Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра прикладной математики и информатики

Е.П. Гринько

Методика преподавания математики (часть IV)

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2022

УДК 372.851
ББК 74.262.21я73
Т-32

Автор:
доцент кафедры прикладной математики и информатики
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
кандидат педагогических наук, доцент
Е.П. Гринько

Рецензенты:

кафедра профессионального развития работников образования
УО «Брестский областной институт развития образования»

учитель математики высшей категории
ГУО «Лицей №1 им. А.С. Пушкина г. Бреста»
И.Д. Потапова

Гринько, Е.П. Методика преподавания математики (часть IV) / Е.П. Гринько – Брест : Изд-во БрГУ имени А.С. Пушкина, 2022. – 187 с.

Комплекс предназначен студентам специальности 1-02 05 01 Математика и информатика, написан в соответствии с программой обучения в вузе. В ЭУМК представлены лекции, вопросы для обсуждения, задания к практическим и лабораторным занятиям по всем темам курса «Методика преподавания математики», материалы для текущего и итогового контроля, дан перечень необходимой литературы. Предлагаются различные по форме информационно-содержательные средства осмысления, систематизации, обобщения знаний по методике преподавания математики и их практическому применению в педагогической деятельности.

ЭУМК может быть использован для организации учебной деятельности студентов, подготовки к итоговой аттестации, оценки уровня освоения дисциплины.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Одна из главных задач подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности связана с формированием практических умений и навыков, составляющих основу технологии труда учителя. Настоящий ЭУМК ориентирован на творческое осмысление студентами теоретических знаний по методике преподавания математики.

Учебная дисциплина «Методика преподавания математики» относится к числу педагогических дисциплин и изучается студентами, уже получившими определенную философскую, педагогическую, психологическую, общедидактическую и математическую подготовку. Эти знания студентов систематически используются в курсе методики преподавания математики и находят свой выход в практике обучения школьников.

Структура ЭУМК:

1. Теоретический раздел, содержащий необходимые теоретические сведения.
2. Практический раздел, содержащий материал для практических занятий.
3. Раздел контроля знаний, содержащий вопросы к экзамену и тест.
4. Вспомогательный раздел, содержащий рекомендуемую литературу.

Значительное место в ЭУМК занимают вопросы, связанные с формированием творческого подхода к обучению математике, умением оценивать различные системы изложения материала с точки зрения педагогики, психологии, дидактики. Особое внимание в пособии уделяется рассмотрению вопросов по выработке профессиональных навыков и приемов работы, умению вести научно-исследовательскую деятельность, обращаться с техническими средствами обучения. Пособие содержит теоретический материал по общим вопросам методики преподавания математики и вопросам частной методики преподавания математики, задания для практических и лабораторных занятий, список литературы, который поможет подготовиться к семинарским занятиям по методике преподавания математики, к зачетам и экзаменам.

В пособии разработаны практические и лабораторные занятия раздела «Частная методика» по темам курса «Методика преподавания математики». Цель практических занятий состоит в формировании у студентов следующих умений и навыков: проводить анализ учебно-методической литературы по математике, анализировать отдельные темы школьного курса математики, планировать учебную работу и учебный материал по математике, правильно выбирать методы, формы и средства обучения для каждой конкретной темы с учетом индивидуальных особенностей учащихся с целью активизации их познавательной деятельности, знакомиться с основными методами решения задач, оценивать работы учащихся, анализировать урок, планировать и проводить внеклассные мероприятия по математике в школе. Важно отметить, что предлагаемый материал опирается на современные подходы к изучению методики преподавания математики.

ЭУМК разработан в соответствии с требованиями ОСВО 1-02 05 01-2013 на основании учебного плана ФМ-24-19/уч. от 30.05.2019 и учебной программы УД-19-002-20 от 29.05.2020.

О программе учебной дисциплины «Методика преподавания математики»

Структура содержания учебной дисциплины «Методика преподавания математики» основана на изучении двух традиционных разделов: общая методика и специальная (частная) методика. Содержание учебной дисциплины представлено в виде тем, которые характеризуются относительно самостоятельными дидактическими единицами содержания.

Содержание учебной дисциплины «Методика преподавания математики» тесно связано с такими учебными дисциплинами, как «Психология», «Педагогика». Для изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» необходимо также наличие у обучающихся академических компетенций по учебным дисциплинам «Элементарная математика», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Введение в математику», формирование которых необходимо обеспечить в рамках компонента учреждения высшего образования.

Целью преподавания учебной дисциплины является формирование профессиональных компетенций учителя математики в условиях современного образовательного процесса.

Основными ***задачами*** учебной дисциплины являются:

– осознание роли общего математического образования в решении задач современной общеобразовательной школы, значения математики как общеобразовательного предмета, психолого-педагогических основ его изучения, задач и целей преподавания предмета на разных уровнях его изучения школьниками;

– формирование представлений об основных методических концепциях школьного математического образования и подходах к отбору, структурированию и систематизации содержания;

– ознакомление студентов с содержанием всех компонентов методической системы обучения математике в их современной трактовке, требованиями образовательных стандартов, с содержанием программ, учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных учреждений, перспектив и направлений их усовершенствования на различных уровнях;

– обеспечение глубокого усвоения студентами содержания школьного курса математики и понимания основных методических идей, заложенных в нем;

– овладение конкретными знаниями по общей теории и методике организации обучения школьной математике;

– выработка у студентов профессиональных умений и навыков на уровне требований государственных стандартов к преподаванию математики в общеобразовательных учреждениях;

– формирование творческого подхода к решению методических проблем;

– обучение студентов применению наиболее эффективных методов, средств и организационных форм обучения школьников математике, использованию в своей деятельности новых технологий обучения;

– формирование умений вести исследовательскую деятельность, результаты которой находят непосредственное развитие в курсовых, дипломных и научных работах;

– выработка умений видеть современные проблемы методики изучения математики в школе и находить пути решения этих проблем адекватно возрастным особенностям учащихся, прогнозировать результаты своей педагогической деятельности и корректировать ее на основе критического анализа.

Основными методами, технологиями обучения, отвечающими целям изучения учебной дисциплины, являются:

– методы проблемного обучения (проблемное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;

– приемы организации учебно-исследовательской деятельности, технологии модульного обучения, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;

– моделирование студентами фрагментов будущей профессиональной деятельности, проведение дидактических игр;

– использование видеоуроков конкурса «Учитель года», фрагментов видеоуроков, записанных во время педагогической практики студентов на семинарских и лабораторных занятиях;

– личностно-ориентированное обучение (обучение в сотрудничестве, метод проектов, дифференцированное обучение и др.)

– использование современных информационных технологий (лекции с использованием компьютерных демонстраций, электронные лекции в режиме слайд-шоу или с использованием мультимедиа, электронные конспекты и базы данных и др.), использование аудио и видео техники.

В процессе обучения студентов целесообразно использовать современные тенденции в развитии методики преподавания математики и психолого-педагогические закономерности формирования знаний.

В результате изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» студент должен:

знать:

– цели и задачи среднего математического образования;

– теоретические подходы, современные концепции обучения математике;

– общие основы методики преподавания математики;

– психологические особенности обучения математике;

– современные педагогические технологии обучения математике;

– формы и методы организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– формы контроля, критерии оценки уровня усвоения знаний и сформированности умений учащихся по математике;

уметь:

– применять систему знаний о закономерностях и дидактических принципах организации учебного процесса по математике;

– использовать принципы, методы, формы и средства учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– применять методы методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– использовать знания, которые относятся к современным технологиям обучения математике;

– применять методику изучения математических понятий, теорем, доказательств и решения задач;

– организовывать образовательно-воспитательный процесс обучения математике для различных возрастных групп учащихся, на разных ступенях и профилях обучения и в разных типах образовательных учреждений;

владеть:

– способами ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, сайты, образовательные порталы и т.д.);

– различными средствами коммуникации в профессиональной педагогической деятельности;

– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды образовательного учреждения, района, области, страны;

– методами методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– современными педагогическими технологиями обучения математике;

– методами учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– методами организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– навыком формирования профессиональной самооценки деятельности.

Успешное освоение системы знаний, умений, навыков по учебной дисциплине «Методика преподавания математики» позволит студентам достигнуть профессионально-методической грамотности, готовности выполнять профессионально-методическую деятельность в условиях современного образовательного процесса.

В рамках лекционного курса должны формироваться концептуальные взгляды будущих учителей на проблемы школьного математического образования. Задачи лекционного курса заложить основы профессионального отношения к указанным в программе вопросам, дать всестороннюю характеристику изучаемых проблем, представить аналитический обзор возможных подходов к их решению.

Практические занятия должны быть направлены на приобретение студентами навыков использования полученных теоретических знаний при решении конкретных методических задач. Их структура и содержание, а также организация и проведение должны содействовать развитию индивидуально-творческих способностей каждого студента, приобретению навыков самостоятельной работы, в том числе и исследовательской. При этом занятия должны ориентироваться на продуктивное использование современных компьютерных технологий и технических средств обучения.

На практических занятиях студенты знакомятся с содержанием образовательного стандарта по математике, учебных программ, учебников и учебных пособий; анализируют методику преподавания конкретных тем школьного курса в разных УМК (учебно-методических комплексах); учатся планировать учебный материал; знакомятся с принципами построения системы задач по отдельной теме и разработки дидактических материалов; обсуждают проблемы организации обучения на уроках разных типов, формы контроля и оценки знаний учащихся, проблемы внеклассной работы по предмету.

Лабораторные занятия проводятся по подгруппам и должны включать активные, практико-ориентированные виды деятельности, направленные на формирование умений и навыков самостоятельной педагогической работы в обучении математике. Их организация должна способствовать развитию методической культуры студента и его профессиональной самореализации.

На занятиях всех типов рекомендуется изучение студентами методики работы опытных учителей математики, проведение встреч с учеными, методистами, творчески работающими учителями, авторами УМК.

Роль и место дисциплины в методической и математической подготовке определяется ее возможностями в формировании методической компетентности будущих учителей.

Освоение курса «Методика преподавания математики» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

CJIK-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

СЛК-7. Быть способным к осуществлению самообразования и самосовершенствования профессиональной деятельности.

ПК-1. Управлять учебно-познавательной и учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

ПК-2. Использовать оптимальные методы, формы, средства обучения.

ПК-3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм.

ПК-4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

ПК-11. Развивать учебные возможности и способности обучающихся на основе системной педагогической диагностики.

ПК-12. Развивать навыки самостоятельной работы обучающихся с учебной, справочной, научной литературой и др. источниками информации.

ПК-13. Организовывать и проводить коррекционно-педагогическую деятельность с обучающимися.

ПК-14. Предупреждать и преодолевать неуспеваемость обучающихся.

ПК-15. Формулировать образовательные и воспитательные цели.

ПК-16. Оценивать учебные достижения обучающихся, а также уровни их воспитанности и развития.

ПК-17. Осуществлять профессиональное самообразование и самовоспитание с целью совершенствования профессиональной деятельности.

ПК-18. Организовать целостный педагогический процесс с учетом современных образовательных технологий и педагогических инноваций.

ПК-19. Анализировать и оценивать педагогические явления и события прошлого в свете современного гуманитарного знания.

Распределение аудиторного времени по семестрам:

Курс / Семестр	**Общее кол-во часов**	**Аудиторное количество часов**	**Лекции**	**Практические занятия**	**Лабораторные занятия**
2 курс / 3 семестр	118	66	32	30	4
2 курс / 4 семестр	124	60	28	28	4
3 курс / 5 семестр	98	60	30	28	2
3 курс / 6 семестр	66	36	16	18	2
4 курс / 7 семестр	144	42	24	16	2
Итого	**550**	**264**	**130**	**120**	**14**

На изучение учебной дисциплины «Методика преподавания математики» отводится всего 550 часов, из них 264 часа аудиторных занятий. Примерное распределение аудиторного времени по видам занятий: 130 часов – лекции, 120 часов – практические занятия, 14 часов – лабораторные занятия.

Итоговый контроль знаний проводится на зачетах (третий, пятый, шестой семестры) и на экзаменах (четвертый, седьмой семестры).

Содержание учебного материала

Раздел 1. Общие основы методики обучения математике

1.1. Предмет, цели, задачи и методы методики преподавания математики. Связь методики преподавания математики с другими науками. Основные этапы развития методики преподавания математики, современные тенденции методики преподавания математики.

Предмет методики преподавания математики. Методы методики обучения математике. История развития методики преподавания математики. Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике. Актуальные проблемы методики преподавания математики.

1.2. Математика как наука и как учебный предмет в школе. Цели и содержание обучения математике. Модернизация математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика».

Этапы развития математики. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования. Реформистское движение за модернизацию математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика». Характеристика основных программ и учебных пособий по математике для средней школы. Проблема интеграции школьного курса математики.

1.3. Психолого-педагогические основы обучения математике. Основные дидактические принципы в процессе преподавания математики.

Особенности интеллектуального развития в подростковом возрасте. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся. Дидактические принципы обучения математике. Особенности реализации дидактических принципов при обучении математике в условиях смены парадигм образования.

1.4. Общедидактические методы обучения математике и их классификация.

Проблема методов обучения. Классификация методов обучения. Объяснительно-иллюстративный метод. Репродуктивный метод. Проблемное обучение. Частично-поисковый (эвристический) метод. Исследовательский метод в обучении математике. Программированное обучение.

1.5. Методы научного познания в обучении математике.

Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез. Математические методы познания.

1.6. Методика изучения математических понятий.

Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия. Классификация понятий. Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий, методика введения математических понятий, применение понятий и их определений. Некоторые особенности усвоения математических понятий и их определений учащимся.

1.7. Методика изучения математических предложений.

Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем. Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах. Методика обучения учащихся теоремам и их доказательствам. Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке.

1.8. Задачи в школьном курсе математики.

Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач. Общие методы решения математических задач. Классификация задач. Роль алгоритмов и эвристик в обучении решению задач. Организация обучения решению математических задач. Методика обучения школьников решению текстовых задач арифметическим методом.

1.9. Формы организации обучения математике. Урок. Основные требования к уроку. Анализ урока математики. Средства обучения математике. Контроль и оценка знаний учащихся.

Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку. Организация современного урока (годовое или полугодовое планирование, тематическое планирование, поурочное планирование). Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях. Средства обучения математике. Печатные средства обучения математике (учебник, учебное пособие, сборники задач и дидактических материалов, тетради с печатной основой, методические пособия, учебно-методические комплексы). Дидактические требования к учебнику по математике как основному средству обучения. Электронные средства обучения математике (компьютерные обучающие и контролирующие программы; электронные учебники и т.д.). Средства наглядности при изучении математики, дидактические требования к их качеству и использованию в учебном процессе. Дистанционные технологии обучения в традиционном образовательном процессе.

Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса. Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике, виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование). Методика работы учителя по подготовке учащихся к устному и письменному экзамену по математике.

1.10. Дифференциация при обучении математике в системе основного и дополнительного образования. Внеклассная работа по математике. Организация исследовательской деятельности учащихся.

Проблема развития математических способностей у школьников.

Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике. Основное образование учащихся, повышенный уровень изучения математики в гимназиях и лицеях. Дополнительное образование по математике. Постоянные и непостоянные формы внеурочной работы в рамках дополнительного образования по математике (кружки, факультативные занятия, курсы по выбору, заочные школы, олимпиады, конференции и т. п.). Организация исследовательской деятельности учащихся, подготовка к участию в научно-исследовательской работе, математических турнирах различного уровня.

1.11. Развитие мышления и воспитание учащихся в процессе обучения математике

Компоненты математического мышления. Качества математического мышления. Развитие познавательного интереса школьников при обучении математике. Воспитание в процессе обучения математике.

Раздел 2. Частная методика

2.1. Методика изучения числовых множеств в школьном курсе математики.

Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Общий принцип расширения числовых множеств. Общая схема методики изучения новых чисел. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей. Изучение процентов. Основные задачи на проценты. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.

2.2. Методика изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе математики.

Тождественные преобразования в школьном курсе математики. Методика изучения понятия тождества. Тождество на множестве. Основные виды тождественных преобразований в школьном курсе математики. Методика формирования навыков и умений тождественных преобразований целых и дробных рациональных выражений, иррациональных, трансцендентных (показательных, логарифмических, тригонометрических) выражений. Типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях и пути их предупреждения. Методика формирования культуры тождественных преобразований.

2.3. Обобщение понятия степени в школьном курсе математики.

Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем. Корень n-ой степени в школьном курсе математики. Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем.

2.4. Понятие функции. Методика изучения алгебраических функций в школьном курсе математики. Функции натурального аргумента.

Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе. Методика изучения алгебраических функций. Числовые последовательности и прогрессии. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.

2.5. Методика изучения тригонометрических функций в школьном курсе.

Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии. Методика введения тригонометрических функций любого угла. Методические особенности изучения первых трансцендентных функций в школе. Построение графиков тригонометрических функций. Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.

2.6. Методика изучения показательной и логарифмической функций.

Особенности методики изучения показательной и логарифмической функций в средней школе. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности.

2.7. Методика изучения производной. Применение производной в школьном курсе математики.

