О. В. МАТЫСИК, К. С. ДУБРОВСКАЯ
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ПРОЦЕССЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение $Ax = y_\delta$, где $A: H \to H$ – оператор положительный, ограниченный, несамосопряженный и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предполагается, что $0 \in S_A$ (но не является собственным значением оператора A), поэтому рассматриваемая задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n, \quad z_0 \in H, \tag{1}$$

где $C = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1}\left(E - \alpha A^* A\right)$, $B = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1} 2\alpha A^*$, $\alpha > 0$, а u_n – ошибки в вычислении итераций (причем $\| u_n \| \le \beta$).

Предложенный метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова *по поправкам*: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями $\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m)$, $\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon$. Справедлива

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$, *т. е. приближения* (1) *сходятся к точному решению уравнения* $Ax = y_\delta$.