М. А. КАЛАВУР
Беларусь, Брэст, УА «БрДУ імя А. С. Пушкіна»

ВЫВУЧЭННЕ ПЕРЫЯДЫЧНАСЦІ ФУНКЦЫЙ У ШКОЛЕ

Перыядычнасць функцый. Як правіла, вывучэнне гэтай уласцівасці функцыі рэкамендуецца ажыццяўляць пры разглядзе трыганаметрычных функцый. Падвесці вучняў да ўласцівасці перыядычнасці функцый можна, выкарыстоўваючы метад мэтазгодных задач.

1. Пры дапамозе адзінкавай акружнасці дакажыце тоеснасці (α ∈ R):

$a)\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha;\ б)\sin(\alpha+4\pi)=\sin\alpha;$

$в)\sin(\alpha+6\pi)=\sin\alpha;\ г)\sin(\alpha+8\pi)=\sin\alpha.$

2. Параўнайце:

а) $\sin(\alpha-2\pi)$ і $\sin\alpha$;

б) $\sin(\alpha-4\pi)$ і $\sin\alpha$;

в) $\sin(\alpha-6\pi)$ і $\sin\alpha$;

3. Ці існуе такі лік α, пры якім выконваецца роўнасць $\sin(\alpha+\frac{2}{3}\pi)=\sin\alpha$?

Вучні падводзяцца да вываду: лікі выгляду 2πk (k ∈ Z) – асаблівыя для функцыі сінус. Ім паведамляецца, што гэтыя лікі называюцца перыядамі функцыі, а сама функцыя перыядычнай.

Затым уводзіцца азначэнне: «Функцыя y = f(x) называецца перыядычнай, калі існуе такі лік T ≠ 0, што пры любым x з абсягу вызначэння функцыі лікі x – T і x + T таксама належаць гэтаму абсягу і выконваецца роўнасць f(x – T) = f(x) = f(x + T)». У гэтым выпадку лік T называецца перыядам функцыі.

Прыклад. Функцыя f(x) = $\sin x$ з'яўляецца перыядычнай.

D(f) = R. Пры любым x ∈ R (лікі (x + 2π) ∈ R і (x – 2π) ∈ R) сума і рознасць двух сапраўдных лікаў – сапраўдныя лікі. Лікам x, $x\pm2\pi$ адпавядае адзін і той жа пункт адзінкавай акружнасці, а значыць, і адна і тая ж ардыната – значэнне сінуса, таму $\sin x=\sin(x\pm2\pi)$.

Лёгка даказаць, што функцыя $y=\sin x$ мае бясконцае мноства перыядаў тыпу 2πk, дзе k ∈ Z: лікі 4π, 6π, 8π, ... , -4π, -6π, -8π, ... – перыяды функцыі.

Лік 2π з'яўляецца найменшым дадатным перыядам функцыі сінус.

Такім чынам, калі T – перыяд функцыі, то kT, дзе k ∈ Z, – таксама перыяд функцыі. Выходзіць, усякая перыядычная функцыя мае бясконцае мноства перыядаў. На практыцы звычайна разглядаюць найменшы дадатны перыяд. Яго іншым разам абазначаюць T_0.

Уласцівасці перыядычных функцый:

1. Абсяг вызначэння перыядычнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат.

2. Для перыядычнай функцыі $y = f(x)$ справядлівая роўнасць $f(x + kT_0) = f(x)$, дзе T_0 – перыяд функцыі, к $\in$ Z.

3. Калі T_0 – перыяд функцыі $y = f(x)$, то любы з лікаў kT_0, дзе $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, таксама перыяд гэтай функцыі.

4. Калі функцыя $y = f(x)$ перыядычная з перыядам T_0, то функцыя $y = f(ax)$ таксама перыядычная з перыядам $\frac{T_0}{|a|}$ (пры а $\neq$ 0).

5. Калі функцыя $y = f(x)$ перыядычная з перыядам T_0, то функцыі тыпу $y = -f(x), y = f(-x), y = f(x + a), y = f(x) + b, y = af(x), y = f(x + a) + b$ з’яўляюцца перыядычнымі з тым жа перыядам.

6. Сума, рознасць, здабытак і дзель перыядычных функцый з аднолькавым перыядам з’яўляюцца перыядычнымі функцыямі з тым жа перыядам.

7. Сума перыядычных функцый з рознымі перыядамі з’яўляецца перыядычнай функцыяй толькі тады, калі іх перыяды сувымяральныя.