О проблеме введения понятия предела в школьный курс. Методика изучения производной функции в школьном курсе математики. Механический и геометрический смыслы производной. Применение производной к исследованию функций. Уточнение понятия касательной к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции.

2.8. О понятиях равносильности и следования в курсе школьной математики. Методика обучения учащихся решению алгебраических уравнений, неравенств и их систем. Обучение школьников решению текстовых задач методом составления уравнений, неравенств, их систем.

Разные трактовки понятия уравнения и соответствующие им определения. Уравнения и неравенства в средней школе. Равносильность уравнений и неравенств. Понятие следования в курсе школьной математики. Рациональные уравнения и неравенства, их системы. Потеря и приобретение корней в процессе решения иррациональных уравнений. Метод интервалов как наиболее общий подход при решении неравенств школьной математики. Решение текстовых задач методом составления уравнений и неравенств.

2.9. Методика решения трансцендентных уравнений, неравенств и их систем.

Тригонометрические уравнения и неравенства. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Методика обучения школьников решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств.

2.10. Методика изучения начал систематического школьного курса планиметрии.

Значение курса геометрии в развитии учащихся. Пропедевтика и систематический курс геометрии. Методика изучения первых разделов систематического курса геометрии. Понятие равенства фигур в школьном курсе геометрии. Различные подходы к построению школьного курса геометрии. Особенности обучения доказательству первых теорем.

2.11. Методика изучения четырехугольников, их свойств.

Понятие многоугольника. Методика изучения четырехугольников, их свойств и признаков.

2.12. Методика изучения величин в школьном курсе планиметрии.

Методика формирования понятия каждой из геометрических величин (длина, мера угла, мера дуги, площадь) через усвоение соответствующей системы аксиом. Различные подходы к обоснованию формул площади прямоугольника. Методика обоснования формул площадей многоугольников. Обучение школьников решению задач на нахождение величин.

2.13. Методика изучения основных соотношений между элементами треугольника.

Методика изучения соотношений между сторонами и углами треугольников. Решение треугольников.

2.14. Методика изучения подобия фигур.

Определение и признаки подобия треугольников в школьном курсе планиметрии. Теорема Фалеса. Обучение школьников применению метода подобия при доказательстве теорем и решении задач планиметрии.

2.15. Методика изучения основных соотношений в круге. Вписанные и описанные многоугольники.

Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике. Замечательные точки треугольника. Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников.

2.16. Методика формирования у учащихся навыков решения задач по планиметрии. Обучение школьников решению задач на построение циркулем и линейкой.

Методика обучения школьников решению задач планиметрии. Основные методы решения планиметрических задач. Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике. Особенности конструктивных задач на плоскости. Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии.

2.17. Методика изучения первых разделов систематического курса стереометрии. Особенности методики работы с многогранниками.

Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Методика введения многогранников на первых уроках. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них. Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами. Использование систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.).

2.18. Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Методические особенности изучения параллельного проектирования в школе. Изображение плоских и пространственных фигур. Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей. Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии.

2.19. Методика обучения учащихся нахождению углов и расстояний в пространстве.

Методика изучения понятий угла между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями. Двугранный угол. Понятие расстояния между геометрическими фигурами в пространстве. Методика обучения школьников вычислению расстояний и углов между геометрическими фигурами в пространстве.

2.20. Методика изучения многогранников и их свойств.

Роль и место многогранников на разных этапах изучения стереометрии. Особенности изучения призм и пирамид. Правильные многогранники. Обучение школьников решению задач на доказательство и использование свойств многогранников.

2.21. Методика изучения тел вращения, их свойств.

Методика введения понятий цилиндра, конуса и сопровождающих их понятий в школьных учебных пособиях и учебниках стереометрии. Определение сферы и шара. Взаимное расположение сферы и плоскости. Обучение школьников решению задач.

2.22. Методика изучения площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения.

Методика формирования понятия объема в школьном курсе математики. Методика изучения объемов и площадей поверхностей многогранников. Методические особенности доказательства формул для вычисления объемов и площадей поверхностей тел вращения.

2.23. Методика обучения школьников решению задач на комбинации многогранников и тел вращения.

Понятие касательной прямой и плоскости сферы (шара), конуса цилиндра. Комбинации многогранников и тел вращения. Обучение школьников решению задач на комбинации пространственных тел.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов: Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР
1	2	3	4	5	6	7
	6 семестр (36 часов)	*16*	*18*	*2*	*2*	
2.15	**Методика изучения основных соотношений в круге. Вписанные и описанные многоугольники (8 ч)**	**4**	**4**			
2.15.1	Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью.	2				
2.15.2	Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике.	2				
2.15.3	Замечательные точки треугольника.		2			
2.15.4	Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников.		2			
2.16	**Методика формирования у учащихся навыков решения задач по планиметрии. Обучение школьников решению задач на построение циркулем и линейкой (10 ч)**	**6**	**4**			
2.16.1	Методика обучения школьников решению задач планиметрии. Основные методы решения планиметрических задач.	2				
2.16.2	Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике.	2				

2.16.3	Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии. Особенности конструктивных задач на плоскости.	2				
2.16.4	Методика обучения школьников решению задач планиметрии.		2			
2.16.5	Методика решения конструктивных задач.		2			
2.17	**Методика изучения первых разделов систематического курса стереометрии. Особенности методики работы с многогранниками (8 ч)**	**2**	**4**	**2**	**2**	
2.17.1	Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них.	2				
2.17.2	Методика введения многогранников на первых уроках.		2			
2.17.3	Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами. Использование систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.)		2			
2.17.4	Методика решения задач на построение сечений многогранников.			2	2	
2.18	**Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве (8 ч)**	**4**	**4**			
2.18.1	Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Методические особенности изучения параллельного проектирования в школе. Изображение плоских и пространственных фигур.	2				

2.18.2	Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей.	2				
2.18.3	Методика изучения параллельности и перпендикулярности геометрических объектов в пространстве.		2			
2.18.4	Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии.		2			
	Контрольная работа		2			

Лекция 1. Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью

Из Программы

8 класс
Окружность (13 ч)

Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение двух окружностей.

Центральный и вписанный углы. Градусная мера дуги окружности. Угол между касательной и хордой, проходящими через одну точку окружности. Угол между пересекающимися хордами. Угол между секущими, проходящими через точку, лежащую вне окружности. Свойство отрезков пересекающихся хорд. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей в случае, когда касательная и секущая проходят через одну точку, взятую вне окружности.

**Геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.*

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ
К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:
касательная к окружности, секущая;
окружности, касающиеся внешним образом;
окружности, касающиеся внутренним образом;

вписанный и центральный углы.

Учащиеся должны знать:

определения касательной к окружности; секущей к окружности; окружности, вписанной в угол; окружностей, касающихся внешним и внутренним образом, концентрических окружностей; вписанного и центрального углов; градусной меры дуги окружности;

свойства касательной к окружности; отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки; центра окружности, вписанной в угол; вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, опирающихся на диаметр; отрезков пересекающихся хорд; отрезка касательной и отрезков секущей, когда касательная и секущая проходят через одну точку, взятую вне окружности;

признак касательной к окружности;

формулы нахождения угла между касательной и хордой, проходящими через одну точку окружности; угла между пересекающимися хордами, угла между секущими, проходящими через одну точку вне окружности;

случаи взаимного расположения двух окружностей и соотношение их радиусов и отрезка, соединяющего центры окружностей для каждого случая;

теорему о величине вписанного угла; следствия этой теоремы.

Учащиеся должны уметь:

доказывать свойство касательной, признак касательной; свойство касательных к окружности, проходящих через одну точку, лежащую вне окружности; теорему о величине вписанного угла; теорему о свойстве отрезков пересекающихся хорд;

выводить формулу нахождения угла между пересекающимися хордами, между секущими, проведенными из одной точки, лежащей вне окружности;

применять теоремы к решению задач на вычисление и доказательство;

строить при помощи циркуля и линейки касательную к окружности, проходящую через точку, лежащую вне окружности; применять свойства окружностей к решению задач на построение;

решать практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием; анализировать и исследовать полученные результаты.

9 класс

Вписанные и описанные окружности (16 ч)

Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Вписанная и описанная окружности прямоугольного треугольника. Вписанные и описанные четырехугольники.

Формула площади треугольника (описанного многоугольника) через периметр и радиус вписанной окружности ($S = pr$).

Практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, их решение.

*Вневписанные окружности.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

вписанная и описанная окружности;

вписанный и описанный многоугольники.

Учащиеся должны знать:

определения: описанной и вписанной окружностей треугольника (многоугольника); вписанного и описанного четырехугольников (многоугольников);

формулы: радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника; радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; площади треугольника (описанного многоугольника) $S = pr$;

свойства и признаки вписанного четырехугольника, описанного четырехугольника;

теоремы: об окружности, описанной около треугольника; об окружности, вписанной в треугольник.

Учащиеся должны уметь:

доказывать теоремы: об окружности, описанной около треугольника; об окружности, вписанной в треугольник; о свойстве вписанного четырехугольника; о свойстве описанного четырехугольника;

выводить формулы: радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; площади треугольника (описанного многоугольника) $S = pr$;

применять теоремы к решению задач на вычисление и доказательство;

строить вписанную и описанную окружности треугольника при помощи циркуля и линейки;

решать: задачи на построение, практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Известный российский математик И.Ф. Шарыгин считал, что две основные фигуры геометрии: треугольник и окружность. С одной стороны, треугольник и окружность как бы ограничивают учебное пространство. Треугольник – простейший многоугольник и даже простейшая фигура. Окружность – единственный изучаемый в школе представитель класса гладких фигур, она представляет собой иллюстрацию идеи предельного перехода. Между треугольником и окружностью расположены всевозможные многоугольники, исчерпывая тем самым все изучаемые в школе фигуры.

С другой стороны, окружность в некотором смысле фигура более первичная, чем треугольник. Исторически элементарная геометрия – это геометрия циркуля и линейки, а здесь важнее циркуль. Ведь прямую можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса (опять предельный переход, но уже в другом направлении). Подчеркивает роль окружности также известный факт, что все построения на плоскости, выполняемые циркулем и линейкой, могут быть выполнены одним циркулем. С алгебраической точки зрения треугольник является достаточно сложным объектом, он описывается уравнением третьего порядка.

Кроме того, треугольник и окружность задают два важнейших метода геометрии. С треугольником связан метод, который можно назвать «методом ключевого треугольника». В изучаемом объекте выделяется один или несколько треугольников, к исследованию которых сводится данная задача. Можно утверждать, что таким образом решается подавляющее большинство геометрических задач. С окружностью связан ряд технических приемов и методов, в частности, так называемый «метод вспомогательной окружности».

Большинство трудных задач – это задачи про окружности. Уже поверхностное знакомство с олимпиадными задачами показывает, что во многих задачах в условии упоминается окружность; и очень часто отсутствовавшая в условии окружность появляется в решении.

Мы изучим различные варианты взаимодействия окружности и прямой. Напомним определения, широко используемые в этом случае. Прямой называется неопределяемая аксиоматическая геометрическая фигура, представляющая собой ровную прямую линию без начала и конца. Окружностью именуется множество точек, равноудаленно лежащих от общего центра (центра окружности), соединенных общей кривой. Иначе говоря, окружность – это правильная замкнутая кривая, обрисовывающая максимально возможную площадь. Собственно говоря, существуют три варианта взаимного расположения окружности и прямой. В первом случае, прямая пролегает полностью вне заданной окружности, нигде её не пересекая и не затрагивая. Если же прямая затрагивает ровно одну определенную точку из множества на окружности, то эта линия именуется касательной, по отношению к данной окружности. Касательная имеет одно важнейшее свойство. Радиус, проведенный к точке касания, является перпендикуляром к самой прямой. Изобразим окружность с центром O, прямой a (касательной) и точкой касания

К. Так как эта точка в единственном числе, то прямая а касательна данной окружности. А угол при К, образованный радиусом и любой частью прямой, является прямым – равен 90 градусам. Стоит также отметить важную особенность – касательная имеет исключительно одну точку касания. Невозможно провести прямую так, чтобы касательно затронуть две точки на окружности.

Если же наша прямая а проходит через всю окружность, затрагивая её внутреннюю область, то это уже третий частный случай взаимодействия данных фигур. При этом, прямая проходит строго через две точки на окружности – скажем, В и С. Она именуется секущей окружности. Секущая всегда проходит только через две любые точки из множества на кривой. Так как точек в окружности множество, то реализуемо провести бесконечное число секущих (равно как и касательных) для заданной окружности. Внутренняя часть секущей прямой, по сути отрезок ВС, является хордой для окружности. Если секущая проходит через центр окружности, то внутренняя ее часть представлена наибольшей хордой – диаметром. При этом, точки пересечения В и С находятся на наибольшем удалении друг от друга (по свойству диаметра). Легко понять, что противоположный частный случай – это секущая, образующая хорду с бесконечно малым значением, по сути, - это уже касательная. В задачах часто встречается отрезок р – он соединяет наиболее коротким путем подходящую точку на прямой и центр самой окружности. Иначе говоря, р - это отрезок ТО, где Т – точка на прямой ВС. Этот отрезок является перпендикуляром для прямой, его продолжение до самой окружности – ее радиусом. Линейное значение этого отрезка можно вычислить через косинус угла, образованного радиусом и секущей прямой, с вершиной в точке сечения.

В школе рассматриваются формулы длины окружности, S круга и его частей.

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной.

Эта точка называется центром окружности.

Расстояние от точек окружности до центра называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки окружности называется хордой. Хорда, проходящая через центр – диаметр окружности.

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не большем данного от данной точки.

Эта точка называется центром круга, а данное расстояние – радиусом круга.

Границей круга является окружность с тем же центром и радиусом.

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре. Часть окружности, расположенная внутри угла, называется дугой окружности, соответствующей этому центральному углу.

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Обозначение AB – градусная мера дуги $\breve{AB}$.

Теорема. Вписанный в окружность угол, стороны которого проходят через две данные точки окружности, равен половине угла между радиусами, проведенными в эти точки или дополняет эту половину до 180^0.

При доказательстве рассматривают три случая:

- сторона угла является диаметром окружности;
- центр окружности лежит между сторонами угла;
- стороны угла лежат по одну сторону от центра окружности.

Следствие. Все вписанные углы, стороны которых проходят через данные точки окружности, а вершина лежит в одной полуплоскости относительно прямой AC равны; все вписанные углы, опирающиеся на диаметр – прямые.

В общеобразовательной школе рассматривают понятие касательная к окружности.

Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется **касательной.**

Общая точка называется точка касания.

Две окружности, имеющие одну общую точку называются касательными.

Касание может быть внутренним и внешним.

Теорема. Если из точки к окружности проведены две касательные, то отрезки от этой точки до точки касания равны.

Окружность называют **описанной около треугольника**, если она проходит через все его вершины.

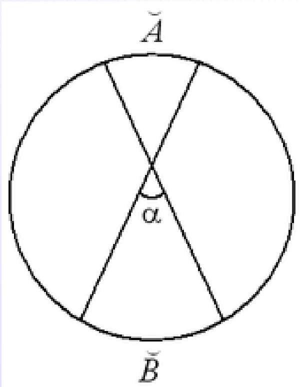
Теорема. Центр окружности, описанной около треугольника является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины его сторон.

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если все его стороны являются касательными к окружности.

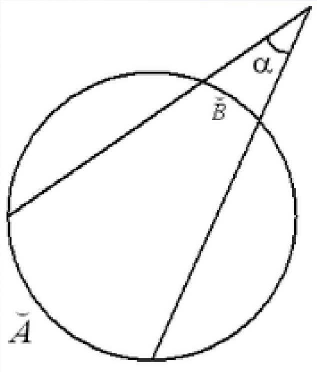
Теорема. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Углы, ассоциированные с окружностью

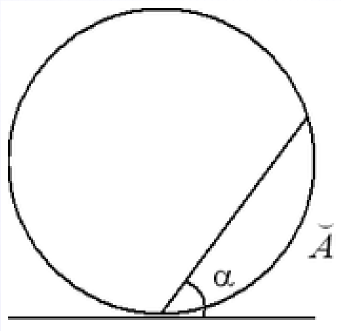
• **Теорема (угол между пересекающимися хордами).** Угол между двумя пересекающимися хордами равен: α=(B̆+Ă)/2.



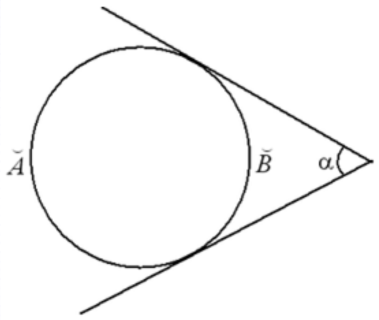
• **Теорема (угол между секущими).** Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен: α=(Ă-B̆)/2.



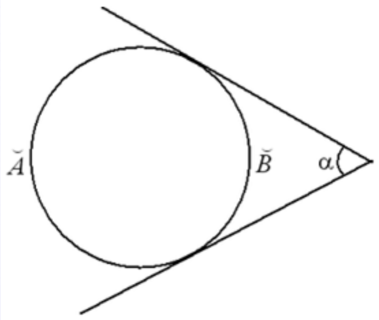
• **Теорема (угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания).** Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен: α=Ă/2.



