Е. А. КРАВЧУК, О. В. МАТЫСИК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Для решения в действительном гильбертовом пространстве *H* линейного некорректного уравнения первого рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\| y - y_\delta \| \le \delta$, *A* – положительный ограниченный самосопряженный оператор (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, т. е. рассматриваемая задача некорректна), используем метод

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь *E* – тождественный оператор, α – итерационный параметр.

Рассмотрим поведение итераций (2) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Использование энергетической нормы позволяет получить оценки погрешности метода (2) без знания дополнительной информации на гладкость точного решения уравнения (1) – его истокообразную представимость: $x = A^s z,\ s > 0$.

Теорема. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в энергетической норме, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. *Общая оценка погрешности для метода* (2)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha)^{-\frac{1}{2}}\|x\| + (n\alpha)^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 1. \tag{3}$$

Оптимизируем полученную оценку (3) по *n*, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части равенства (3), получим $n_{\text{опт}} = \left(2\alpha\delta\right)^{-1}\|x\|$.

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3), найдем ее оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию

$\alpha > 0$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Так как $\alpha > 0$, то за счет его выбора можно получить $n_{\text{опт}} = 1$.

А. Ю. КУЛЕШ, А. А. ТРОФИМУК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

О ПРИЗНАКАХ РАСШИРЕННОЙ СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2]. Запись $Y \le X$ означает, что Y – подгруппа группы X.

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами.

Напомним, что класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно фактор-групп* или *гомоморфом*, когда выполняется требование: если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если $G / N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$ –корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G / N \in \mathfrak{F}$.

Подгруппы A и B группы G называются *взаимно перестановочными*, если A перестановочна со всеми подгруппами из B и B перестановочна со всеми подгруппами из A. М. Асаад и А. Шаалан установили сверхразрешимость группы $G = AB$ с взаимно перестановочными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что B нильпотентна [3, теорема 3.2], и в случае, когда коммутант G' нильпотентен [3, теорема 3.8]. Обзор результатов о взаимно перестановочных подгруппах по состоянию на 2010 г. содержится в монографии А. Баллестера-Болинше с соавторами [4, разд. 4, 5].

Согласно теореме Хупперта, сверхразрешимую группу можно определить как группу, в которой все максимальные подгруппы имеют простые индексы. Отсюда следует, что в сверхразрешимой группе G для каждой собственной подгруппы H существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_n = G, \ \left|H_i : H_{i-1}\right| \in P, \ \ \forall i. (1)$$

Поэтому вполне естественно следующее определение, предложенное в [4].

Подгруппа H группы G называется P-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп (1). В работах [5; 6] изучен класс групп с P-субнормальными силовскими подгруппами. Группа G называется *расширенно сверхразрешимой* (кратко w-*сверхразрешимой*), если любая примарная