{18}] = i_{14};$
40) $[i_{14}, i_{16}] = 0;$
41) $[i_{14}, i_{17}] = -i_{12};$
42) $[i_{14}, i_{18}] = -i_{13};$
43) $[i_{16}, i_{17}] = -i_{18};$
44) $[i_{16}, i_{18}] = -i_{17};$
45) $[i_{17}, i_{18}] = -i_{16}.$

Репозиторий БрГУ

Рассмотрим подгруппу Ли G_1 группы Ли H, соответствующую оператору $a = i_7$, и соответствующее однородное пространство $H \,/\, G_1$. Это однородное пространство является редукторным, причем редукторным дополнением является пространство: $m = \{i_8,\ i_9,\ i_{10},\ i_{12},\ i_{13},\ i_{14},\ i_{16} + qi_{18},\ i_{17} + ri_{18},\ i_7 + pi_{18}\}$, $p \neq 0$.

Будем исследовать каноническую связность редукторного однородного пространства $H \,/\, G_1$, а именно вычислим тензоры кривизны и кручения канонической связности.

Тензоры кривизны и кручения канонической связности полученных редукторных пространств. Тензоры кривизны и кручения канонической связности будем вычислять исходя из свойств этих тензоров, которые описываются следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть P есть G – инвариантная структура на редуктивном однородном пространстве $G/\,H$ с расположением $\bar{G} = \bar{H} + m$.*

Для тензора кручения T и тензора кривизны R канонической связности в P имеем:

1) $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X,\ Y \in\ m$,
2) $(R(X,Y)Z)_0 = -[[X_1Y]_{\bar{H}}, Z)$ для $X,\ Y,\ Z \in m$,
3) $\nabla T = 0$,
4) $\nabla R = 0$.

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 1 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редукторных однородных пространствах.

Рассмотрим редукторное однородное пространство $H/\,G_1$, которое имеет редуктивное разложение $\bar{H} = \bar{G}_1 + m$, где $m = \{i_8,\ i_9,\ i_{10},\ i_{12},\ i_{13},\ i_{14},\ i_{16} + {} + qi_{18},\ i_{17} + ri_{18},\ i_7 + pi_{18}\}$. Выберем в редуктивном дополнении m базис:

$$e_1 = i_8, e_2 = i_9, e_3 = i_{10}, e_4 = i_{12}, e_5 = i_{13}, e_6 = i_{14}, e_7 = i_{16} + qi_{18},$$

$$e_8 = i_{17} + ri_{18}, e_9 = i_7 + pi_{18}.$$

Тогда согласно теореме 1 тензоры кручения получим по формуле $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X, Y \in m$, а тензоры кризизны по формуле $(R(X,Y)Z)_0 = -[[X_1Y]_{\bar{H}}, Z)$ для $X, Y, Z \in m$. Таким образом, координату T^i_{jk} тензора кручения получим как i-ю координату разложения вектора $-\left[e_{j,}e_k\right]_m$ по базису $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$ редуктивного дополнения m. Координату $R^{\ i}_{\ jk,l}$ тензора кривизны получим как i-ю координату разложения вектора $-\left[\left[e_{j,}\ e_k\right]_{G_1}, e_l\right]$ по базису B редуктивного дополнения m.

Проводя вычисления, получим следующую теорему.

Теорема 2. *Каноническая связность редукторного однородного пространства H/G_1 с редуктивным дополнением $m = \{i_8,\ i_9,\ i_{10},\ i_{12},\ i_{13},\ i_{14},\ i_{16} + qi_{18},\ i_{17} + ri_{18},\ i_7 + pi_{18}\}$, имеет следующие тензоры кривизны и тензоры кручения:*