• **Теорема (угол между касательной и секущей).** Угол между касательной и секущей равен: α=(Ă-B̆)/2.



• **Теорема (угол между касательными).** Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен: α=(Ă-B̆)/2.



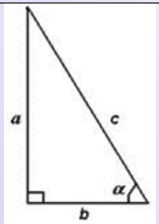
Лекция 2. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике

Содержание *геометрического компонента* VII—IX классов предусматривает последовательное изучение планиметрии, включающее элементы теории параллельных прямых, треугольников, отдельных видов четырехугольников, подобия фигур, тригонометрии треугольника, знакомство с геометрическими построениями. На этом этапе продолжается формирование пространственных представлений, развитие логического мышления учащихся.

В процессе обучения на втором этапе при сочетании индуктивных и дедуктивных элементов усиливается роль теоретических обобщений и выводов. В то же время продолжается использование различных средств наглядности в качестве источника гипотез, а в отдельных случаях и для аргументации. Важно учесть, что обучение математике должно обеспечить учащимся возможность овладения математическим аппаратом, необходимым для изучения других учебных предметов.

Метрические соотношения в треугольнике

Соотношения между сторонами и углами треугольника.

	$sin\alpha = \frac{a}{c}$	В прямоугольном треугольнике синус угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.
$cos\alpha = \frac{b}{c}$	В прямоугольном треугольнике косинус угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.	
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	В прямоугольном треугольнике тангенс угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему.	
$ctg\alpha = \frac{b}{a}$	В прямоугольном треугольнике котангенс угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.	

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Теорема, обратная теореме Пифагора. Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

С помощью теоремы, обратной к теореме Пифагора, можно по длинам сторон определить, является он прямоугольным или нет.

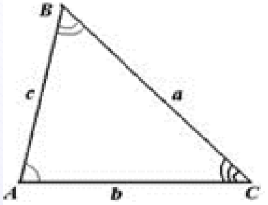
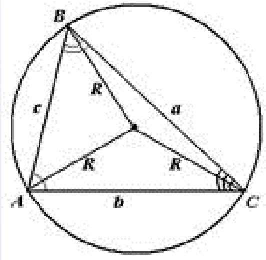
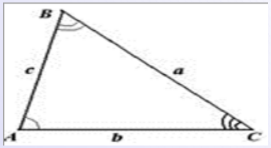
Наиболее интересны прямоугольные треугольники с целочисленными длинами сторон. Так, например, треугольники 3, 4, 5 и далее им подобные 6, 8, 10, далее 9, 12, 15 и т.д.

5, 12, 13 и далее им подобные 10, 24, 26 и т.д.

8, 15, 17 и далее им подобные.

7, 24, 25 и далее им подобные.

Скорее всего таких независимых серий прямоугольных треугольников с целочисленными длинами сторон бесконечно много.

 	Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, $\frac{a}{sin\angle A} = \frac{b}{sin\angle B} = \frac{c}{sin\angle C}$. Следствием к теореме синусов можно считать следующую теорему: Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов и их отношения равны двум радиусам описанной окружности около данного треугольника, $\frac{a}{sin\angle A} = \frac{b}{sin\angle B} = \frac{c}{sin\angle C} = 2R$.
	Теорема косинусов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\angle C$.

Определение. Окружностью называется фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, каждая из которых находится на данном расстоянии r от некоторой точки O этой плоскости. Точка O называется центром окружности, а отрезок, соединяющий точку O с любой точкой окружности, – ее радиусом. Все радиусы окружности имеют длину r.

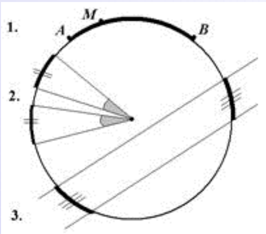
	Определение. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром окружности. Определение. Прямая, пересекающая окружность в двух точках, называется секущей. Определение. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности.

Две произвольные точки A и B окружности разбивают все точки окружности, отличные от A и B, на два множества.

Определение. Фигура, состоящая из объединения каждого из этих множеств с точками A и B называются дугой окружности, а точки A и B – концами двух этих дуг.

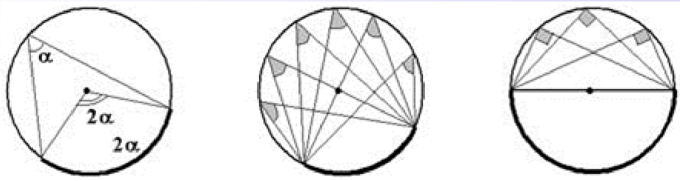
Определение. Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром.

Определение. Угол, вершина которого совпадает с центром O окружности, называется ее центральным углом. Введем понятие градусной меры дуги. Если дуга AB окружности с центром O не больше полуокружности, то градусной мерой этой дуги считают градусную меру центрального угла AOB. Если же дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360^0 - \angle AOB$. Отсюда следует, что градусная мера полуокружности равна 180^0, а сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами A и B равна 360^0. Свойства градусных мер дуг окружностей.

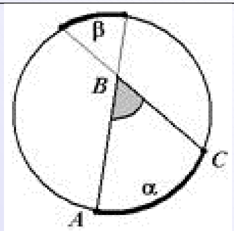
	1. Если точка M лежит на дуге AB, то градусная мера дуги AB равна сумме градусных мер дуг AM и MB. 2. Две дуги одной окружности или двух окружностей с равными радиусами равны тогда и только тогда, когда они имеют равные градусные меры. 3. Две дуги окружности, заключенные между параллельными секущими, равны.

Определение. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Следствие. Вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. В частности, вписанные в окружность углы, опирающиеся на полуокружность, прямые.



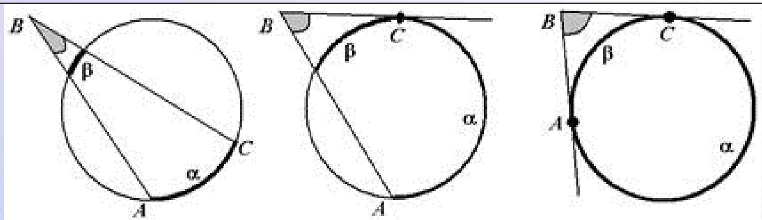
Углы между касательными, хордами и секущими



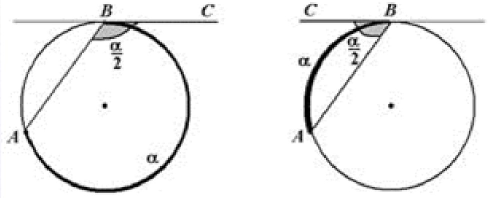
1. Градусная мера угла, вершина которого расположена внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, одна из которых та, на которую опирается данный угол, а другая – на которую опираются продолжения лучей данного угла $\angle ABC = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

2. Градусная мера угла, вершина которого расположена вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, на которые опирается данный угол, причем из большей меры надо вычесть меньшую.

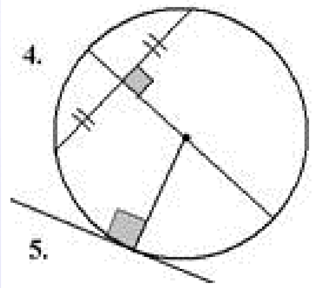
$\angle ABC = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ - Это утверждение верно, если



– оба луча – секущие;
– один луч – секущий, а второй направлен по касательной;
– оба луча направлены по касательным.

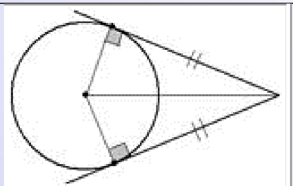


3. Градусная мера угла, одна из сторон которого направлена по хорде, а другая по касательной к окружности, равна половине градусной меры дуги окружности, заключенной внутри угла $\angle ABC = \frac{1}{2}\alpha$.

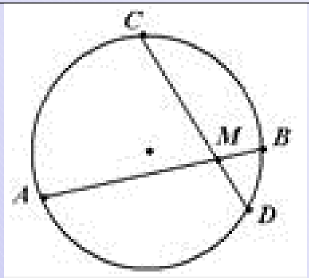


4. Диаметр окружности перпендикулярен к хорде, не проходящей через центр окружности, тогда и только тогда, когда он проходит через середину хорды.
5. Прямая является касательной к окружности тогда и только тогда, когда она проходит через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.

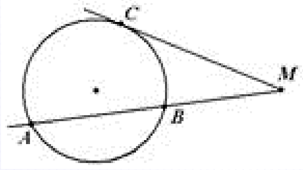
Соотношения между хордами, радиусами и отрезками секущих и касательных.



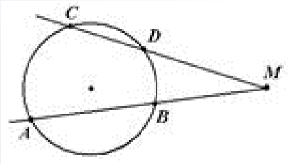
1. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две касательные к данной окружности, то длины отрезков, заключенных между данной точкой и точками касания, равны.



2. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

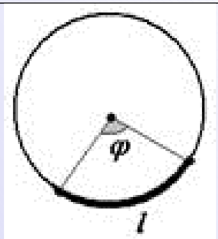


3. Если из точки вне окружности проведены секущая и касательная, то произведение отрезков, заключенных между данной точкой и точками пересечения секущей с окружностью равно квадрату отрезка, заключенного между данной точкой и точкой касания окружности касательной $AM \cdot BM = CM^2$.



4. Если из точки вне окружности проведены две секущие, то произведение длин отрезков, заключенных между данной точкой и точками пересечения с окружностью одной секущей равно произведение длин отрезков, заключенных между данной точкой и точками пересечения с окружностью другой секущей $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Длину окружности можно вычислить по формуле: $L = 2\pi R$.



Длину дуги окружности, имеющую угловую меру φ, можно вычислить по формуле: $l = \frac{\pi R}{180^o} \cdot \varphi^o$,
если угол φ измеряется в градусах; $l = R\varphi$,
если угол φ измеряется в радианах.

Лекция 3. Методика обучения школьников решению задач планиметрии. Основные методы решения планиметрических задач

В методике обучения математике исследование проблемы поиска решения задач получило широкое развитие в работах Д. Пойа, где с помощью системы правил, советов, указаний предлагалось побудить учащихся к самостоятельному поиску способа решения задачи. В русле данного направления можно выделить мотивационный аспект поиска и различные аспекты решения проблемы формирование эвристических приемов (E. Bono, М.А. Родионов, Л.М. Фридман), обучение общим и специальным приемам поиска доказательства (Э.Г. Готман, З.А. Скопец, В.А. Далингер, А.И. Мостовой, Г.И. Саранцев), формирование исследовательских умений и обучение аналитико-синтетическим умениям вести поиск (В.А. Гусев), методологические основы поиска (И. Лакатос (Lakatos I.)) В работах этих авторов заложены: определения понятия математических задача и их классификация, методы решения математических задач, идея единства логической и эвристической составляющих деятельности, идея единства методов анализа и синтеза и др. Школьная практика традиционно свидетельствует о низком уровне умения школьников решать задачи, формализме в знаниях, стремлении школьников запомнить приведенные рассуждения. Большинство учащихся, даже физико-математических классов, затрудняются в осуществлении поиска решения, требующих эвристических рассуждений. В качестве наиболее вероятной причины трудностей в обучении поиску способа решения задачи учащихся школы следует считать несовершенство традиционной методики, которая не учитывает структуру и функции поиска, не рассматривает всех его аспектов.

Одним из путей активизации познавательной деятельности учащихся является обучении различным способам решения геометрических задач. Обучение учащихся решению геометрических задач различными способами и методами дает возможность:

– привить интерес к изучаемому предмету;
– пробуждать их к более вдумчивому изучению геометрию;
– развития критического и математического мышления;
– полнее исследовать свойства геометрических фигур;
– подметить свойство, о котором в задаче ничего не говорится;
– получить интересное обобщение задачи и др.

Д. Пойа в книге «Как решать задачу» выделяет такие пункты решения задачи:

1. Прочти внимательно задачу.
2. Сделай соответствующий условию чертеж.
3. Отметь на чертеже данные.
4. Запиши условие.
5. Запиши заключение.
6. Всесторонне обдумай заключение. Нельзя ли его перефразировать, не изменяя смысла, попробуй сопоставить его с другими (тебе известными) положениями.
7. Попытайся найти связь между заключением и условием. Если эту связь непосредственно установить нельзя, попробуй установить ее посредством других (ране известных тебе) положений.
8. Если и после этого установить связь затрудняешься, то попытайся, согласно предположению истинности заключения, сделать дополнительное построение.
9. Попробуй вести рассуждения с конца выписанной тобой взаимосвязи. Эти рассуждения должны привести к доказательству.

Существуют различные классификации геометрических задач, наиболее распространенной является деление задач **на вычисление, доказательство, построение.** Наибольшую трудность вызывают задачи на доказательство. Г.И. Саранцев отмечает: «Обучение доказательству должно быть одной из целей математического образования и являться составляющей основы конструирования содержания обучения математике в средней школе». В обучении доказательству важная роль отводится обучению поиска доказательства, использованию различных методов доказательства, выбору наиболее простого из них. По мнению Н.В. Метельского, методы доказательства в обучении следует разнообразить, отдавая предпочтение тем из них, которые лучше способствуют обучению школьников самостоятельно доказывать новые математические предложения. Этому требованию в наибольшей степени отвечают **аналитические методы.**

В научной и учебно-методической литературе к аналитическим методам в геометрии относят следующие:

1. Восходящий анализ (совершенный анализ).

2. Нисходящий анализ, который в свою очередь делится на:

а) несовершенный анализ;

б) метод доказательства от противного.

3. Алгебраический метод (метод присутствует только в геометрии).

Сущность метода восходящего анализа заключается в том, что исходным моментом решения задачи является ее заключение, преобразование которого происходит путем отыскания достаточных признаков его справедливости, то есть таких, из верности которых неизбежно следует справедливость заключения задачи или теоремы.

Несовершенный анализ является разновидностью нисходящего анализа. При его использовании мы допускаем, что заключение теоремы верно и теперь, двигаясь от заключения теоремы, строим цепочку следствий, пока не получим заведомо верное равенство (или придем к аксиоме, или ранее доказанной теореме). Несовершенный анализ не является методом доказательства, однако он может подсказать нам путь построения синтетического доказательства.

Методом нисходящего анализа решаются все задачи на построение в планиметрии: мы допускаем, что фигура, которую необходимо построить, существует, делаем ее чертеж и устанавливаем связи между данными в задаче величинами на этом чертеже, что позволяет нам найти план построения данной фигуры.

Метод доказательства от противного также является разновидностью нисходящего анализа. Суть этого метода заключается в том, что решение задачи на доказательство (или теоремы) находится путем получения необходимых условий справедливости положения, противоречащего заключению задачи (теоремы).

Алгебраический метод решения задачи - это такая форма аналитического метода, при котором связи между искомыми и данными устанавливаются с помощью составления уравнений или систем уравнений (реже неравенств или систем неравенств).

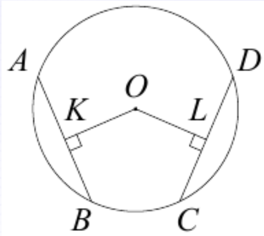
Анализ литературы позволил выделить следующие основные методы решения планиметрических задач.

Метод дополнительных построений (конструктивный)

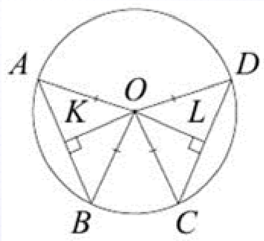
Суть метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче, на котором трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, дополняется новыми (вспомогательными) элементами, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Существуют задачи, в которых дополнительное построение определяет единственный способ решения; в них решение, как правило, начинается с такого построения. В других задачах используется смешанный прием решения, когда дополнительное построение реализует лишь часть решения. В третьих задачах оно применяется как один из возможных методов наряду с другими, хотя может и не являться лучшим. Во многих случаях применение дополнительного построения делает решение задачи устным.

Задача 1. В окружности с центром O проведены две равные хорды AB и CD. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL соответственно. Докажите, что OK и OL равны.



Решение. Проведём радиусы OA, OB, OC, OD. Треугольники AOB и COD равны по трём сторонам. OK и OL -их высоты, проведённые к равным сторонам, следовательно, они равны как соответственные элементы равных треугольников.



Часто решающий задачу интуитивно использует дополнительное построение, но, не выделяя его как метод, может не увидеть целесообразности его применения в других, более сложных или даже аналогичных задачах.

Как узнать, какое дополнительное построение следует выполнять в том или ином случае? Ответ на этот вопрос дает своего рода классификация дополнительных построений, связанная с характерными признаками фигуры, данной в задаче. Тщательный анализ решений достаточно большого количества задач, в которых дополнительное построение используется прямо или косвенно, показал, что целесообразность применения того или иного дополнительного построения зависит от этих признаков.

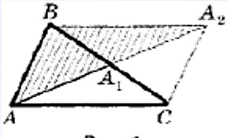
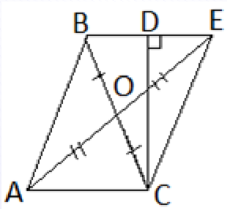


Рис. 1

Дополнительное построение 1. Если в треугольнике задана медиана, то треугольник достраивается до параллелограмма с центром в основании этой медианы (рис. 1).

