4) нахожу, чему равно Z;

5) комментирую через компоненты действий.

Следующий этап – решение уравнений вида: а · К = в; а : К= в; К : а = в.

1 этап. Решение с одновременным комментированием правил нахождения площади прямоугольника и его сторон. Например, К : $\underline{2}$ = $\underline{5}$ (К – площадь прямоугольника, 2 и 5 – его стороны).

К = 2 · 5 (чтобы найти площадь прямоугольника, надо перемножить его стороны). К = 10.

2 этап. Решение уравнений с комментированием (через площадь прямоугольника и его стороны).

Комментирование через компоненты действий после решения уравнения.

Для отработки навыков решения уравнений на умножение и деление можно использовать следующие упражнения.

1. Выполни проверку и найди ошибку.

К : 2 = 4. К = 4 : 2. $\underline{\text{К = 2.}}$

Дети решают: 2 : 2 = 4; 1 ≠ 4.

2. Проанализируй решение уравнения и найди ошибку.

К · 3 = 9. К = 3 · 9. К = 27.

Ошибки: 1) 9 – это площадь, целое, ее надо обозначить прямоугольником; 2) К – это сторона, надо площадь разделить на другую сторону.

3. Составь уравнения с числами 3, Х, 12 и реши их.

Дети составляют: 12 : К = 3; 3 · К = 12 и т. д.

4. Из данных уравнений реши те, которые решаются делением.

К · 2 = 6; К : 4 = 16; 12 : К = 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салмина, Н. Г. Знак и символ в обучении / Н. Г. Салмина. – М., 1988.

2. Савин, А. П. Энциклопедический словарь юного математика / А. П. Савин. – М. : Педагогика, 2006. – 450 с.

3. Рудницкая, В. Н. Математика. 1–4 класс : учебник / В. Н. Рудницкая, Т. В. Юдачева. – М. : Вентана-граф, 2016–2018.

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК
Брест, Беларусь, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ БрГУ ИМЕНИ А. С. ПУШКИНА (АНАЛИЗ)

На физико-математическом факультете БрГУ имени А. С. Пушкина 01.04.2021 проходила традиционная студенческая олимпиада по математике. В олимпиаде приняли участие 30 студентов факультета. Отметим победителей: дипломами первой степени награждены Е. В. Веренич (ПМ-11) и Т. А. Яцук (ПМ-31), дипломами второй степени – Д. В. Галуц (ПМ-11) и С. В. Савонюк (ПМ-11), дипломом третьей степени – А. В. Зарецкий (ФИ-11).

Ниже приводятся условия и решения задач по математическому анализу и обыкновенным дифференциальным уравнениям олимпиады (нумерация задач сохранена).

Задача 2. Числовая последовательность задана рекуррентно

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{3n+5}{3n+2}x_n + \frac{1}{3n+2}.$$

При каких $a \in \mathbf{R}$ последовательность x_n сходится?

Решение. Положим $y_n := \dfrac{x_n}{3n+2}$. Тогда

$$y_1 = \frac{a}{5}, \; y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(3n+5)(3n+2)}.$$

Имеем

$$y_n = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1}) =$$

$$= \frac{a}{5} + \frac{1}{(3\cdot1+5)(3\cdot1+2)} + \frac{1}{(3\cdot2+5)(3\cdot2+2)} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(3(n-2)+5)(3(n-2)+2)} + \frac{1}{(3(n-1)+5)(3(n-1)+2)}.$$

Так как при любом натуральном k выполняется равенство

$$\frac{1}{(3k+5)(3k+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+2} - \frac{1}{3k+5}\right),$$

то

$$y_n = \frac{a}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot1+2} - \frac{1}{3\cdot1+5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot2+2} - \frac{1}{3\cdot2+5}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3(n-2)+2} - \frac{1}{3(n-2)+5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3(n-1)+2} - \frac{1}{3(n-1)+5}\right) =$$

$$= \frac{a}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\cdot1+2} - \frac{1}{3(n-1)+5}\right) = \frac{3a+1}{15} - \frac{1}{3(3n+2)}.$$

Таким образом,

$$x_n = \frac{(3a+1)(3n+2)}{15} - \frac{1}{3}.$$

Из полученной формулы следует, что последовательность x_n имеет конечный предел в том и только в том случае, когда $3a+1=0$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задача 5. Найти все непрерывно дифференцируемые на числовой прямой $\mathbf{R}$ функции $y(x)$ такие, что

$$y'(x)y(-x)=x \quad \text{и} \quad y(0)=1.$$

Решение. Пусть функция $y:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ удовлетворяет условию задачи. Тогда при каждом $x\in\mathbf{R}$ имеем

$$(y(x)y(-x))'=y'(x)y(-x)-y(x)y'(-x)=x-(-x)=2x.$$

Следовательно, $y(x)y(-x)=x^2+C$. Так как $y(0)=1$, то $C=1$. Таким образом, при всех $x\in\mathbf{R}$ выполняется равенство

$$y(x)y(-x)=x^2+1.$$

Из последней формулы следует, что $y(x)\neq 0$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

Для нахождения $y(x)$ составим дифференциальное уравнение

$$\frac{y'(x)y(-x)}{y(x)y(-x)}=\frac{x}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{x}{1+x^2}.$$

Интегрируя последнее уравнение (дифференциальное уравнение с разделенными переменными) с учетом условия $y(0)=1$, получим

$$y(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $y(x)=\sqrt{1+x^2}$.

Задача 7. Пусть функция $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\mapsto\mathbf{R}$ – непрерывно дифференцируема и $f(0)=0$. Доказать неравенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x))^2dx\geq\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2dx.$$

Решение. Рассмотрим разность

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x))^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((f'(x))^2+(f(x)ctg\ x)^2-\frac{f^2(x)}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\cos x}=f'(0),$$

то функции $\frac{f(x)}{\sin x}$ и $f(x)ctg\ x=\frac{f(x)\cos x}{\sin x}$ продолжаются по непрерывности на отрезок $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x))^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((f'(x))^2+(f(x)ctg\ x)^2)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f^2(x)}{\sin^2 x}dx.$$

Последнее слагаемое полученной формулы проинтегрируем по частям

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f^2(x)}{\sin^2 x}dx=\begin{bmatrix} u=f^2(x) & du=2f(x)f'(x)dx \\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x} & v=-ctg\ x\end{bmatrix}=$$

$$=-f^2(x)ctg\ x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f'(x)\,ctg\ x\,dx.$$

Поскольку $ctg\frac{\pi}{2}=0$ и

$$\lim_{x\to 0}f^2(x)ctg\ x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}f(x)\cos x=f'(0)f(0)\cos 0=0,$$

то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x))^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((f'(x))^2+(f(x)ctg\ x)^2)dx-$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f'(x)ctg\ xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f'(x)-f(x)ctg\ x)^2dx\geq 0,$$

что и требовалось доказать.