СЕКЦИЯ 3. РАЗРАБОТКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ К РАБОТЕ С ОДАРЕННЫМИ УЧАЩИМИСЯ В УСЛОВИЯХ ВУЗА

Н. И. ГОРДЕЙЧУК
Беларусь, Пинск, ГУО «Гимназия № 1 имени Ф. Я. Перца г. Пинска»

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКОВ

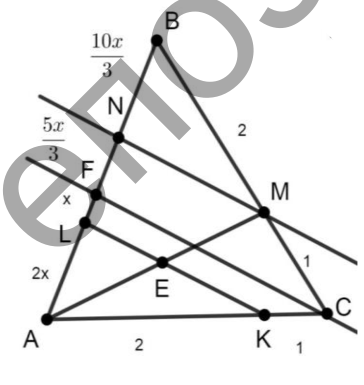
К математической подготовке абитуриентов предъявляются достаточно высокие требования. Успешная сдача централизованного тестирования зависит и от качества знаний, и от скорости их применения. Решения геометрических задач (на отношения длин отрезков, нахождение площадей фигур) обычно получаются объемными, трудоемкими.

Не существует универсального метода. Каждая задача требует индивидуального подхода, и разные методы решения имеют свою эффективность. При решении как планиметрических, так и стереометрических задач можно использовать понятие «центр тяжести» системы материальных точек.

Проанализировав различные способы решения задачи на нахождение отношения длин отрезков, убеждаемся, что использование понятия «центр тяжести» (метод масс) позволяет сравнительно быстро получить ответ, причем решение получается простым и наглядным.

Задача. На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что BM = 2CM. Точки K и L выбраны на сторонах AC и AB соответственно так, что AK = 2CK, BL = 3AL. В каком отношении прямая KL делит отрезок AM?

Способ 1 (классический)



Дано: ΔABC, M ∈ BC, BM = 2CM, K ∈ AC, AK = 2CK, L ∈ AB, BL = 3AL, E = AM ∩ LK.
Найти: AE : EM.

Решение.

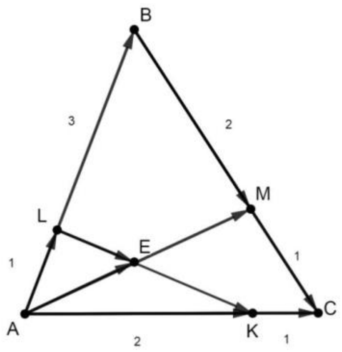
1. Проведем прямую CF∥LK.

2. По обобщенной теореме Фалеса: AL : LF = AK : KC = 2 : 1.

3. Пусть LF = x, тогда AL = 2x. Так как AL : LB = 1 : 3, то LB = 3 · AL = 6x, FB = LB – LF = 6x – x = 5x.

4. Проведем прямую MN∥LK.

5. По обобщенной теореме Фалеса: FN : NB = CM : BM = 1 : 2.
FN $=\frac{1}{3}\cdot$ FB $=\frac{5x}{3}$,
BN $=\frac{2}{3}\cdot$ FB $=\frac{10x}{3}$.
6. По обобщенной теореме Фалеса:
AE : EM = AL : LN = (2x) : (x + $\frac{5x}{3}$) = 2x : $\frac{8x}{3}$.
AE : EM = 2x : $\frac{8x}{3}$ = 6 : 8 = 3 : 4.
Ответ: 3 : 4.
Способ 2 (векторный)



Дано: ΔABC, M ∈ BC, BM = 2CM,
K ∈ AC, AK = 2CK, L AB,
BL = 3AL, E = AM ∩ LK.
Найти: AE : EM.

Решение.
1. Пусть $\overrightarrow{AE} = x\cdot\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{LE} = y\cdot\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.
2. Рассмотрим треугольник ABC:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \qquad \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

3. Рассмотрим треугольник ABM:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) =$$

$$= \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} == \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{AE} = x\cdot\overrightarrow{AM} = x\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = \frac{x}{3}\vec{a} + \frac{2x}{3}\vec{b}.$$

4. Рассмотрим треугольник ALK:

$$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK}, \ \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}.$$

5. Рассмотрим треугольник ALE:

$$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LE} = \overrightarrow{AE},$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{LK} = \frac{1}{4}\vec{a} + y\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{y}{4}\vec{a} + \frac{2y}{3}\vec{b} = \frac{1}{4}(1-y)\vec{a} + \frac{2y}{3}\vec{b}.$$

6. Получим уравнение:

$$\frac{1}{4}(1-y)\vec{a} + \frac{2y}{3}\vec{b} = \frac{x}{3}\vec{a} + \frac{2x}{3}\vec{b},$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1-y) = \frac{x}{3}, \\ \frac{2y}{3} = \frac{2x}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 3y = 4x, \\ y = x; \end{cases}$$

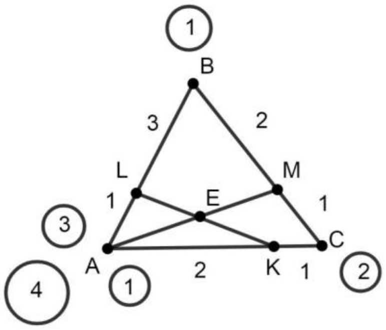
$$\begin{cases} 7x = 3, \\ y = x; \end{cases}$$

$$x = y = \frac{3}{7},$$

$$AE: AM = 3: 7, AE: EM = 3: 4.$$

Ответ: 3 : 4.

Способ 3 (метод масс)



Дано: ΔABC, $M \in BC$, $BM = 2CM$, $K \in AC$, $AK = 2CK$, $L \in AB$, $BL = 3AL$, $E = AM \cap LK$.
Найти: AE : EM.

Решение.

1. Нагрузим вершины треугольника ABC таким образом, чтобы центр масс оказался в точке E. Поместим в точки B и C такие массы, чтобы их центр был в точке M (1 и 2 соответственно). Получим, что 1B,2C ~ 3M.

Далее нагрузим вершину A такими массами, чтобы центры масс систем xA, 2C и yA, 1B попали в точки K и L соответственно.

2. По правилу рычага получим уравнения:

$x \cdot AK = KC \cdot 2$, $y \cdot AL = BL \cdot 1$,

$$x = \frac{2 \cdot KC}{AK} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1,$$

$$y = \frac{1 \cdot BL}{AL} = \frac{3 \cdot 1}{1} = 3.$$

Масса точки A равна $x + y = 4$.

3. По правилу рычага для отрезка AM:

$4 \cdot AE = EM \cdot 3$,

$$\frac{AE}{EM} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: 3 : 4.

Применяя такой способ решения, понимаем, что, умело используя основные свойства центра масс системы материальных точек, можно решать достаточно широкий класс задач (олимпиадные задачи, задачи централизованного тестирования). Данный метод имеет высокую эффективность, упрощает и ускоряет процесс решения задачи.