В зависимости от содержания задачи такое достраивание можно выполнять для одной, двух или даже трех медиан. При этом возможно использование не всего параллелограмма, а лишь его части (например, треугольника ABA_2).

Задача 2. Две стороны треугольника равны 27 и 29, а медиана, проведенная к третьей стороне равна 26. Найти высоту, проведенную к стороне 27.



Дано: треугольник ABC, AB=27, BC=29,BO=26, CD – высота, BO – медиана.

Найти: CD.

Решение.

1. Дополнительное построение: строим OE=BO, ABCE-параллелограмм (по признаку) BC=AE=29. AB=EC=27.

2. $S_\Delta ABC = S_\Delta ABE$. Используем формулу Герона:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

3. $S_{\Delta}ABE =$
$270 = \frac{1}{2} \times 27 \times CD$
$CD = 20$
Ответ: 20.

Дополнительное построение 2. Если дана трапеция, то ее диагональ или боковая сторона параллельно переносятся (рис. 2).

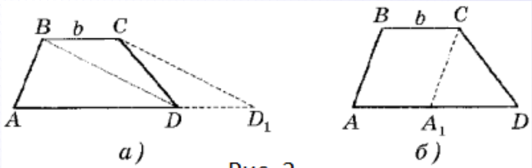
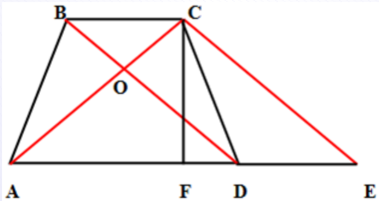


Рис. 2.

Задача 3. Найти высоту равнобедренной трапеции, если её диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.



Дано: ABCD - равнобедренная трапеция, AC и BD – диагонали ACBD
S - площадь трапеции.
Найти: высоту трапеции
Решение.
1. Дополнительное построение: строим CE||BD.
2. Проводим высоту CF - она является медианой и биссектрисой AE=2AF=2h
$Smp = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CF$

$BC + AD = AE$ (т.к. BCED - параллелограмм) BC=DE

$\frac{1}{2}AE \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 2h \cdot h = h^2$.

Находим высоту.

Метод подобия

Две фигуры F и F_1 называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между точками изменяются (увеличиваются или уменьшаются) в одно и то же число раз.

Признаки подобия треугольников:

1) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого;

2) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами равны;

3) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Задача 4. В треугольнике ABC проведены высоты AM и BN. Найти углы треугольника MNC, если $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$.

Решение. Прямоугольные треугольники AMC и BNC имеют равные острые углы при вершине C, следовательно, они подобны. Отсюда заключаем, что в треугольниках MCN и ACB стороны, прилежащие к равному углу при вершине C, пропорциональны, следовательно (по второму признаку подобия), эти треугольники подобны. В подобных треугольниках против соответственных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle NMC = \alpha$ и $\angle MNC = \beta$.

Метод замены

Метод замены широко применяется в алгебре, но не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условии задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

Метод введения вспомогательного неизвестного

Суть метода заключается в том, что, исходя из условия задачи составляют уравнение (или систему уравнений). В качестве вспомогательных аргументов удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих некоторую фигуру.

Метод площадей

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одном из выражений для площади входит, скажем синус какого-либо угла α, то при помощи соотношения $|sin\alpha| \leq 1$ из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное.

Задача 5. Доказать, что произведение любых двух сторон треугольника не меньше произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

Решение. Достаточно приравнять выражения для нахождения площади произвольного треугольника и учесть, что $|sin\alpha| \leq 1$.

Векторный метод

Один из основных аналитических методов решения планиметрических задач является векторный метод.

Примерная схема решения геометрических задач векторным методом:

- Прочитать задачу, выделить условие и требование задачи, выполнить чертёж.

- Ввести в рассмотрение векторы (выбрать базис - два неколлинеарных вектора на плоскости, три некомпланарных вектора в пространстве).

- «Перевести» геометрическое условие задачи на язык векторов. Векторы, необходимые для решения, выразить через базисные.

- «Перевести» геометрическое требование задачи на язык векторов (можно устно).

- С помощью векторной алгебры (преобразований векторных выражений) перейти от векторного условия задачи к требованию.

- Полученному векторному выражению дать геометрическое истолкование.

Отрезок AB, для которого конец A считается первым, а конец B – вторым, называется направленным отрезком, или *вектором*. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым*. Два вектора называются *коллинеарными* (параллельными), если они лежат на параллельных прямых (или совпадают). Пусть начало A вектора и конец B заданы координатами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ тогда числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называются *координатами вектора* AB.

Теорема 1. Два вектора равны тогда и только тогда, когда они имеют равные одноименные координаты.

Теорема 2. Если $\overrightarrow{AB}(x; y)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема 3. Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ образуют треугольник ABC. Разностью двух векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ является вектор $\overrightarrow{CB}$, такой, что $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

Теорема 4. («Правило треугольника»): Определим сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Для этого от конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отложим вектор $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CD}$. Построенный таким образом вектор $\overrightarrow{AK}$ называют суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AK}$.

Теорема 5. («правило параллелограмма») Для построения суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$. Построим четвертую вершину K параллелограмма ABKE. Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AK}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) если k>0, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если k<0, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Задача 1. Точка С – середина отрезка АВ, а О – произвольная точка на плоскости (рис. 1). Докажите, что $\overrightarrow{OC} = 1/2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Решение.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$.

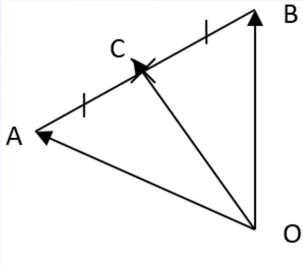


Рис. 1

Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$.

Так как точка C – середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Следовательно, $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, или $\overrightarrow{OC}=1/2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ дано: $M \in BC$ и BM:MC=1:2; $N \in DC$, DN:NC=1:2; $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$.

Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

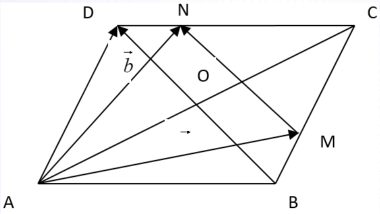


Рис. 2

Решение. Пусть $ABCD$ – параллелограмм (рис. 2), в котором $M \in BC$, BM:MC=1:2, $N \in DC$, DN:NC=1:2, $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$. Выразим $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. $DO=OB$, $DB||MN \Rightarrow NO_1 = O_1M$.

Тогда $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$-$\overrightarrow{AM}=\vec{b}$-$\vec{a}$,

Начало
Содержание
Страница 54 из 187
Назад
На весь экран
Закрыть

$$\overrightarrow{O_1C}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO_1}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1C}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}.$$
$$\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}=\frac{3}{8}\vec{a}-\frac{1}{8}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NC}=\frac{9}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}=\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{9}{8}\vec{a},$$
$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\frac{3}{8}\vec{b}-\frac{1}{8}\vec{a},\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\frac{9}{8}\vec{b}-\frac{3}{8}\vec{a}.$$

Задача 3. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке P и взаимно перпендикулярны. Докажите, что середины сторон AB и CD, центр O и точки P являются вершинами параллелограмма.

Координатный метод

Также к аналитическому методу относиться метод координат с помощью которого можно решать планиметрические задачи.

Примерная схема решения геометрических задач методом координат:

- Прочитать задачу, выделить условие и требование задачи, выполнить чертёж.

- Выбрать систему координат (наиболее рациональным способом).

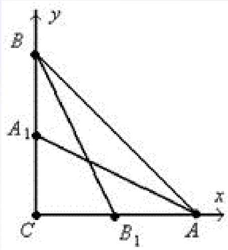
- Записать координаты точек, необходимых для решения. «Перевести» геометрическое условие задачи на язык координат.

- «Перевести» геометрическое требование задачи на язык координат (можно устно).

- С помощью алгебраических преобразований перейти от условия задачи к требованию.

- Полученному алгебраическому выражению дать геометрическое истолкование.

Задача 6. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы острых углов. Вычислите косинус угла между ними.



$B_1(\frac{a}{2}, 0)$; $A_1(0, \frac{a}{2})$

Решение: 1. Введем систему координат так, в этом случае вершины треугольника будут иметь координаты: C(0,0), A(a,0), B(0,a). (Здесь a - длина катета.)

2. Вычислим координаты векторов:

$\overrightarrow{AA_1} = (0 - a; \frac{a}{2} - 0) = (-a; \frac{a}{2})$,

$\overrightarrow{BB_1} = (\frac{a}{2} - 0; 0 - a) = (\frac{a}{2}; -a)$.

3. Теперь используем формулу для вычисления косинуса угла между векторами. (Этот угол совпадает с углом между медианами.)

$$cos(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = \frac{(-a)\cdot\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cdot(-a)}{\sqrt{(-a)^2+(\frac{a}{2})^2}\cdot\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(-a)^2}} = -\frac{4}{5}$$

Метод геометрических мест точек (ГМТ)

При решении задач на построение методом ГМТ рекомендуется иметь в виду следующее.

1. Надо знать свойства основных геометрических фигур.

2. Одна и та же фигура может иметь многие характеристические свойства, каждое из которых в отдельности может вполне определять эту фигуру как ГМТ. Например, окружность можно определить, как ГМТ (плоскости), находящихся от данной точки (этой плоскости) на данном расстоянии, и как ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (исключая концы отрезка), и как ГМТ,

отношение расстояний которых от двух данных точек есть величина постоянная и т.д. Чем больше известно характеристических свойств фигуры, тем больше возможностей узнать эту фигуру при решении задачи.

3. Обычно решение задач на нахождение ГМТ состоит из анализа, построения, доказательства и исследования.

При анализе допускают, что фигура найдена, и рассматривают одну или несколько точек, принадлежащих фигуре. Устанавливают связи этих точек с данными элементами, вытекающие из определения ГМТ.

В основном сущность анализа сводится к установлению таких свойств (связей) искомой фигуры по отношению к данным элементам, которые являются характеристическими для известной фигуры.

В результате анализа (во многих случаях) мы приходим к предположительному решению вопроса.

Анализ задач на построение, решаемых методом ГМТ, сводится, как правило, к нахождению двух отдельных условий, определяющих искомую точку. Иногда сразу выделить эти условия не удается, и тогда нужно обнаружить цепочки, каждая из которых может быть построена исходя из данных задачи и предшествующих точек; завершаться эта цепочка должна искомой точкой. Для каждой из точек этой цепочки в свою очередь ищутся два условия, определяющие ее.

Найденное решение требуется еще обосновать, т.е. следует провести доказательство.

Доказательство сводится к установлению верности двух взаимно обратных предложений:

а) всякая точка M, обладающая характеристическим свойством ГМТ, принадлежит найденной в анализе фигуре;

б) если точка принадлежит найденной фигуре, то она обладает характеристическим свойством искомого ГМТ.

Дело в том, что согласно определению, при отыскании ГМТ нужно найти множество всех точек плоскости, обладающих характеристическим свойством. Найденную фигуру мы вправе считать лишь в том случае искомым ГМТ, если мы убедимся, что на плоскости (в пространстве) нет точек вне найденной фигуры, обладающих характеристическим свойством.

Следует заметить также, что доказательство каждого из вышеуказанных двух предложений может быть заменено соответственно доказательством следующих эквивалентных им предложений:

а) если точка M не принадлежит найденной фигуре, то она и не обладает характеристическим свойством искомого ГМТ;

б) если точка M не обладает характеристическим свойством искомого ГМТ, то она и не принадлежит найденной фигуре.

Исследование состоит в рассмотрении всевозможных случаев решения задач в зависимости от данных элементов и соотношения между ними.

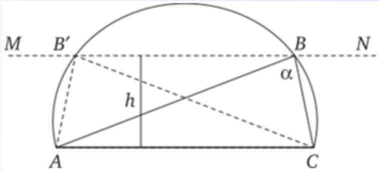
В тех случаях, когда отыскание ГМТ методами синтетической геометрии представляет значительные трудности, целесообразно пользоваться методами аналитической геометрии.

Преподаватель должен сделать ученикам разъяснения, касающиеся вопроса о числе общих точек двух геометрических образов.

Задача 7. Построить треугольник по основанию (a), высоте (h) и углу (α) при вершине.

Решение

Анализ. Допустим, что задача решена (рис.). Искомый треугольник ABC должен удовлетворять следующим трем требованиям: 1) его основание равно a, 2) высота равна h и 3) угол при вершине равен α.



Чтобы удовлетворить первому требованию, достаточно построить отрезок AC, равный a. Если соединим любую точку плоскости с концами отрезка AC, то получим треугольник, который удовлетворяет первому требованию условия задачи. Таких треугольников бесчисленное множество.

Построив основание (AC) искомого треугольника, постараемся определить положение его вершины B. Так как из точки B отрезок AB виден под углом α, то, значит, точка B лежит на дуге сегмента, который построен на отрезке AC, равном a, и вмещает угол α. Построение такого сегмента известно. Соединив любую точку дуги этого сегмента с точками A и C, получим треугольник, который удовлетворяет первому и второму требованиям условия задачи. Таких треугольников также бесчисленное множество.

Вершина B искомого треугольника отстоит от прямой AC на расстоянии h, а потому точка B лежит где-то на прямой MN, которая параллельна прямой AC и отстоит от нее на расстояние h. Такую прямую MN мы можем построить. Если любую точку прямой MN соединим с концами отрезка AC, то получим треугольник, удовлетворяющий первому и третьему требованиям.

Обратим внимание на точки B и B', в которых прямая MN пересекает дугу сегмента AB'BC. Так как, во-первых, точка B лежит на дуге сегмента, то, значит, $\triangle$ABC удовлетворяет первому и второму требованиям. Во-вторых, точка B лежит на прямой MN, значит, $\triangle$ABC удовлетворяет первому и третьему требованиям. А отсюда приходим к выводу, что $\triangle$ABC удовлетворяет всем трем требованиям, изложенным в условии задачи, т.е. является искомым.

Построение

1. Строим отрезок AC, равный a.

2. На отрезке AC строим сегмент, вмещающий угол α.

3. Проводим прямую MN, параллельную отрезку AC и отстоящую от него на расстояние h.

4. Точки B и B', в которых прямая MN пересекает дугу сегмента $AB'BC$, соединяем с точками A и C.

AABC и $AAB'C$ представляют собой искомые треугольники, которые равны по построению.

Доказательство. Правильность выполненного построения вытекает из самого хода построения и подтверждается тем, что найденные треугольники ABC и $AB'C$ удовлетворяют всем требованиям условия задачи.

Исследование. Если отрезок a представляет собой конечную величину и не равен нулю, то всегда можно построить отрезок AC, равный a. Угол α есть внутренний угол треугольника, а потому должен удовлетворять такому условию: $0 < \alpha < 180^0$. Всегда можно построить сегмент, вмещающий этот угол α. Наконец, если $0 < \mathrm{h} < \infty$, то можно построить и прямую MN, которая параллельна отрезку AC и отстоит от него на расстоянии h. Что касается вопроса о том, сколько дуга сектора имеет общих точек с прямой MN, то тут может быть три случая:

1) если прямая MN не пересекает дугу сегмента, задача не имеет ни одного решения;

2) если прямая MN касается дуги сегмента, то задача имеет одно решение;

3) если прямая MN пересекает дугу сегмента, то задача имеет два решения.

Ученик должен ознакомиться с определенным набором достаточно трудных геометрических задач, научиться решать задачи, следуя известным образцам. В геометрии в отличие от алгебры алгоритмов очень мало, почти нет. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач, обобщающих полезный факт, либо иллюстрирующий метод или прием.

В настоящее время существует несколько десятков программных сред для работы с математическими объектами. Все они отличаются только деталями. В Беларуси наиболее известными такими средами являются Живая математика, Математический конструктор, GEONExT, GeoGebra. Две последние среды являются свободно распространяемыми программными продуктами, что способствует их широкому использованию пользователями. Особую популярность сегодня имеет программа GeoGebra. GeoGebra – это программная среда, которая дает возможность создавать динамические («живые») чертежи для использования в обучении геометрии, алгебры, физики и других смежных дисциплинах. Основная идея данной программной среды заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления. Программа GeoGebra позволяет создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых, позволяет строить графики элементарных функций, которые можно динамически изменять варьированием некоторого параметра, входящего в уравнение. В ней доступно построение перпендикулярных и параллельных прямых заданной прямой линии, серединных перпендикуляров, биссектрис углов, касательных. В данной программе можно определять длины отрезков, площади многоугольников и замкнутых кривых и т. д. Кроме того, в этой среде координаты точек могут быть введены вручную на панели объектов, а уравнения кривых, касательных – в строке ввода при помощи соответствующих команд. Программу GeoGebra можно использовать для демонстрации теорем по геометрии, для просмотра в режиме презентации решенных с ее помощью задач. Созданные файлы в данной программе можно экспортировать как интерактивный чертеж в формат web-страницы (для ее корректного отображения следует предварительно установить Java Runtime Enviroment)].