8. Калі $y = f(x)$ мае перыяд Т і дыферэнцаваная, то $f'(x)$ – перыядычная функцыя з тым жа перыядам.

Графік перыядычнай функцыі. Значэнні перыядычнай функцыі праз прамежак, роўны перыяду, паўтараюцца. Гэта асаблівасць выкарыстоўваецца пры пабудове графіка.

Калі Т – асноўны перыяд функцыі $y = f(x)$, то для пабудовы яе графіка дастаткова пабудаваць галіну графіка на адным з прамежкаў восі О*x* даўжынёй Т, а затым ажыццявіць паралельны перанос гэтай галіны па восі О*x* на $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$ г. зн. працягнуць яго на ўвесь абсяг вызначэння функцыі.

Калі графік перыядычнай функцыі перамяшчаць уздоўж восі О*x* на адрэзак, даўжыня якога роўная $\pm T \pm kT$ (k $\in$ N), то ўсякі раз новы графік сумесціцца са сваім першапачатковым становішчам.

Карысна разгледзець з вучнямі прыклады неперыядычных функцый:

1. Функцыя $y = \sqrt{x}$ (D(y) = [0; $+\infty$)) неперыядычная, таму што абсяг вызначэння не сіметрычны адносна пачатку каардынат.

2. Функцыі $y = 3x^2, y = x^2 + 4x - 5, y = \frac{1}{x}$ неперыядычныя, паколькі маюць толькі па два прамежкі манатоннасці. Асноўнай асаблівасцю перыядычных функцый з’яўляецца паўтаральнасць іх лікавых значэнняў праз роўныя прамежкі змянення значэнняў аргумента.

Для актывізацыі разумовай дзейнасці вучняў пры вывучэнні тэарэтычнага матэрыялу рэкамендуецца прапаноўваць вучням праблемныя пытанні.

1. Ці можа перыядычная функцыя: а) быць нарастальнай на ўсім абсягу вызначэння?; б) мець толькі два прамежкі манатоннасці? (Не.)

2. Ці можа перыядычная функцыя мець толькі адзін перыяд? (Не.)

3. Прывядзіце прыклады перыядычных працэсаў у прыродазнаўстве, фізіцы і адпаведных ім функцый.

4. Ці правільныя сцвярджэнні: а) Калі графік функцыі f мае дзве восі сіметрыі x = a і x = b (a < b), то f – перыядычная (Так.); б) Калі функцыя f – перыядычная, то g(x) = $|f(x)|$ – перыядычная функцыя (Так.); в) Калі функцыя f – перыядычная, то $g(x) = f(|x|)$ – перыядычная функцыя? (Не, напрыклад, $f(x) = \sin x$ – перыядычная, а $g(x) = \sin|x|$ – неперыядычная.)

5. Прывядзіце прыклад перыядычнай функцыі, якая з'яўляцца сумай (рознасцю) дзвюх неперыядычных функцый. (Напрыклад, $f(x) = (-2x-3)+(2x+5)$; f(x) = 2 – перыядычная функцыя.)

Для далейшага тлумачэння і замацавання вывучанага матэрыялу рэкамендуюцца разнастайныя практыкаванні. Іх падбор для канкрэтнага класа залежыць ад мэтаў навучання (агульнаадукацыйная школа, ПТВ і г. д.), матэматычных здольнасцяў і цікавасці вучняў да матэматыкі. Прывядзём прыклады практыкаванняў.

1. Вылічыце: $\sin 2600^0, \cos 1700^0, tg 1470^0, \sin(-420^0), -tg(-120^0)$.

2. Ці з'ўляецца перыядычнай функцыя:

$$f(x) = -x^2, g(x) = 3, h(x) = \frac{1}{x}, l(x) = \cos 5x?$$

3. Знайдзіце перыяд функцыі $y = \cos 3x$.

Заўвага. Перыяд функцыі можна знайсці, карыстаючыся ўласцівасцю 4.

4. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \cos^2 x$.

Н. А. КАЛЛАУР, Л. Н. МОЩИК
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

СПОСОБСТВОВАНИЕ РАЗВИТИЮ ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ С ПОМОЩЬЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Решение стереометрических задач способствует развитию логико-алгоритмического мышления, так как при решении большинства задач используются четкие алгоритмы, а также применяются такие логические приемы, как синтез и анализ.

Анализ – логический прием, с помощью которого изучаемый предмет мысленно расчленяется на части, каждая из которых затем рассматривается отдельно. В случае необходимости эти части опять могут быть расчленены на другие части и т. д., следовательно, процедура разложения целого на части производится до получения элементарных и уже известных предметов.