где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T – период функции, а коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{14}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt, \tag{15}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt. \tag{16}$$

В точках разрыва функция ряда Фурье дает среднее арифметическое из ее значений справа и слева.

Широкое использование ряда Фурье связано с тем обстоятельством, что сразу находится частное решение линейных неоднородных уравнений, если правую часть представить в виде ряда и использовать формулы типа (5)–(7) для последовательных слагаемых. Особенно легко выполнить расчеты, если коэффициенты ряда Фурье быстро убывают с ростом их номера. Тогда можно учесть лишь несколько первых членов ряда и получить решение с хорошей точностью. Впрочем, при использовании современных вычислительных средств нередки случаи, когда для достаточно точного расчета какой-либо конкретной задачи суммируют несколько сотен и тысяч членов ряда Фурье. Важно, что решение можно получить с любой наперед заданной степенью точности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1974. – 520 с.

2. Шнейдер, В. Е. Краткий курс высшей математики. Т. 2 / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М. : Высш. шк., 1978. – С. 178–191.

С. А. МАРЗАН
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В теории дробного интегро-дифференцирования особое значение имеют вопросы существования решений краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными в различных функциональных пространствах.

Настоящая работа посвящена вопросам существования и единственности решения весовой задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля [1]

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x)\right] \ \left(\alpha \in C, 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1\right) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\lim_{x\to a+0}\left((x-a)^{1-\alpha}y(x)\right)=b,\ b\in C, \tag{2}$$

в пространстве

$$C^{\alpha}_{1-\alpha,\beta}[a,b]=\left\{y\in C_{1-\alpha}[a,b]:D^{\alpha}_{a+}y\in C_{\beta}[a,b]\right\},\ \beta\in C,\ 0\le \mathrm{Re}(\beta)<1,$$

$$C_{\beta}[a,b]=\left\{g:\ \|g\|_{C_\beta}=\left\|(x-a)^{\beta}g(x)\right\|_{C}<\infty\right\},\ C_0[a,b]=C[a,b].$$

Непосредственные оценки с учетом [1, (2.44)] дают условия ограниченности оператора дробного интегрирования I^{α}_{a+} в этом пространстве:

1) если $\mathrm{Re}(\beta)>\mathrm{Re}(\alpha)$, то оператор I^{α}_{a+} ограниченно действует из $C_{\beta}[a,b]$ в $C_{\beta-\alpha}[a,b]$:

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{C_{\beta-\alpha}}\le k\|f\|_{C_\beta},\ k=\frac{\Gamma\left(\mathrm{Re}(\alpha)\right)\Gamma\left(1-\mathrm{Re}(\beta)\right)}{\left|\Gamma(\alpha)\right|\Gamma\left(1+\mathrm{Re}(\alpha-\beta)\right)}; \tag{3}$$

2) если $\mathrm{Re}(\beta)\le\mathrm{Re}(\alpha)$, то оператор I^{α}_{a+} ограниченно действует из $C_{\beta}[a,b]$ в $C[a,b]$:

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{C}\le k_1\|f\|_{C_\beta},\ k_1=(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha-\beta)}k, \tag{4}$$

в частности,

$$\left\|I^{\alpha}_{a+}f\right\|_{C_\beta}\le k_2\|f\|_{C_\beta},\ k_2=(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)}k. \tag{5}$$

Следующие утверждения для функций $g\in C_{\beta}[a,b]$ доказываются аналогично известным результатам для $g\in L(a,b)$ [1, §§ 2.3, 2.5, теорема 2.4] с учетом (3)–(5).

Лемма 1. Если $g\in C_{\beta}[a,b]$, то

$$\left(I^{\alpha}_{a+}I^{\gamma}_{a+}g\right)(x)=\left(I^{\alpha+\gamma}_{a+}g\right)(x)\ \left(\alpha\in C,\mathrm{Re}(\alpha)>0,\gamma\in C,\mathrm{Re}(\gamma)>0\right), \tag{6}$$

$$\left(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}g\right)(x)=g(x). \tag{7}$$

Если же $\mathrm{Re}(\alpha)>\mathrm{Re}(\gamma)$, то

$$\left(D^{\gamma}_{a+}I^{\alpha}_{a+}g\right)(x)=\left(I^{\alpha-\gamma}_{a+}g\right)(x). \tag{8}$$

С использованием (6)–(7) можно показать, что если функция $f:[a,b]\times R\to R$ такова, что при любом $y\in R$ $f\in C_{\beta}[a,b]$ и

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times R}\left|(x-a)^{\beta}f[x,y]\right|=M_{\beta}<\infty, \tag{9}$$

то весовая задача типа Коши (1)–(2) равносильна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x)=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\left[t,y(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{10}$$

в том смысле, что функция $y\in C_{1-\alpha}[a,b]$ является решением задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда она является решением уравнения (10).