Лекция 4. Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике

Обязательное минимальное количество содержания образования по математике имеет такой список понятий геометрического характера:

Точка. Линии: прямые, кривые. Отрезок. Угол. Прямой угол. Многоугольники: треугольник, прямоугольник, квадрат. Вершины и стороны многоугольника. Окружность и круг. Куб. Шар. Измерение длин. Измерение площади. Вычисление площади прямоугольника. По отношению к данному списку, который определяет минимальное количество содержания, нынешний обычный учебник математики имеет гораздо большее количество геометрических понятий.

В **1 классе** всевозможные геометрические фигуры применяются как наглядный материал для решения заданий на определение, сопоставление, обобщение и классификацию. Целью данных заданий является развитие и формирование наблюдательности учащегося; развитие и формирование умения выделять самые важные признаки предмета. Умения сопоставить два или же большее количество предметов, отмечая при этом подобные и различные признаки и свойства; умение делать простое обобщение на базе выделенных совокупных свойств предметов; умения делить на группы предметы (классификация) на основании выделенных признаков. Эти упражнения считаются ведущими для формирования и развития мыслительных операций (анализ, синтез, сравнение, классификация и др.), а еще умения строить логические размышления. Геометрические понятия, с которыми ученики знакомятся **в 1 классе**: Точка. Линия: кривая и прямая. Отрезок. Ломаная. Звенья ломаной. Вершина ломаной. Замкнутая и незамкнутая ломаная. Многоугольники. Треугольники и четырехугольники. Точка – является неопределяемым понятием геометрии. Обычно с точкой знакомят методом демонстрации - рисуют или прокалывают стержнем шариковой ручки в листочке бумаги. Считают, что точка не имеет ни длины, так и ни ширины, и ни площади.

Линия – так же неопределяемое понятие геометрии. С ней знакомят тоже методом демонстрации. Делают из шнура, или рисуют на доске или на листе бумаги. Прямую линию можно смоделировать, путем сгибания любого листа бумаги. Линия сгиба всегда прямая. Главное свойство прямой линии то, что прямая линия всегда бесконечная. Кривую линию то же удобно моделировать из шнура. Она также как прямая линия бесконечна, если она не замкнутая. Ломаную линию можно смоделировать, при помощи счетных палочек или из металлического складного метра. Ломаная линия имеет конечное количество звеньев. Звено ломаной - отрезок. Точки соединения концов звеньев называют - вершинами ломаной. Звенья ломаной обязательно должны быть соединены последовательно. В программе 1 класса линии рассматривают только на плоскости. Главные взаимоотношения прямой и точки или кривой линии, с которыми детей знакомят в 1 классе: ***1. Через одну точку можно провести множество прямых линий. 2. Через одну точку можно провести множество кривых линий. 3. Через две точки можно провести только одну прямую линию. 4. Через две точки можно провести множество кривых линий.*** Отрезок - часть прямой, которая заключена между двумя точками. Отрезок имеет определенную длину и ее можно измерить. Линейка - является инструментом для измерения длины отрезков. Ломаная и кривая линии могут быть незамкнутыми замкнутыми. Замкнутая ломаная на плоскости ограничивает многоугольник. Многоугольник - это плоская фигура, которая ограниченная замкнутой ломаной. Треугольник - ограничен ломаной из трех звеньев. А значит, имеет три стороны и три вершины. Четырехугольник - ограничен ломаной из четырех звеньев. А значит, имеет четыре стороны и также четыре вершины.

Геометрические понятия, с которыми учащиеся знакомятся **во 2 классе**: Длина ломаной. Прямой угол. Непрямой угол. Квадрат Прямоугольник. Длина ломаной - это сумма всех длин звеньев ломаной. Для того чтобы найти длины ломаной надо измерить длину каждого звена, а результаты измерения сложить. Прямой угол - это угол, который содержит 90^0. Учащихся в начальной школе не знакомят с градусным измерением углов. Понятие прямого угла и дается методом демонстрации. Для того чтобы получить модели прямого угла дети берут лист бумаги, сгибая его подходящим образом. Способом проб дети обучаются находить прямой угол между рисунков иных углов и на все возможных геометрических фигурах. Прикладывают к ним собственную модель, выделяют углы, с ней совпадающие. Модель прямого угла работает как средство проверки такого выбора. В последующем модель прямого угла, выполненную из картона, замещают угольником. Он считается главным чертёжным инструментом для определения и для построения прямых углов. Прямоугольник - это четырехугольник, который имеет все прямые углы. Главное свойство прямоугольника - это то, что противолежащие стороны прямоугольника имеют одинаковые длины. Такое свойство учащиеся определяют путем опытов. Они перегибают свои бумажные модели прямоугольников, совмещают противолежащие стороны. Бывает, что нет возможности применить этот метод, его заменяют измерением длин противолежащих сторон. При приёме такого свойства, учащиеся обязаны уметь по данным длинам двух его сторон чертить прямоугольник, зная, собственно, что углы его – прямые, а 2 иные стороны имеют эти же длины. Квадрат - это прямоугольник, у которого все стороны равные. При использовании этого определения, дети обязаны уметь по данной длине одной стороны чертить квадрат, понимать, что углы его – прямые, а все остальные стороны квадрата имеют ту же длину. Геометрические понятия, с которыми знакомятся учащиеся в **3 классе**, следующие: Периметр многоугольника. Площадь прямоугольника. Круг. Окружность. Диаметр. Радиус. Треугольники равносторонние, разносторонние, равнобедренные. В 3 классе учащихся знакомят с обозначением геометрических фигур заглавными латинскими буквами. Для того чтобы назвать отрезок, надо обозначить точки, которые являются его концами. Периметр многоугольника - это сумма длин всех его сторон. Для того чтобы найти периметр многоугольника надо измерить длины его сторон, а затем сложить полученные результаты измерения.

Периметр квадрата находится умножением на 4 длины его стороны, потому что стороны квадрата имеют одинаковые длины. Периметр прямоугольника находят, складывая суммы длин 2-ух его непротиволежащих сторон, затем умножая итог на 2. Площадь плоской фигуры измеряют численностью стандартных мер площади, укладывающихся вовнутрь фигуры. Стандартные меры площади: мм^2; см^2; дм^2; м^2; км^2. В третьем классе детей знакомят с таким понятием как см^2. Инструмент, который служит для определения площади этих фигур - палетка. Палетка - это листок кальки (или прозрачный пластик), на котором начертана сетка из одинаковых квадратов размером 1 см х 1 см. При измерении площади фигуры с применением палетки, ее кладут на фигуру и подсчитывают количество полных квадратных сантиметров в фигуре, которую измеряют. Для того чтобы получить приблизительное значения площади фигуры, надо поделить на два количество неполных квадратных сантиметров. Для нахождения площади прямоугольника можно использовать способ: надо измерить его ширину и длину (в равных единицах) и найти произведение полученных чисел.

Например: От прямоугольного листа со сторонами 3 см и 5 см отрезали полоску со сторонами 1 см и 3 см. Надо найти площадь оставшейся части. Решение.

1. Найдем площадь данного листа: 3 см $\cdot$ 5 см $=$ 15 см^2.
2. Найдем площадь полоски: 1 см $\cdot$ 3 см $=$ 3 см^2.
3. Найдем разницу площадей: 15 см^2 - 3 см^2 $=$12 см^2.

В младших классах учащихся не знакомят с традиционным определением окружности (множество точек, равноудаленных от центра), знакомство с окружностью происходит способом демонстрации. Связывают его с конкретной практической работой по вычерчиванию окружности при использовании циркуля. Закрытая кривая линия, которую изображает грифель циркуля – это и есть окружность. Окружность (круг) содержит центр: точка O - это середина окружности (круга). Радиус окружности - отрезок, который соединяет центр окружности с какой-нибудь ее точкой. Например: OM - радиус окружности (круга).

Главное свойство радиусов одной окружности: Радиусы одной окружности (круга) всегда равны. Диаметр окружности (круга) - это отрезок, проходящий через центр окружности (круга) и соединяете 2 любые ее точки. Например: диаметр AD. Главное свойство диаметров одной окружности (круга): даметры одной окружности (круга) всегда равны. Отношения между диаметром и радиусом одной окружности (круга): диаметр равен двум радиусам. Треугольники, которые имеют стороны разной длины, называются разносторонними. Треугольники, которые имеют две равные стороны, называются равнобедренными. Среди равнобедренных треугольников имеются и такие, у которых все равные три стороны. Такие треугольники называются равносторонними.

Геометрические понятия, с которыми детей знакомят в 4 классе: диагонали прямоугольника. Прямоугольник и его свойства диагоналей Луч. Числовой луч. Угол. Элементы угла. Прямой, тупой, острый угол. Треугольники, остроугольные и тупоугольные, прямоугольные. Диагональ многоугольника – это такой отрезок, который соединяет противолежащие вершины многоугольника. С диагоналями прямоугольника детей ознакамливают методом показа. Например, отрезки AD и BC - это есть диагонали прямоугольника ABDC. Точка E – является точкой пересечения диагоналей. Главные свойства диагоналей прямоугольника: Диагонали AD и BC имеют одинаковые длины. Отрезки, которые получаются при пересечении диагоналей прямоугольника, всегда равные. Так как квадрат является прямоугольником, то значит, его диагонали имеют те же свойства. Кроме этого, они пересекаются под прямым углом. Луч - это часть прямой, которая ограничена с одной стороны. Луч не имеет конца, но имеет начало. В математике луч, как правило, принято обозначать двумя буквами, например: луч AC. Эта запись означает, что луч имеет началом точку A и «идет» в сторону, которая обозначена буквой C. Числовой луч - это луч, на котором все натуральные числа обозначены точками. Расстояние между точками равно 1 единице измерения (единичный отрезок), она задается условно. Обычно это 1 или 2 клетки. Всякой точке ставится в соответствии число, начиная с числа 1. Началу луча ставится так же в соответствие число 0. Числовой луч играет большую роль при изучении понятия натуральный ряд чисел, что разрешает сравнивать натуральные числа, ориентироваться на их местоположение на числовом луче.

Угол - это фигура, которая образуется двумя лучами, имеющими общее начало. Стороны угла - это лучи, которые образуют угол. Вершина угла - это общее начало лучей, которые образуют угол. Обозначение угла: угол можно назвать по его вершине - угол М. Угол может быть назван тремя буквами - угол МАР, при этом буква, которая стоит в вершине угла, должна находиться в средине. Например: остроугольный треугольник - треугольник, все углы которого острые. Прямоугольный треугольник имеет только один прямой угол. Тупоугольный треугольник имеет только один тупой угол. В треугольнике не может быть больше одного прямого угла. Равносторонний треугольник может быть только остроугольным. Прямоугольный и тупоугольный треугольники могут быть еще и равнобедренными. Разносторонними могут быть и остроугольный, и тупоугольный, и прямоугольный треугольники.

Теоретические основы геометрических построений были разработаны еще в 19 веке швейцарским геометром Я. Штейнером, а в дальнейшем нашли отражение в трудах А. Адлера, Ю. Петерсона, О. Шатуновского, Н.Ф. Четверухина и др.

Вопросам постановки обучения геометрическим задачам на построение посвящены работы многих ученых-методистов, среди которых И.И. Александров, С.И. Шохор-Троцкий, Н.А. Извольский, Д.И. Перепелкин, Ж. Адамар и др.

Так, одним из основоположников методики изучения геометрических построений в средней школе считается И.И. Александров. Ему принадлежат исследования в области теории элементарных построений и внедрения их в практику школьного преподавания геометрии. И.И. Александров первым построил систему конструктивных геометрических задач, выделив методы их решения; ему принадлежит идея использования задач на построение в качестве метода решения геометрических вопросов при обучении этому предмету в школе. С.И. Шохор-Троцкий известен как автор метода целесообразных задач, посредством которого организуется взаимодействие индуктивного и дедуктивного метода в обучении математике. Он является автором комплекта учебных пособий «Геометрия на задачах» для учащихся и учителей, в которых немаловажная роль отведена геометрическим построениям, они используются для обоснования теоретических положений геометрии, здесь же С.И. Шохор-Троцкий применил разработанный им метод целесообразных задач.

Начальный курс математики представляет собой органичное сочетание арифметического, алгебраического и геометрического материала. При этом значение геометрического материала в начальных классах не ограничивается только наглядным пояснением и иллюстрированием каких-либо условий математических задач, а представляет собой самостоятельную область научного знания. В преподавании математики большое значение приобретают вопросы, связанные с обучением младших школьников геометрическим построениям (выполнение наиболее распространенных геометрических построений и обучение решению задач на построение).

Трудность использования геометрического материала в начальный период обуславливается тем, что у учащихся еще недостаточно хорошо сформированы графические умения и навыки, слабы способы и приемы владения чертежными инструментами. Поэтому задачи, связанные с геометрическими построениями должны занимать должное место в обучении младших школьников, ибо они просты по условию, интересны, посильны учащимся, а главное, полезны: развивают мышление, воображение, внимание, целеустремленность, инициативу, приглашают к импровизации и творчеству.

Отмечая роль геометрических построений, следует так же заметить, что ученики в процессе их выполнения наглядно убеждаются в правильности математических утверждений. Так, например, устанавливается факт, что если через одну точку можно провести бесчисленное множество прямых, то через точку на прямой можно провести только одну перпендикулярную данной; или что по трем заданным отрезкам можно построить только один треугольник, отвечающий данным требованиям и т.д.

Задачи на построение дают возможность закреплять ранее изученный материал, устанавливать новые математические факты и способствуют выработке у учащихся навыков правильных рассуждений, поиска решения задач.

Задачей на построение называется предложение, указывающее, по каким данным, какими инструментами, какую геометрическую фигуру требуется построить (начертить на плоскости) так, чтобы эта фигура удовлетворяла определенным условиям. **Решением задачи считается** фактическое построение искомой геометрической фигуры, выполненное в определенной логической последовательности.

Процесс решения задачи на построение геометрических фигур происходит по определенной схеме: анализ, построение, доказательство, исследование. Эту схему не следует рассматривать как безусловно необходимую и неизменную. Не всегда целесообразно строго расчленять решение задачи на отдельные этапы и осуществлять их в указанном порядке. Допустимы и часто естественны отклонения от указанной схемы в соответствии с конкретными особенностями той или иной задачи на построение.

Анализ – это поиск способа решения задачи на построение. На этом этапе устанавливают зависимости между данными фигурами и искомой фигурой, которые позволяли бы в дальнейшем построить эту искомую фигуру (если заведомо ясно, как строить искомую фигуру, то анализ уже не нужен). Обычно при анализе выполняют от руки, на глаз, вспомогательный чертеж набросок, изображающий данные и искомые фигуры примерно в том расположении, которое предусмотрено условием задачи. На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы. Часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения искомой фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи. Чтобы способ решения был пригоден для возможно более широкого выбора данных, следует изображать искомую фигуру в возможно более общем виде. Например, искомый треугольник, если в условии задачи нет специального указания о его форме, надо изображать как разносторонний, четырехугольник - как неправильный и т. п. Чем более общий случай разобран при анализе, тем проще будет провести в дальнейшем полное решение задачи.

Построение состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений (или ранее решенных задач), которые достаточно выполнить, чтобы искомая фигура была построена. Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага с помощью инструментов, принятых для построения.

Доказательство устанавливает, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям. Доказательство обычно проводят в предположении, что каждый шаг построения может быть выполнен.

Исследование – выясняет следующие вопросы:

- всегда ли (т. е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом;

- можно ли и как построить искомую фигуру, если выбранный способ применять нельзя;

- сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Задачи на построение - самые древние математические задачи, они помогают лучше понять свойства геометрических фигур, способствуют развитию графических умений.

Вся история геометрии и некоторых других разделов математики тесно связана с развитием теории геометрических построений. Важнейшие аксиомы геометрии, сформулированные основоположником научной геометрической системы Евклидом около 300 г. до н.э., ясно показывают какую роль сыграли геометрические построения в формировании геометрии. «От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию», «Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать», «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг» – эти постулаты Евклида явно указывают на основное положение конструктивных методов в геометрии древних.

Древнегреческие математики считали «истинно геометрическими» лишь построения, производимые циркулем и линейкой, не признавая «законным» использование других средств для решения конструктивных задач. При этом, в соответствии с постулатами Евклида, они рассматривали линейку как неограниченную и одностороннюю, а циркулю приписывалось свойство чертить окружности любых размеров.

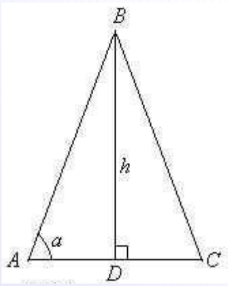
Существует ряд ***простейших геометрических задач на построение***, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются преимущественно в первых главах школьного курса геометрии. К таким задачам относятся: ***деление отрезка пополам; деление угла пополам; построение угла, равного данному; построение треугольника по трем заданным сторонам; построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам; построение треугольника по двум сторонам и углу между ними; построение прямой, проходящей через данную точку и касающейся данной окружности; построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету и др.***

Геометрический материал в 5-6 классах распределён по всему курсу математики. Он составляет содержание так называемого пропедевтического курса геометрии. Пропедевтический этап по количеству часов, отведенных на него, и по объему сведений, получаемых учащимися, небольшой, но строго последовательный и содержательный. Основная роль этого курса - подготовить учащихся к сознательному усвоению систематического курса геометрии, а также к изучению таких смежных дисциплин как география, физика и др. Отметим, что механический перенос материала из учебника старших классов в учебник для младших, не может являться пропедевтикой, так как здесь не учитываются возрастные особенности учащихся и уровень математической подготовки. В пропедевтике геометрии можно выделить три составляющие: фигуры, логика и применение знаний на практике. Все это помогает развить познавательную и исследовательскую деятельность учащихся. При изучении начальных геометрических сведений необходимо учитывать следующие позиции:

- мотивация материала;
- форма изложения (диалог, беседа и проч.);
- наглядность, доступность;
- активная познавательная деятельность.

