К. С. ШЛОЙДА, О. В. МАТЫСИК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ К РЕШЕНИЮ С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе для решения линейного некорректного уравнения

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительным самосопряженным оператором $A: H \to H$ предлагается новый неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A)x_{n+1} = (E - \alpha A)x_n + 2\alpha y, x_0 = 0. \tag{2}$$

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. *Пусть* $A \geq 0, y \in H, \alpha > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *последовательность* x_n *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения* (1).

Доказательство. Применим оператор A к методу (2), получим $A(E + \alpha A)x_n = A(E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим $(E + \alpha A)(Ax_n - \Pi(A)y) = (E - \alpha A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E + \alpha A)v_n = (E - \alpha A)v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)v_{n-1}$, значит, $v_n = (E + \alpha A)^{-n}(E - \alpha A)^n v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ $\forall x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|(E + \alpha A)^{-1}(E - \alpha A)\right\| < 1$. Поэтому справедливо

$$\|v_n\| = \left\|(E + \alpha A)^{-n}(E - \alpha A)^n v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{(1 - \alpha\lambda)^n}{(1 + \alpha\lambda)^n} dE_\lambda v_0\right\| \leq$$

$$\le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{(1-\alpha\lambda)^n}{(1+\alpha\lambda)^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{(1-\alpha\lambda)^n}{(1+\alpha\lambda)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| =$$

$$= \left\| E_{\varepsilon_0} v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0 \right\| \to 0 \text{ при } \varepsilon_0 \to 0,\ n \to \infty.$$

Здесь $\left| \dfrac{(1-\alpha\lambda)}{(1+\alpha\lambda)} \right| \le q(\varepsilon_0) < 1$, при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A,y)$. Итак, а) доказано.

Докажем б). Пусть итерационный процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$(E + \alpha A)x_n = (E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha A\Pi(A)y = (E - \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha Ax^* =$$

$$= (E + \alpha A)x_{n-1} - 2\alpha Ax_{n-1} + 2\alpha Ax^* = (E + \alpha A)x_{n-1} + 2\alpha A(x^* - x_{n-1}).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A)^{-1} AP(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1}),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1})$ получим равенство $w_n = w_{n-1} - 2\alpha A(E + \alpha A)^{-1} w_{n-1}$.

Следовательно, $w_n = (E - \alpha A)(E + \alpha A)^{-1} w_{n-1}$, и аналогично v_n можно показать, что $w_n \to 0, n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда вытекает $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. метод (2) сходится к решению с минимальной нормой.*