$T_{2,3}^9 = -\frac{1}{p},\ T_{2,3}^i = 0,\ i \neq 9$

$T_{2,4}^8 = -1,\ T_{2,4}^9 = \frac{r}{p}\ ,\ T_{2,4}^i = 0,\ i \neq 8{,}9$

$T_{2,7}^1 = 1,\ T_{2,7}^3 = q,\quad T_{2,7}^i = 0,\ i \neq 1{,}3$

$T_{2,8}^3 = -r,\ T_{2,8}^i = 0,\ i \neq 3$

$T_{2,9}^3 = -p,\ T_{2,9}^5 = 1,\ T_{2,9}^i = 0,\ i \neq 3{,}5$

$T_{3,4}^i = 0,\ \forall i$

$T_{3,7}^2 = q,\quad T_{2,7}^i = 0,\ i \neq 2$

$T_{3,8}^1 = 1,\ T_{3,8}^2 = r\quad T_{3,8}^i = 0\ \ i \neq 1{,}2$

$T_{3,9}^2 = -p,\ T_{3,9}^6 = -1,\ T_{3,9}^i = 0,\ i \neq 2{,}6$

$T_{4,5}^7 = -1,\ T_{4,5}^9 = \frac{q}{p}\ ,\ T_{4,5}^i = 0,\ i \neq 7{,}9$

$T_{4,6}^8 = -1,\ T_{4,6}^9 = \frac{r}{p}\ ,\ T_{4,6}^i = 0,\ i \neq 8{,}9$

$T_{5,6}^9 = -\frac{1}{p},\ T_{5,6}^i = 0,\ i \neq 9$

$T_{5,7}^4 = 1,\ T_{5,7}^4 = -q,\ T_{5,7}^i = 0,\ i \neq 4{,}6$

$T_{5,8}^6 = r,\ T_{5,8}^i = 0,\ i \neq 6$

$T_{5,9}^2 = -1,\ T_{5,9}^6 = -p,\ T_{5,9}^i = 0,\ i \neq 2{,}6$

$T_{6,7}^5 = q,\quad T_{6,7}^i = 0,\ i \neq 5$

$T_{6,8}^4 = 1,\ T_{6,8}^5 = r,\ T_{6,8}^i = 0,\ i \neq 4{,}5$

$T_{6,9}^3 = -1,\ T_{6,9}^5 = p,\ T_{6,9}^i = 0,\ i \neq 3{,}5$

$T_{7,8}^8 = p,\ T_{7,8}^9 = -r,\ T_{7,8}^i = 0,\ i \neq 8{,}9$

$T_{7,8}^7 = -q, T_{7,8}^8 = p, T_{7,8}^9 = \frac{1+q^3-pr}{p},\quad T_{7,8}^i = 0,\ i \neq 7{,}8{,}9$

$T_{8,9}^7 = -1,\ T_{8,9}^9 = \frac{q}{p}\ ,\ T_{8,9}^i = 0,\ i \neq 7{,}9$

и следующие координаты тензора кривизны:

1. $R_{12,1}^4 = \frac{q}{p},\ R_{12,1}^i = 0,\ i \neq 4$
2. $R_{12,2}^5 = \frac{q}{p},\ R_{12,2}^i = 0,\ i \neq 5$
3. $R_{12,3}^6 = \frac{q}{p},\ R_{12,3}^i = 0,\ i \neq 6$
4. $R_{12,4}^1 = \frac{q}{p},\ R_{12,4}^i = 0,\ i \neq 1$
5. $R_{12,5}^2 = \frac{q}{p},\ R_{12,5}^i = 0,\ i \neq 2$
6. $R_{12,6}^3 = \frac{q}{p},\ R_{12,6}^i = 0,\ i \neq 3$
7. $R_{12,7}^i = 0,\ \forall i$
8. $R_{12,8}^i = 0,\ \forall i$
9. $R_{12,9}^i = 0,\ \forall i$

Репозиторий БрГУ

10. $R^4_{13,1} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,1} = 0,\ i \neq 4$
11. $R^5_{13,2} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,2} = 0,\ i \neq 5$
12. $R^6_{13,3} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,3} = 0,\ i \neq 6$
13. $R^1_{13,4} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,4} = 0,\ i \neq 1$
14. $R^2_{13,5} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,5} = 0,\ i \neq 2$
15. $R^3_{13,6} = \frac{r}{p},\ R^i_{13,6} = 0,\ i \neq 3$
16. $R^i_{13,7} = 0,\ \forall i$
17. $R^i_{13,8} = 0,\ \forall i$
18. $R^i_{13,9} = 0,\ \forall i$
19. $R^i_{14,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$
20. $R^i_{15,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$
21. $R^i_{16,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$
22. $R^i_{17,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$
23. $R^4_{23,1} = \frac{q}{p},\ R^i_{23,1} = 0,\ i \neq 4$
24. $R^5_{23,2} = \frac{1}{p},\ R^i_{23,2} = 0,\ i \neq 5$
25. $R^6_{23,3} = \frac{1}{p},\ R^i_{23,3} = 0,\ i \neq 6$
26. $R^1_{23,4} = \frac{1}{p},\ R^i_{23,4} = 0,\ i \neq 1$
27. $R^2_{23,5} = \frac{1}{p},\ R^i_{23,5} = 0,\ i \neq 2$
28. $R^3_{23,6} = \frac{1}{p},\ R^i_{23,6} = 0,\ i \neq 3$
29. $R^i_{23,7} = 0,\ \forall i$
30. $R^i_{23,8} = 0,\ \forall i$
31. $R^i_{23,9} = 0,\ \forall i$
32. $R^i_{24,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$
33. $R^4_{25,1} = \frac{r}{p},\ R^i_{25,1} = 0,\ i \neq 4$
34. $R^5_{25,2} = \frac{1}{p},\ R^i_{25,2} = 0,\ i \neq 5$
35. $R^6_{25,3} = \frac{r}{p},\ R^i_{25,3} = 0,\ i \neq 6$
36. $R^1_{25,4} = \frac{r}{p},\ R^i_{25,4} = 0,\ i \neq 1$
37. $R^2_{25,5} = \frac{r}{p},\ R^i_{25,5} = 0,\ i \neq 2$
38. $R^3_{25,6} = \frac{1}{p},\ R^i_{25,6} = 0,\ i \neq 3$
39. $R^i_{25,7} = 0,\ \forall i$
40. $R^i_{25,8} = 0,\ \forall i$
41. $R^i_{25,9} = 0,\ \forall i$
42. $R^i_{26,j} = 0,\ \forall i, j = 1,2, \dots 9$

Репозиторий БрГУ

43. $R^i_{27,j} = 0,\ \forall i,j = 1,2,\dots 9$
44. $R^i_{34,j} = 0,\ \forall i,j = 1,2,\dots 9$
45. $R^i_{35,j} = 0,\ \forall i,j = 1,2,\dots 9$
46. $R^4_{36,1} = 1,\ R^i_{36,i} = 0,\ i \neq 4$
47. $R^i_{37,j} = 0,\ \forall i,j = 1,2,\dots 9$
48. $R^i_{38,j} = 0,\ \forall i,j = 1,2,\dots 9$

При этом следует учитывать, что тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам, а тензор кручения кососимметричен по двум нижним индексам.

Репозиторий БрГУ