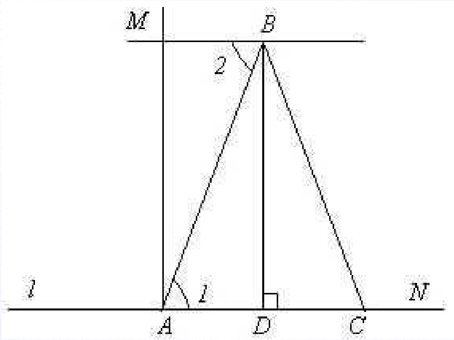
Задача 1. Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание

Анализ. Предположим, что задача решена, и построен равнобедренный треугольник ABC, AB=BC, в котором угол BAC=a и высота BD = отрезку h.



В равнобедренном треугольнике высота BD, проведенная к основанию, является медианой, поэтому AD = DC. Значит, сначала необходимо построить прямоугольный треугольник ABD. Для этого строим угол A, равный углу a, затем нужно найти точку B, лежащую на одной из сторон угла на расстоянии h от другой стороны. Точку B можно получить как пересечение стороны угла и прямой, параллельной другой стороне и проходящей от нее на расстоянии h.

Построение:



Проводим прямую l, выбираем точку A, на луче AN откладываем угол 1, равный данному углу a.

Через точку A проводим прямую, перпендикулярную прямой AN, и на построенной прямой откладываем отрезок $AM = h$ (в той же полуплоскости, в которой построен угол).

Через точку M проводим прямую, параллельную прямой AN, точку ее пересечения со стороной угла обозначаем B.

Из точки B опускаем перпендикуляр BD на прямую AN и откладываем $DC = DA$. Соединяем B и C.

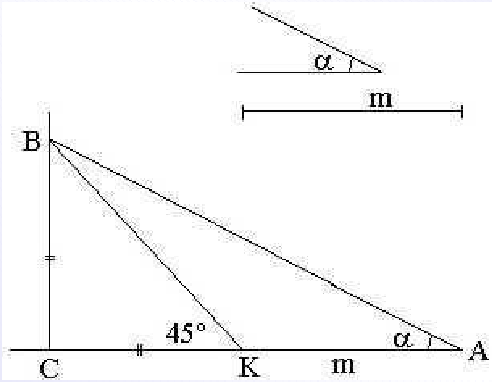
Доказательство: Треугольник ABC - искомый, т.к. он удовлетворяет всем условиям задачи. Действительно, по построению MB || AD, поэтому $\angle 1 = \angle 2$; по построению AM $\perp$ AD, MB || AD, следовательно, AM $\perp$ MB. В прямоугольных треугольниках ABD и BAM общая гипотенуза AB и равные углы 1 и 2, эти треугольники равны, значит BD = AM, т.е. BD = h. Далее, по построению $\angle$C = $\angle$A, поэтому Δ ABD = Δ CBD (по двум катетам), откуда следует, что C = A = a и BD = h.

Исследование: В равнобедренном треугольнике угол при основании острый, поэтому построение возможно, если заданный угол острый.

Построение единственно, т.к. точка B находится единственным образом. Задача имеет только одно решение.

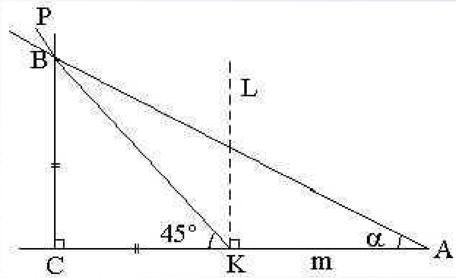
Задача 2. Дан отрезок m и острый угол a. Построить прямоугольный треугольник с углом a, в котором разность катетов равна m.

Анализ. Предположим, что построен прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным a, и разностью катетов, равной m.



Применим метод спрямления: отложим на прямой AC от точки C отрезок CK, равный BC, тогда AK = m. В треугольнике AKB известна сторона AK и два прилежащих угла: BAK = a и BKA = 135°. Такой треугольник можно построить, а точку C найти как основание перпендикуляра из точки B на прямую AK.

Построение (рис.):



На прямой l выбираем точку A и откладываем отрезок $AK = m$. Через точку K проводим перпендикуляр KL к прямой AK.

Проводим биссектрису KP угла, дополнительного к прямому углу AKL. От луча AK откладываем угол KAM, равный данному углу a, точку пересечения с прямой KP обозначаем B.

Из точки B опускаем перпендикуляр BC на прямую AK.

Треугольник ABC - искомый.

Доказательство: $\angle$A = a, $\angle$C=90^0, $\angle$BKC=45^0 (по построению), следовательно, BC=CK и AC=BC=AC-CK=AK=m.

Исследование: Указанное построение выполнимо, если прямая AM пересекает биссектрису KP прямого угла, т.е. если a<45^0. В рассматриваемом случае катет AC больше катета BC, значит, угол a меньше 45^0.

Если задан угол a<45^0, то описанное построение решает задачу. Если задан угол a, 45^0<a<90^0, то выполняем аналогичное построение для угла a'=90^0-a. Треугольник определен однозначно.

Лекция 5. Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии. Особенности конструктивных задач на плоскости

7 класс
Задачи на построение (10 ч)

Операции, выполняемые циркулем и линейкой. Откладывание отрезка, равного данному отрезку. **Элементарные задачи на построение.**

**Исследования в задачах на построение.*

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

знать:

основные операции, выполняемые циркулем и линейкой;

этапы решения задач на построение;

алгоритмы: откладывания отрезка, равного данному отрезку; построения треугольника по трем сторонам; построения угла, равного данному углу; построения биссектрисы угла; деления отрезка пополам; построения перпендикуляра к прямой;

уметь:

откладывать отрезок, равный данному отрезку;

строить: треугольник по трем сторонам; угол, равный данному углу; биссектрису угла; перпендикуляр к прямой; делить отрезок пополам;

применять элементарные задачи на построение к решению геометрических задач на построение;

описывать решение задачи на построение, используя этап построения и этап доказательства.

8 класс
Четырехугольники (21 ч)

Многоугольник. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника. Параллелограмм. Прямоугольник. Ромб. Квадрат. Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника. Трапеция. Средняя линия трапеции.

Центральная и осевая симметрия на плоскости.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

выпуклый многоугольник;

внутренний и внешний углы многоугольника;

соседние стороны и углы многоугольника;

противоположные стороны и углы четырехугольника.

Учащиеся должны знать:

Определения многоугольника; диагонали многоугольника; периметра многоугольника; выпуклого многоугольника; параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции; высоты параллелограмма, ромба, трапеции; средней линии треугольника; равнобедренной и прямоугольной трапеции; средней линии трапеции;

теоремы: о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника; свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, равнобедренной трапеции; Фалеса; свойства средней линии треугольника, средней линии трапеции; свойство медиан треугольника; свойство высот треугольника.

Учащиеся должны уметь:

доказывать теоремы: о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника; признаки и свойства параллелограмма; о свойстве диагоналей прямоугольника, ромба; Фалеса; о свойствах средней линии треугольника, средней линии трапеции; о свойстве медиан треугольника;

применять теоремы при решении геометрических задач на доказательство и вычисление;

решать задачи на построение, связанные с четырехугольниками; практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Площади многоугольников (16 ч)

Площадь многоугольника. Равновеликие геометрические фигуры.

Площадь квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, трапеции, ромба.

Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора. Площадь равностороннего треугольника.

Метод площадей.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

площадь многоугольника;

равновеликие геометрические фигуры.

Учащиеся должны знать:

свойства площадей многоугольников;

формулы площади квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, равностороннего треугольника, трапеции, ромба;

теоремы: Пифагора, обратную теореме Пифагора, о делении треугольника медианой на два равновеликих треугольника.

Учащиеся должны уметь:

выводить формулы площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, прямоугольного треугольника, трапеции, ромба;

доказывать теорему Пифагора;

применять формулы площадей многоугольников при решении задач, теоремы: Пифагора, обратную теореме Пифагора – к решению геометрических задач на доказательство и вычисление;

решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Подобие треугольников (15 ч)

Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников.

Обобщенная теорема Фалеса.

Свойство биссектрисы треугольника. Отношение площадей подобных треугольников.

Метод подобия.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

пропорциональные отрезки;

отношение отрезков.

Учащиеся должны знать:

определения подобных треугольников; коэффициента подобия треугольников;

признаки подобия треугольников;

обобщенную теорему Фалеса;

свойство биссектрисы треугольника;

свойство площадей подобных треугольников.

Учащиеся должны уметь:

доказывать признаки подобия треугольников; обобщенную теорему Фалеса; свойство биссектрисы треугольника; теорему об отношении площадей подобных треугольников;

применять теоремы к решению задач на вычисление и доказательство; **свойства подобных треугольников к решению задач на построение;**

решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием; анализировать и исследовать полученные результаты.

Окружность (13 ч)

Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение прямой и окружности. Взаимное расположение двух окружностей.

Центральный и вписанный углы. Градусная мера дуги окружности. Угол между касательной и хордой, проходящими через одну точку окружности. Угол между пересекающимися хордами. Угол между секущими, проходящими через точку, лежащую вне окружности. Свойство отрезков пересекающихся хорд. Свойство отрезка касательной и отрезков секущей в случае, когда касательная и секущая проходят через одну точку, взятую вне окружности.

***Геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.**

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ
К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

касательная к окружности, секущая;

окружности, касающиеся внешним образом;

окружности, касающиеся внутренним образом;

вписанный и центральный углы.

Учащиеся должны знать:

определения касательной к окружности; секущей к окружности; окружности, вписанной в угол; окружностей, касающихся внешним и внутренним образом, концентрических окружностей; вписанного и центрального углов; градусной меры дуги окружности;

свойства касательной к окружности; отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки; центра окружности, вписанной в угол; вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, опирающихся на диаметр; отрезков пересекающихся хорд; отрезка касательной и отрезков секущей, когда касательная и секущая проходят через одну точку, взятую вне окружности;

признак касательной к окружности;

формулы нахождения угла между касательной и хордой, проходящими через одну точку окружности; угла между пересекающимися хордами, угла между секущими, проходящими через одну точку вне окружности;

случаи взаимного расположения двух окружностей и соотношение их радиусов и отрезка, соединяющего центры окружностей для каждого случая; теорему о величине вписанного угла; следствия этой теоремы.

Учащиеся должны уметь:

доказывать свойство касательной, признак касательной; свойство касательных к окружности, проходящих через одну точку, лежащую вне окружности; теорему о величине вписанного угла; теорему о свойстве отрезков пересекающихся хорд;

выводить формулу нахождения угла между пересекающимися хордами, между секущими, проведенными из одной точки, лежащей вне окружности; применять теоремы к решению задач на вычисление и доказательство;

строить при помощи циркуля и линейки касательную к окружности, проходящую через точку, лежащую вне окружности; применять свойства окружностей к решению задач на построение;

решать практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием; анализировать и исследовать полученные результаты.

9 класс
Соотношения в прямоугольном треугольнике (15 ч)

Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла. Решение прямоугольного треугольника. Основное тригонометрическое тождество:

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Формулы, связывающие синус, косинус, тангенс и котангенс одного и того же угла:

$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30^0, 45^0, 60^0.

Синус, косинус, тангенс и котангенс углов от 0^0 до 180^0.

Формулы: $sin(180^0 - \alpha) = sin\alpha; cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha$.

Формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними: $S = \frac{1}{2}absin\gamma$, формула площади параллелограмма по сторонам и углу между ними: $S = absin\alpha$.

Среднее пропорциональное (среднее геометрическое) в прямоугольном треугольнике.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

*Формула площади выпуклого четырехугольника: $S = \frac{1}{2}d_1d_2sin\varphi$. Теорема Менелая.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла; проекция катета на гипотенузу;

решение прямоугольного треугольника.

Учащиеся должны знать:

основное тригонометрическое тождество: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$;

значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов 30^0, 45^0, 60^0;

формулы: связывающие синус, косинус, тангенс и котангенс одного и того же угла: ; связывающие синусы и косинусы углов, дополняющих друг друга до 180^0: $sin(180^0 - \alpha) = sin\alpha; cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha$; площади треугольника: $S = \frac{1}{2}absin\gamma$; площади параллелограмма: $S = absin\alpha$;

алгоритмы решения прямоугольного треугольника;

теорему о среднем пропорциональном (среднем геометрическом) в прямоугольном треугольнике.

Учащиеся должны уметь:

доказывать теорему о среднем пропорциональном (среднем геометрическом) в прямоугольном треугольнике;

выводить формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}absin\gamma$;

находить: значения тригонометрических функций углов от 0^0 до 180^0, кратных 30^0, 45^0 и 60^0; стороны и углы прямоугольного треугольника по известным сторонам и углам;

решать практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Вписанные и описанные окружности (16 ч)

Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Вписанная и описанная окружности прямоугольного треугольника. Вписанные и описанные четырехугольники.

Формула площади треугольника (описанного многоугольника) через периметр и радиус вписанной окружности ($S = pr$).

Практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, их решение.

*Вневписанные окружности.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

вписанная и описанная окружности;

вписанный и описанный многоугольники.

Учащиеся должны знать:

определения: описанной и вписанной окружностей треугольника (многоугольника); вписанного и описанного четырехугольников (многоугольников);

формулы: радиуса окружности, описанной около прямоугольного треугольника; радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; площади треугольника (описанного многоугольника) $S = pr$;

свойства и признаки вписанного четырехугольника, описанного четырехугольника;

теоремы: об окружности, описанной около треугольника; об окружности, вписанной в треугольник.

Учащиеся должны уметь:

доказывать теоремы: об окружности, описанной около треугольника; об окружности, вписанной в треугольник; о свойстве вписанного четырехугольника; о свойстве описанного четырехугольника;

выводить формулы: радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; площади треугольника (описанного многоугольника) $\mathrm{S} = \mathrm{pr}$;

применять теоремы к решению задач на вычисление и доказательство;

строить вписанную и описанную окружности треугольника при помощи циркуля и линейки;

решать: задачи на построение, практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Теорема синусов. Теорема косинусов (16 ч)

Теорема синусов: $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$.

Формула площади треугольника: $S = \frac{abc}{4R}$.

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$. Следствия из теоремы косинусов: нахождение косинуса угла треугольника, заданного тремя сторонами, свойство диагоналей параллелограмма: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$. Формула Герона.

Решение треугольников.

Практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, их решение.

*Формула медианы треугольника: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, формула биссектрисы треугольника: $l_c^2 = ab - a_1b_1$.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ
УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термин и использовать понятие: решение треугольника.

Учащиеся должны знать:

формулы: $\frac{a}{sin\alpha} = 2R$, $S = \frac{abc}{4R}$ для треугольника; $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ для параллелограмма и формулу Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ для нахождения площади треугольника;

теоремы: синусов; косинусов и следствия из теоремы косинусов.

Учащиеся должны уметь:

доказывать теорему синусов и теорему косинусов;

находить косинус угла треугольника, заданного тремя сторонами;

применять указанные теоремы к решению задач на вычисление и доказательство;

решать практико-ориентированные задачи (на нахождение расстояния до недоступной точки, высоты объекта и иные) и задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Правильные многоугольники (16 ч)

Правильный многоугольник. Окружность, описанная около правильного многоугольника, и окружность, вписанная в правильный многоугольник. Правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник.

Длина окружности и площадь круга. Число π. Сектор и сегмент круга. Длина дуги, площадь сектора и сегмента.

Практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, их решение.

*Золотое сечение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

правильный многоугольник;

окружность, круг, сектор, сегмент.

Учащиеся должны знать:

определения: правильного многоугольника; сектора и сегмента круга;

формулы: для нахождения радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей по заданной стороне правильного треугольника, четырехугольника, шестиугольника; длины окружности и площади круга;

теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника и об окружности, вписанной в правильный многоугольник;

алгоритмы нахождения: длины дуги данной окружности по градусной мере этой дуги; площади сектора данного круга по градусной мере его дуги; радиуса описанной и радиуса вписанной окружностей правильного n-угольника, заданного его стороной;

алгоритмы построения следующих правильных многоугольников, вписанных в данную окружность: правильного треугольника, правильного четырехугольника, правильного шестиугольника.