Для получения условий существования единственного решения задачи (1)–(2) к условию (9) добавим условие липшицевости функции f относительно второй переменной:

$$\left|f[x,y_1]-f[x,y_2]\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,\ L>0. \tag{11}$$

Теорема. *Пусть* $\alpha\in C$, $0<\mathrm{Re}(\alpha)<1$, $\beta\in C, 0\le\mathrm{Re}(\beta)<1$, *а функция* $f:[a,b]\times R\to R$ *удовлетворяет условиям (9) и (11). Тогда существует единственное решение весовой задачи типа Коши (1)–(2) в пространстве* $C^{\alpha}_{1-\alpha,\beta}[a,b]$.

Доказательство. Уравнение (10) имеет смысл на любом отрезке $[a,x_1]\subset[a,b]$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$L\frac{(x_1-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{\left|\Gamma(\alpha)\right|\mathrm{Re}(\alpha)}<1, \tag{12}$$

и докажем существование единственного решения интегрального уравнения (10) на отрезке $[a,x_1]$. Для доказательства достаточно применить метод последовательных приближений, положив

$$y_0(x)=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},\ y_m(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\left[t,y_{m-1}(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\ m=1,2,\ldots$$

Применяя (3)–(5), легко показать существование единственного решения уравнения (1) на отрезке $[a,x_1]$.

Рассмотрим далее отрезок $[x_1,x_2]$, где $x_2=x_1+h$, $h>0$, $x_2\le b$. Запишем уравнение (10) в виде

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^x\frac{f\left[t,y(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1}\frac{f\left[t,y(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \tag{13}$$

$x \in [x_1, x_2]$. Так как на отрезке $[a, x_1]$ функция $y \in C_{1-\alpha}[a,b]$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (13) равносильно уравнению

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f\left[t, y(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

где

$$y_1(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f\left[t, y(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

есть известная функция. Повторяем те же рассуждения на отрезке $[x_1, x_2]$, получаем единственное решение на этом отрезке. Затем берем следующий отрезок и т. д., пока не получим единственное решение на отрезке $[a,b]$.

Теперь покажем, что это решение принадлежит пространству $C^{\alpha}_{1-\alpha,\beta}[a,b]$. Для этого достаточно показать, что $D^{\alpha}_{a+} y \in C_{\beta}[a,b]$.

Если $0 \le \mathrm{Re}(\beta) \le \mathrm{Re}(1-\alpha)$, то, используя (1) и (11), имеем:

$$\left\| D^{\alpha}_{a+} y_m - D^{\alpha}_{a+} y \right\|_{C_\beta} \le (b-a)^{\mathrm{Re}(1-\alpha-\beta)} \left\| D^{\alpha}_{a+} y_m - D^{\alpha}_{a+} y \right\|_{C_{1-\alpha}} =$$

$$= (b-a)^{\mathrm{Re}(1-\alpha-\beta)} \left\| f[x, y_m] - f[x,y] \right\|_{C_{1-\alpha}} \le (b-a)^{\mathrm{Re}(1-\alpha-\beta)} L \left\| y_m - y \right\|_{C_{1-\alpha}}. \quad (14)$$

Если же $\mathrm{Re}(\beta) > \mathrm{Re}(1-\alpha)$, то

$$\left\| D^{\alpha}_{a+} y_m - D^{\alpha}_{a+} y \right\|_{C_\beta} = \left\| f[x, y_m] - f[x,y] \right\|_{C_\beta} \le L \left\| y_m - y \right\|_{C_\beta} \le$$
$$\le L(b-a)^{\mathrm{Re}(\beta-1+\alpha)} \left\| y_m - y \right\|_{C_{1-\alpha}}. \quad (15)$$

В силу сходимости y_m к y в классе $C_{1-\alpha}[a,b]$, из неравенств (14) и (15) заключаем, что $D^{\alpha}_{a+} y \in C_{\beta}[a,b]$, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.