СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Генкин, С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров : АСА, 1994. – 271 с.
2. Гусев, В. А. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах / В. А. Гусев, И. А. Орлов, А. Л. Розенталь. – М. : Просвещение, 1984. – 290 с.

Е. В. КИСИЛЮК, А. А. МОИСЕЕНКОВ
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

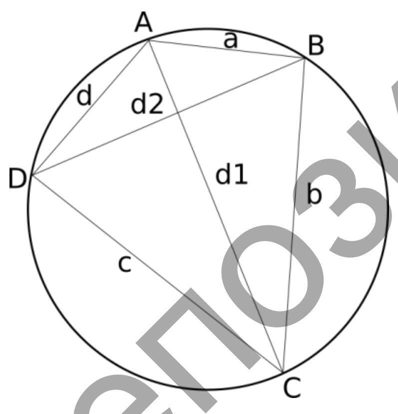
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ПТОЛЕМЕЯ ПРИ РЕШЕНИИ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В статье рассмотрены доказательство и практическое применение теоремы Птолемея. Актуальность статьи заключается в том, что на школьных олимпиадах, а также на экзаменах и ЦТ есть геометрические задачи, которые решаются с помощью теоремы Птолемея.

Теорема Птолемея формулируется следующим образом [1]: круг можно описать вокруг четырехугольника тогда и только тогда, когда произведение его диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

Есть несколько способов доказательства. Один из них – доказательство с помощью теоремы косинусов.

Из треугольников ABC и ADC по теореме косинусов:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot cos \angle B,$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2 \cdot CD \cdot AD \cdot cos \angle D$$

Введем обозначения: AB = a, BC = b, CD = c, AD = d, AC = d_1, BC = d_2.

Отсюда: $d_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\angle B$

$$d_1{}^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot cos\angle D$$

$$cos\angle B = \frac{a^2 + b^2 - d_1{}^2}{2ab}$$

$$cos\angle D = \frac{c^2 + d^2 - d_1{}^2}{2cd}.$$

Так как четырехугольник ABCD – вписанный, то $\angle$ ABC + $\angle$ADC = 180°. Значит, $\cos\angle D = \cos(180° - \angle B) = -\cos\angle B$

$$\frac{-a^2 + b^2 - d_1{}^2}{2ab} = \frac{c^2 + d^2 - d_1{}^2}{2cd}$$

$$cd\left(d_1{}^2 - (a^2 + b^2)\right) - ab\left((c^2 + d^2) - d_1{}^2\right),$$

$$cd \cdot d_1{}^2 + ab \cdot d_1{}^2 = ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2),$$

$$d_1{}^2 = \frac{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}{ab+cd} = \frac{abc^2+abd^2+a^2cd+b^2cd}{ab+cd} = \frac{(abc^2+a^2cd)+(abd^2+b^2cd)}{ab+cd} =$$

$$= \frac{ac(bc+ad)+bd(ad+bc)}{ab+cd} = \frac{(ac+bd)(ad+ac)}{ab+cd}$$

Аналогично

$$d_2{}^2 = \frac{(ab+cd)(bd+ac)}{ad+bc}.$$

В результате

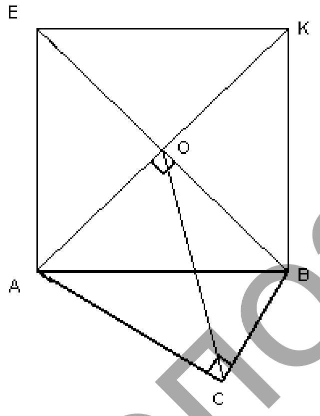
$$d_1{}^2 \cdot d_2{}^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)(bd+ac)}{(ab+cd)(ad+bc)} = (ac+bd)^2$$

$$d_1 \cdot d_2 = ac + bd,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим практическое применение теоремы Птолемея.

Задача. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и в. На его гипотенузе во внешнюю сторону треугольника построен квадрат, одна из сторон которого совпадает с гипотенузой. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата [2].



Решение.

1. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, его катеты – BC и AC, гипотенуза – AB.

2. ABKE – заданный квадрат, построенный на гипотенузе AB, а точка AB – пересечение диагоналей квадрата, т. е. его центр. Таким образом, необходимое расстояние равно длине отрезка CO.

3. Рассмотрим четырехугольник AODC. Его два противоположных угла – ∠C и ∠AOB – прямые, поэтому окружность может быть описана рядом с ним, и, следовательно, теорема Птолемея может быть применена к этому четырехугольнику. CO · AB = AO · BC + AC · OB (1).

4. По свойству квадрата AT = OB $=\frac{AB}{\sqrt{2}}$, тогда уравнение (1) примет вид CO · AB = AO · (BC + AC) (2). Подставляя в уравнение (2) вместо BC и AC их значения, получим $\mathrm{CO} \cdot \mathrm{AB} = (a+b) \cdot \frac{AB}{\sqrt{2}}$, откуда $CO = \frac{(a+b)}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{(a+b)}{\sqrt{2}}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике для 10 класса / И. Ф. Шарыгин. – М. : Просвещение, 1989. – 352 с.

2. Черкасов, О. Ю. Планиметрия на вступительном экзамене / О. Ю. Черкасов. – М. : Моск. лицей, 1996. – 128 с.