Учащиеся должны уметь:

находить: радиус окружности, описанной около правильного n-угольника; радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник; длину дуги заданной окружности; площадь сектора заданного круга;

применять указанные теоремы и формулы к решению задач на вычисление и доказательство;

строить при помощи циркуля и линейки вписанные в данную окружность правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник;

решать практико-ориентированные задачи и задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Итак, в результате изучения планиметрии, учащиеся должны:

– понимать смысл терминов: задача на построение, условие и требование задачи, этапы решения задачи (анализ, построение, доказательство, исследование);

– уметь решать основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки;

– познакомиться с основными методами решения задач на построение (метод ГМТ, метод геометрических преобразований, алгебраический метод и др.);

– знать определения понятий движения, преобразования подобия и отдельных их видов (осевая и центральная симметрия, параллельный перенос и поворот, гомотетия), уметь использовать их при доказательстве теорем и решении задач;

– знать и уметь доказывать общие свойства движений, преобразований подобия;

– знать и уметь доказывать свойства различных видов движений и гомотетии;

– ознакомиться с применением метода геометрических преобразований к решению задач на построение, доказательство и вычисление.

Древнегреческие математики считали «истинно геометрическими» лишь построения, производимые лишь циркулем и линейкой, не признавая «законным» использование других средств для решения конструктивных задач. При этом, в соответствии с постулатами Евклида, они рассматривали линейку как неограниченную и одностороннюю, а циркулю приписывалось свойство чертить окружности любых размеров. **Одной из самых ценных сторон конструктивных задач** является то, что они **развивают поисковые навыки решения практических проблем, приобщают к посильным самостоятельным исследованиям, способствуют выработке конкретных геометрических представлений, а также более тщательной обработке умений и навыков.** А это в свою очередь усиливает прикладную и политехническую направленность обучения геометрии. Задачи на построение не допускают формального к ним подхода, являются качественно новой ситуацией применения изученных теорем и, таким образом, дают возможность осуществлять проблемное повторение. Такие задачи успешно могут быть связаны с новыми идеями школьного курса геометрии (преобразованиями, векторами).

Геометрические построения могут сыграть серьезную роль в математической подготовке школьника. Ни один вид задач не дает столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащегося, как геометрические задачи на построение. Эти задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним и формального восприятия их учащимися. Задачи на построение удобны для закрепления теоретических знаний учащихся по любому разделу школьного курса геометрии. Решая геометрические задачи на построение, учащийся приобретает много полезных чертежных навыков.

В математической литературе встречаются различные подходы к классификации конструктивных геометрических задач. Одной из наиболее распространенных является **классификация геометрических задач на построение по методам их решения**. Впервые такая классификация была предложена И. И. Александровым в его работе «Методы решений геометрических задач на построение» (1883 г.). До этого как в России, так и в других странах, культура решения таких задач стояла на весьма невысоком уровне: геометрические задачи на построение решались без системы, без общих методов. И. И. Александров классифицировал геометрические задачи на построение в зависимости от главных методов решений, выделив следующие: **метод геометрических мест; метод подобия; метод симметрии; метод спрямления; метод параллельного переноса; метод вращения около точки; метод вращения около оси; метод инверсии (или метод обратных фигур); алгебраический метод.**

Крупнейший отечественный специалист по конструктивной геометрии профессор Н. Ф. Четверухин предложил следующую классификацию геометрических задач на построение по методам их решения: **метод геометрических мест; метод геометрических преобразований (симметрия, вращение, параллельное**

перенесение, гомотетия, инверсия); алгебраический метод. Последняя классификация геометрических задач на построение используется многими авторами учебников и задачников.

Метод геометрических мест

Метод основывается на понятии геометрического места точек; оно является одним из важнейших понятий геометрии, играет большое методическое значение, широко используется при изучении аналитической геометрии в высшей школе. Задачи на геометрические места точек являются опорными при решении геометрических задач на построение этим методом, а также составляют исключительно интересный материал при доказательстве теорем самими учащимися. Кроме того, в задачах на геометрические места естественно используется идея движения, так как различные положения точек геометрического места можно рассматривать как след от перемещения точки по плоскости. Подобные задачи иллюстрируют функциональную зависимость между переменными величинами.

Геометрическим местом точек (ГМТ) на плоскости называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Если фигура является геометрическим местом точек, то любая точка этой фигуры обладает указанным свойством и все точки с указанным свойством принадлежат этой фигуре.

Сущность метода геометрических мест заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к отысканию некоторого множества точек, подчиненного двум независимым условиям. Отбрасываем одно из этих условий и ищем множество всех точек, удовлетворяющих второму условию. Пусть это будет фигура Φ_1. Затем отбрасываем второе условие и ищем множество всех точек, удовлетворяющих первому условию; это будет фигура Φ_2. Обоим условиям будет удовлетворять каждая точка пересечения фигур Φ_1 и Φ_2, поэтому каждая точка такой фигуры дает возможность найти некоторое решение задачи.

Пример. Построить точку M, находящуюся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии d от данной прямой l.

Решение. Искомая точка M должна удовлетворять двум условиям:

1) она должна находиться от данной (фиксированной) точки A на данном расстоянии a;

2) искомая точка должна находиться на данном расстоянии d от фиксированной прямой l.

Отбросив условие (2), получим множество точек, удовлетворяющих условию (1); они образуют окружность с центром в точке A и радиусом a - фигуру Φ_1. Условию (2) удовлетворяют все точки, лежащие на двух прямых, которые параллельны данной прямой l и находятся от нее на заданном расстоянии d. Эти две прямые образуют фигуру Φ_2.

Таким образом, точка M, удовлетворяющая обоим требованиям задачи, должна принадлежать обеим фигурам Φ_1 и Φ_2, то есть их пересечению. Так как окружность Φ_1 может пересекать пару параллельных прямых Φ_2 не более чем в четырех точках, то задача может иметь от нуля до четырех решений в зависимости от данных расстояний a, d, взаимного расположения точки A и прямой l.

Итак, **метод геометрических мест** применяется в тех случаях, если условие задачи может быть расчленено на два независимых требования, каждое из которых определяет какое-либо геометрическое место. Кроме того, метод определяет и сам способ построения искомой фигуры, а вместе с тем, как показывает рассмотренный пример, облегчает исследование задачи относительно числа ее решений.

Для применения метода геометрических мест к решению задач на построение важно создать у учащихся правильное представление о разнообразии типов тех множеств точек, которые подпадают под понятие геометрического места. Геометрическое место может быть линией, состоять из нескольких линий, представлять собой часть линии (например, отрезок, дугу) или состоять из нескольких таких частей и т.д. При решении даже сравнительно несложных задач методом геометрических мест требуется сравнительно большое их число. В связи с этим возникает вопрос о перечне тех геометрических мест, которые желательно рассмотреть в школьном курсе геометрии.

Аксиомы конструктивной геометрии

Фигурой в геометрии называют любую совокупность точек (содержащую по крайней мере одну точку).

Будем предполагать, что в пространстве дана некоторая плоскость, которую назовем основной плоскостью. Ограничимся рассмотрением только таких фигур, которые принадлежат этой плоскости.

Одна фигура называется частью другой фигуры, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре. Так, например, частями прямой будут: всякий, лежащий на ней отрезок, лежащий на этой прямой луч, точка на этой прямой, сама прямая.

Соединением двух или нескольких фигур называется совокупность всех точек, принадлежащих хотя бы одной из этих фигур.

Пересечением или общей частью двух или нескольких фигур, называется совокупность всех точек, которые являются общими для этих фигур.

Разностью двух фигур Φ_1 и Φ_2 называется совокупность всех таких точек фигуры Φ_1, которые не принадлежат фигуре Φ_2.

Может оказаться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. В этом случае говорят, что пересечение (или соответственно разность) данных фигур есть пустое множество точек.

Раздел геометрии в котором изучаются геометрические построения, называют **конструктивной геометрией**. ***Основным понятием конструктивной геометрии является понятие построить геометрическую фигуру.***

Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то при этом естественно подразумевается, что она уже изображена, начерчена, построена. **Основное требование конструктивной геометрии состоит в следующем:**

Каждая данная фигура построена.

(не следует смешивать понятия «данная фигура» и «фигура, заданная (или определенная) такими-то данными ее элементами»).

Если построены две (или более) фигуры, то построено и соединение этих фигур.

Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.

Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.

Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.

Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

Задачей на построение называется предложение, указывающее, по каким данным, какими инструментами, какую геометрическую фигуру требуется построить (начертить на плоскости) так, чтобы эта фигура удовлетворяла определенным условиям.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки – значит свести ее к совокупности пяти элементарных построений, которые заранее считаются выполнимыми:

1. Если построены две точки A и B, то построена прямая AB, их соединяющая, а также отрезок AB и любой из лучей AB и BA (аксиома линейки).

2. Если построена точка O и отрезок AB, то построена окружность с центром в точке O и радиусом AB, а также любая из дуг этой окружности.

3. Если построены две прямые, то построена точка их пересечения (если она существует).

4. Если построена прямая и окружность, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

5. Если построены две окружности, то построена любая из точек их пересечения (если она существует).

Сведение решения каждой задачи к элементарным построениям делает решение громоздким. Поэтому часто решение задачи сводят к так называемым основным построениям. Выбор некоторых построений в качестве основных в известной степени произволен. Например, ***в качестве основных построений можно рассмотреть следующие задачи:*** деление данного угла пополам; построение отрезка, равного данному; построение угла, равного данному; построение параллельной прямой, построение перпендикулярной прямой, деление отрезка в данном отношении; построение треугольника по трём сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам; построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

Решить задачу на построение – значит найти все её решения.

Фигуры, удовлетворяющие условию задачи, могут различаться как формой, так и размерами, положением на плоскости. Различия в положении на плоскости принимаются или не принимаются в расчёт в зависимости от формулировки самой задачи на построение, а именно в зависимости от того, предусматривает или не предусматривает условие задачи определённое положение искомой фигуры относительно каких-либо данных фигур.

Рассмотрим **задачу:** построить треугольник по двум сторонам и углу между ними. Точный смысл этой задачи состоит в следующем: построить треугольник так, чтобы две стороны его были соответственно равны двум данным отрезкам, а угол между ними был равен данному углу. Здесь искомая фигура (треугольник) связана с данными фигурами (два отрезка и угол) только соотношениями равенства, расположение же искомого треугольника относительно данных фигур безразлично. В этом случае легко построить треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи. Все треугольники, равные треугольнику ABC, также удовлетворяют условию поставленной задачи. Однако нет никакого смысла рассматривать эти треугольники как различные решения данной задачи, ибо они отличаются один от другого только положением на плоскости, о чем в условии задачи ничего не сказано. Будем поэтому считать, что задача имеет единственное решение.

Итак, если условие задачи не предусматривает определённого расположения искомой фигуры относительно данных фигур, то условимся искать только все неравные между собой фигуры, удовлетворяющие условию задачи. Можно сказать, что задачи этого рода решаются «с точностью до равенства». Это означает, что задача считается решённой, если: 1) Построено некоторое число неравных между собой фигур Φ_1, Φ_2, … Φ_n, удовлетворяющие условиям задачи, и 2) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, равна одной из этих фигур. При этом считается, что задача имеет n различных решений.

Рассмотрим теперь **задачу** несколько иного содержания: построить треугольник так, чтобы одной его стороной служил данный отрезок BC, другая сторона была равна другому данному отрезку l, а угол между ними был равен данному углу α.

В этом случае условие задачи предусматривает определённое расположение искомого треугольника относительно одной из данных фигур (именно относительно отрезка BC). В связи с этим мы иначе смотрим на вопрос о построении всех решений этой задачи. Может существовать до четырёх треугольников, удовлетворяющих условию этой задачи. Они равны между собой, но по-разному расположены относительно данной фигуры BC. В этом случае полное решение задачи предусматривает построение всех этих треугольников. Считается, что задача имеет до четырёх различных решений, различающихся своим расположением относительно данной фигуры.

Итак, если условие задачи предусматривает определённое расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то ***полное решение состоит в построении всех фигур, удовлетворяющих условию задачи*** (если такие фигуры существуют в конечном числе.

Вопрос о выборе той или иной ***схемы решения конструктивной задачи является чисто методическим вопросом***.

Решение геометрической задачи может быть проведено, например, по следующей схеме:

1. Устанавливается конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных.

2. Для каждого случая дается ответ на вопрос, имеет ли задача решение и сколько.

3. Для каждого случая, когда задача имеет решение, дается способ нахождения (с помощью данных геометрических инструментов) каждого из возможных решений или устанавливается, что оно не может быть получено данными средствами.

При решении конструктивных задач в учебных условиях рекомендуется пользоваться известной схемой решения, состоящей из следующих четырех этапов: 1) анализ; 2) построение; 3) доказательство; 4) исследование.

Конечно, эта схема не является безусловно необходимой и неизменной, не всегда удобно и целесообразно строго разделять отдельные ее этапы и в точности осуществлять их в указанном порядке. Но по большей части указанная схема серьезно помогает при решении конструктивных задач. Рассмотрим каждый этап этой схемы.

Анализ. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью построения чертежа-наброска, изображающего данные и искомые примерно в том расположении, как это требуется условием задачи. Этот чертеж можно выполнять «от руки». Иногда построение чертежа сопровождают словами: «предположим, что задача уже решена».

На вспомогательном чертеже следует выделить данные элементы и важнейшие искомые элементы. Практически часто удобнее начинать построение вспомогательного чертежа не с данной фигуры, а с примерного изображения искомой фигуры, пристраивая к ней данные так, чтобы они находились в отношениях, указанных в условии задачи. Например, если нужно построить треугольник по биссектрисе, медиане и высоте, проведенным из одной вершины, то при анализе удобнее сначала изобразить произвольный треугольник, а затем уже проводить в нем указанные в задаче линии.

Если вспомогательный чертеж не подсказывает непосредственного способа построения искомой фигуры, то пытаются обнаружить какую-либо часть искомой фигуры или вообще некоторую фигуру, которая может быть построена и которой затем можно воспользоваться для построения искомой фигуры. В более общем случае рассуждение ведется следующим образом. Подмечают, что построение искомой фигуры Φ сводится к построению некоторой другой фигуры Φ^1. Затем подмечают, что построение фигуры Φ^1 сводится к построению фигуры Φ^2 и т.д. После конечного числа шагов можно прийти к некоторой фигуре Φ^n, построение которой уже известно.

Полезно учесть следующие частные замечания, помогающие при проведении анализа.

1) Если на вспомогательном чертеже не удается непосредственно заметить необходимые для решения связи между данными и искомыми элементами, то целесообразно ввести в чертеж вспомогательные фигуры: соединить уже имеющиеся точки прямыми, отметить точки пересечения имеющихся линий, продолжить некоторые отрезки и т.д. Иногда бывает полезно проводить параллели или перпендикуляры к уже имеющимся прямым.

2) Если по условию задачи дана сумма или разность отрезков или углов, то эти величины следует изобразить на вспомогательном чертеже, если их еще нет на нем.

3) В процессе проведения анализа бывает полезно вспомнить теоремы и раннее решенные задачи, в которых встречаются зависимости между элементами, сходные с теми, о которых говориться в условии рассматриваемой задачи.

4) Проводя анализ на основании изучения некоторого чертежа – наброска, мы связываем свои рассуждения в известной мере с этим чертежом. Например, искомый треугольник, если в условии задачи нет специального указания о его форме, надо изображать как разносторонний, четырехугольник – как неправильный и т.п. Чем более общий случай мы разберем при анализе, тем проще будет провести в дальнейшем полное решение задачи.

2. **Построение.** Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений (или раннее решенных задач), которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого его шага с помощью инструментов, принятых для построения.

3. **Доказательство.** Доказательство имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Доказательство обычно проводится в предположении, что каждый шаг построения действительно может быть выполнен.

4. **Исследование.** При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно ещё выяснить следующие вопросы:

всегда ли (т.е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом;

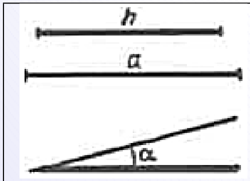
можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить;

сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Рассмотрение всех этих вопросов и составляет исследование. Таким образом, исследование имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений.

Иногда ставится также задача: выяснить при каких условиях искомая фигура будет удовлетворять тем или иным дополнительным требованиям. Например, может быть поставлен вопрос: при каких условиях искомый треугольник будет прямоугольным или равнобедренным? Или такой вопрос: при каких условиях искомый четырёхугольник окажется параллелограммом или ромбом?

Задача. Построить треугольник по высоте, одной из боковых сторон и разности углов при основании.

	Дано: h – высота, a – боковая сторона, α – разность углов при основании

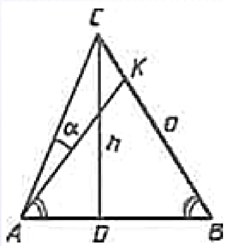


Рисунок 1.

Анализ:

Пусть ΔABC – искомый: AB – основание, CD – высота h, BC – боковая сторона a Теперь нужно отметить на рисунке заданный угол α.

Для этого от большего угла при основании AB надо отнять меньший угол (рис. 1).

Будем считать $\angle A > \angle B$. Тогда, если $\angle BAK = \angle B$, то $\angle KAC$ и есть угол α.

Можно сразу установить некоторые условия, которым должны удовлетворять эти элементы. Так как h и a являются соответственно катетом и гипотенузой ΔCDB, то $h < a$. (1)

Что касается угла α, то, каковы бы ни были A и B, их разность, очевидно, есть острый угол, т.е. $\alpha < 90^0$ (2)

Можно ли сразу по данным элементам построить искомый треугольник. Очевидно, нет. Но может быть, можно построить какую-либо часть искомой фигуры? Приглядываясь к рис. 1, видим, что в прямоугольном треугольнике BCD катет CD и гипотенуза BC являются данными. Поэтому этот треугольник можно построить. Тем самым определится $\angle B$, а, зная $\angle\alpha$, следовательно, сумеем к ΔBCD пристроить ΔACD и тем самым полностью построить искомую фигуру. План построения найден.

Перейдем к построению. Будем записывать шаги построения, ссылаясь на номера элементарных построений (рис.2).

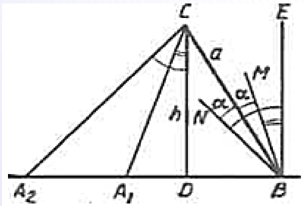


Рисунок 2.

1. Строим прямоугольный треугольник BCD по гипотенузе BC=a и катету CD=h.
2. Строим $\angle CBM = \angle CBN = \alpha$

3. Проводим BE перпендикулярно DB.

4. Строим $\angle DCA_1 = \angle MBE$

5. Строим $\angle DCA_2 = \angle NBE$

Полученные треугольники A_1BC и A_2BC – искомые.

Доказательство:

1. В каждом из этих двух треугольников высота CD, опущенная на основание A_1B или A_2B, равна по построению данному отрезку h.

2. В каждом из этих двух треугольников боковая сторона BC равна по построению данному отрезку a.

3. Рассмотрим теперь разность углов при основании A_1B или A_2B. В треугольнике A_1BC большим углом является $\angle A_1$. Тогда $\angle A_1 - \angle B = (90^0 - \angle A_1CD) - \angle B = (90^0 - \angle MBE) - \angle B = MBA_1 - \angle B = \angle CBM = \alpha$. В треугольнике A_2BC большим углом является $\angle B$, поэтому находим разность $\angle B - \angle A_2$ и доказываем аналогично, что и она равна α.

Исследование:

Установим, при каких условиях можно выполнить указанные шаги построения. Очевидно, что первые три шага при условиях (1) и (2) выполнить можно всегда.

А вот последние два шага нуждаются в дополнительном исследовании. Дело в то, что каждый из них состоит из двух построений: построение угла, равного указанному (соответственно $\angle MBE$ и $\angle NBE$), и построения точки пересечения полученного луча с прямой BD. Построение угла, равного данному, всегда возможно, а вот нахождение точки пересечения полученного луча с прямой нуждается в исследовании.

Если луч BM проходит внутри угла CBE, то 4-й шаг всегда выполним.

Если же BM проходит вне указанного угла (на рис. 2 справа от BE), то здесь возможны три случая:

1. Луч BM проходит правее так, что $\angle BEM \geq \angle DCB$, т.е. $\alpha-(90^0-\angle B)\geq 90^0-\angle B$, или $\alpha+2\angle B\geq 180^0$. В этом случае луч CA_1 пройдёт вне $\angle DCB$, поэтому треугольник

A_1BC построить нельзя.

2. Если BM проходит правее BE, так, что $\angle BEM < \angle DCB$, то CA_1 пройдет внутри $\angle DCB$, тогда треугольник A_1BC будет тупоугольным.

3. Если же BM совпадет с BE, то треугольник A_1BC совпадает с треугольником DCB. Тогда получаем в качестве решения прямоугольный треугольник.

Таким же образом исследуем 5-й шаг.

Если луч BN проходит внутри $\angle DBC$, то построить треугольник A_2BC можно. Если же BN совпадает с BD или проходит вне $\angle DBC$, то угол $NBE \geq 90^0$, поэтому CA_2 не пересечет DB слева от D, следовательно, построить треугольник A_2BC нельзя.

Итак, видим, что при разных соотношениях между углами α и B задача может не иметь решения, иметь одно решение и иметь два решения. Задача решена.

Лекция 6. Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них

Из Программы:
10 класс

ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ (10 ч)

Предмет стереометрии. Пространственные тела. Многогранники: куб, параллелепипед, призма, прямая призма, правильная призма, пирамида, правильная пирамида.

Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом. Построение сечений многогранника плоскостью на основании аксиом стереометрии и следствий из них.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о пространственных телах стереометрии: куб, параллелепипед, призма, прямая призма, правильная призма, пирамида, правильная пирамида;

знать: аксиомы и следствия из них;

уметь:

• применять аксиомы и следствия из них для решения задач;

• строить простейшие сечения многогранников плоскостью на основании аксиом и следствий их них.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (20 ч)

Параллельные прямые в пространстве. Определение и признак параллельности прямых. Свойства параллельных прямых в пространстве.

Прямая, параллельная плоскости. Определение и признак параллельности прямой и плоскости. Свойство прямых, параллельных плоскости.

Скрещивающиеся прямые. Определение и признак скрещивающихся прямых.

Угол между прямыми.

Параллельные плоскости. Определение и признак параллельности плоскостей.

Свойства параллельных прямых и плоскостей в пространстве.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать и правильно использовать определения: параллельные прямые; скрещивающиеся прямые; параллельные прямая и плоскость; параллельные плоскости;

знать:

• признаки: параллельности прямых, скрещивающихся прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

• свойства: параллельных прямых, параллельных прямой и плоскости, параллельных плоскостей;

уметь:

• строить сечения многогранников плоскостью на основании теорем о параллельности прямой и плоскости;

• решать задачи, в том числе на доказательство параллельности прямых и плоскостей в пространстве.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (23 ч)

Определение прямой, перпендикулярной плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.

Перпендикуляр и наклонная. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций этих наклонных.

Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между фигурами. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Расстояние между параллельными плоскостями.

Определение угла между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Мера двугранного угла. Угол между плоскостями. Определение перпендикулярных плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей. Обратная теорема. Теоремы о связи между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей.

Свойства перпендикулярных прямых и плоскостей.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать и правильно использовать определения: перпендикулярные прямые, перпендикулярные прямая и плоскость, перпендикулярные плоскости; перпендикуляр к плоскости, наклонная к плоскости, расстояние между параллельными прямыми; расстояние между параллельными прямой и плоскостью, расстояние между параллельными плоскостями; двугранный угол, линейный угол двугранного угла, угол между плоскостями;

знать:

• признаки: перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей;

• свойства: перпендикулярных прямых, перпендикулярных прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей;

• теорему о трех перпендикулярах;

уметь:

• находить расстояние между: двумя параллельными прямыми, параллельными прямой и плоскостью, параллельными плоскостями;

• находить угол между: двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями;

• решать задачи, в том числе на доказательство.

11 класс

МНОГОГРАННИКИ (10 ч)

Свойства призмы, правильной призмы, параллелепипеда. Площадь боковой и полной поверхностей призмы.

Свойства правильной пирамиды. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды. Усеченная пирамида.

Правильные многогранники.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать определения: призмы, прямой призмы, правильной призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды, правильной пирамиды, усеченной пирамиды, диагонального сечения призмы и пирамиды;

знать свойства: призмы, прямой призмы, правильной призмы, параллелепипеда, прямоугольного параллелепипеда, куба, правильной пирамиды;

знать формулы: площади боковой поверхности прямой призмы, площади боковой поверхности правильной пирамиды;

иметь представление о правильных многогранниках;

уметь:

• применять формулы площади поверхности прямой призмы и правильной пирамиды к решению задач;

• выводить формулы площади боковой поверхности прямой призмы, площади боковой поверхности правильной пирамиды;

• решать геометрические задачи на доказательство и вычисление с использованием известных свойств призмы и пирамиды;

• применять полученные знания при решении задач практической направленности.

ОБЪЕМ МНОГОГРАННИКОВ (20 ч)

Объем тела. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем призмы. Объем пирамиды.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать формулы: объема параллелепипеда, призмы, пирамиды;

уметь:

• применять формулы объемов параллелепипеда, призмы и пирамиды к решению задач;

• решать геометрические задачи на доказательство и вычисление;

• применять полученные знания при решении задач практической направленности.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ (17 ч)

Сфера и шар. Сечения сферы и шара плоскостью. Касательная плоскость к сфере (шару). Площадь сферы. Объем шара.

Цилиндр. Осевое сечение цилиндра. Развертка боковой поверхности цилиндра. Площадь боковой и полной поверхностей цилиндра. Объем цилиндра.

Конус. Осевое сечение конуса. Развертка боковой поверхности конуса. Площадь боковой и полной поверхностей конуса. Объем конуса.

Усеченный конус.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать определения: сферы, шара, радиуса, хорды, диаметра сферы (шара), касательной плоскости к сфере (шару), цилиндра, осевого сечения цилиндра, конуса, осевого сечения конуса, усеченного конуса;

знать формулы: площади сферы, объема шара, площади боковой и полной поверхности цилиндра, объема цилиндра, площади боковой и полной поверхности конуса, объема конуса;

иметь представление о сечении сферы и шара плоскостью, осевом сечении цилиндра, сечении, параллельном и перпендикулярном оси цилиндра, осевом сечении конуса и сечении, перпендикулярном оси конуса, развертке боковой поверхности цилиндра и конуса;

уметь:

- выводить формулы площади боковой поверхности цилиндра и конуса;
- находить объемы и площади поверхности тел вращения, решать задачи на доказательство и вычисление;
- применять полученные знания при решении задач практической направленности.

Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом

Основные фигуры в пространстве: точки, прямые и плоскости.

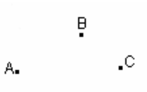


рис. 1

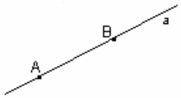


рис. 2

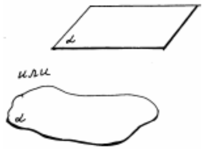


рис. 3

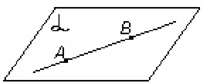
Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

$A \in \alpha$
$B \in \alpha$
$C \in \alpha$ (точки A, B, C лежат в плоскости α)

рис. 4

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости

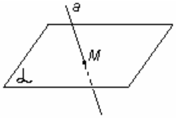


$AB \subset \alpha$
Прямая AB лежит в плоскости α

рис. 5

Начало
Содержание
Страница 109 из 187
Назад
На весь экран
Закрыть

Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

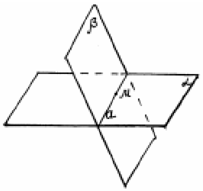


$a \cap \alpha = M$

Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M.

рис. 6

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta = a$

α и β пересекаются по прямой a.

рис. 7

Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления

Одной из проблем учащихся является изучение стереометрии. Школьникам тяжело представлять пространственные фигуры, они привыкли иметь делом с плоскостными фигурами, лежащих только в плоскости классной доски или ученической тетради. В связи с чем у них теряется интерес к предмету, и многие из них начинают считать стереометрию трудным школьным предметом.

Тема «Аксиомы стереометрии» играет важную роль в развитии пространственных представлений, поэтому старайтесь привлекать больше моделей (картон и спицы), рисунков, анимации.

Задачей преподавателя является подобрать систему работы в данном направлении. Найти дополнительные средства, которые помогут ученикам.

Основная ошибка учащихся - старание заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь. Нет стремления, понять, как наглядное представление точно выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Аксиомы геометрии, можно понимать в двух различных смыслах. В одном смысле они являются выражением обобщения некоторых фактов, в другом – служат определению абстрактного предмета теории, и ее основных понятий.

Выделим некоторые методические особенности изучения стереометрии

1. Курс стереометрии полностью опирается на курс планиметрии.

Большинство задач курса сводятся к решению планиметрических задач, соответственно все недочеты, имевшие место при изучении планиметрии, ощущаются и при изучении стереометрии.

Следовательно, для успешного изучения стереометрии учитель должен постоянно возвращаться к планиметрическому материалу; перед изучением той или иной теоремы необходимо повторять нужные планиметрические сведения.

2. В стереометрии принципиально другой подход к геометрическим построениям.

Если при изучении планиметрии, учащиеся пользуются чертежами, которые дают явные представления об изучаемом объекте, то в стереометрии нет чертежных инструментов, которые позволяют изобразить пространственные фигуры. Здесь мы имеем дело не с самим объектом, а лишь с его изображением.

Каждая стереометрическая задача является одновременно задачей на построение изображения фигуры с помощью свойств параллельной проекции. Это требует от учащихся значительно больших усилий, чем их требуется при решении планиметрических задач.

3. В курсе стереометрии уделяется большое внимание логической стороне проводимых умозаключений; приходится обосновывать каждый свой вывод, четко устанавливая предпосылки.

4. Программа по стереометрии предполагает более быстрый темп прохождения материала, чем в планиметрии. При этом времени на решение задач требуется гораздо больше, соответственно более значительное место занимает самостоятельная работа школьников. Необходим тщательный подбор заданий на уроке – включать только самое необходимое.

5. Курс стереометрии строится аксиоматически. **При изучении аксиоматики стереометрии необходимо решить две основные методические задачи:**

1) переформулируются аксиомы планиметрии для пространства (некоторые должны быть с уточнениями).

Здесь фактически под видом договоренности между учителем и учащимся вводится, как бы новая аксиома:

В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

2) добавляются новые специфические аксиомы пространства, которые на первых этапах изучения иллюстрируются с помощью моделей, рисунка, геометрии классной комнаты.

При этом появляется возможность более эффективного выявления учащимися сущности аксиоматики и ее роли в построении геометрии.

II. Формирование пространственных представлений идет в несколько этапов и включает в себя:

– умение представить по чертежу целостный образ геометрической фигуры, взаимное расположение ее элементов;

– умение мысленно изменить положение фигуры – посмотреть с другой стороны;

– умение мысленно расчленить фигуру, составить из нее новый объект;

– умение изобразить фигуру на чертеже, адекватно отразив имеющиеся отношения;

– умение представить фигуру на основе ее словесного описания и т.д.

На I этапе на наглядной основе формируются предпосылки для создания целостного образа фигуры с выделением ее существенных признаков. На данном этапе учитель должен широко использовать модели, реальные объекты окружающего мира. После этого строится чертеж, который закрепляет рассмотрение соответствующей геометрической конфигурации.

В конце I этапа и на II у школьников формируются образы фигур и их комбинаций, которые они могут представить себе в почти неизмененных условиях.

При проведении занятий по стереометрии можно использовать следующие средства информационных технологий:

1. **Flash-анимации.** Они придают телам объем, позволяя наделять их свойствами пространства. В этом случае педагог должен затратить много времени для подготовки к уроку, создавая анимационные фильмы. Большое количество интерактивного материала по стереометрии можно найти на сайте Единой коллекции Цифровых образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru/). Например, большой интерес представляют интерактивные задачи по стереометрии. Они содержат информационный инструмент «Конструктор фигур и сечений» - программу для создания трехмерных пространственных изображений геометрических фигур с возможностью редактирования, загрузки и сохранения содержимого области построения. То есть объекты используемы в задаче можно вращать, редактировать, сдвигать, увеличивать, делать дополнительные построения.

2. **Электронные стереоконструкторы.** Среди распространенных платных программ можно выделить Математический конструктор, который позволяет работать в плоскости, осуществлять выход в пространство. Программная среда предназначена для создания интерактивных моделей по математике, работа с которыми сочетает конструирование, эксперимент, решение задач. Стереоконструктор позволяет преподавателю совместно с учащимися создавать

новые и редактировать существующие стереометрические чертежи и анимационные ролики. Создаваемые объекты (как чертёж в целом, так и отдельные его элементы) можно редактировать: изменять прозрачность плоскостей, толщину линий, положение, ориентацию, масштаб, цвет объекта. Существует возможность создавать в отдельных окнах трёхмерные и двухмерные чертежи. Инструменты Стереоконструктора, в частности, отдельные кнопки, позволяют не только выполнить построения, но и «подсказывают», какие теоретические факты лежат в основе выполнения тех или иных построений.

3. **Графические символьные математические пакеты**, такие как **Derive, Maple, Mathematica, Maxima, MATLAB**. Эти пакеты обладают большими возможностями программирования графики вплоть до создания анимированных клипов.

4. **Компьютерные программы, позволяющие ученикам осуществить выход в пространство.** Среди программного обеспечения есть платные ресурсы, есть свободно распространяемые в сети Интернет.

1. В процессе формирования пространственных представлений должны участвовать, наряду с созерцанием, непосредственные манипуляции с моделями, проговаривание и мыслительные операции.

2. Преподавание стереометрии необходимо вести с привлечением материальных моделей многогранников и других пространственных фигур.

3. Применение пространственных моделей многогранников необходимо для правильного формирования графического представления о многогранниках.

4. Формирование и корректировка пространственных представлений конкретных видов многогранников может осуществляться в процессе непосредственной конструктивной работы по созданию моделей многогранников.

5. На первых этапах изучения стереометрии целесообразно использование непрозрачных моделей. Использование же каркасных моделей может привести к формированию неправильных представлений.

6. Опорные геометрические конструкции служат промежуточным звеном между теоретическим и задачным материалом.

3. Использование программы «Стереометрия» для решения задач на построение.

В большинстве стереометрических задач набольшую трудность представляет начальный этап решения. Этот этап чаще всего основан на некоторой геометрической конструкции, получающейся путем проведения некоторых дополнительных линий и приводящей к цепочке вычислительных задач, которые позволяют получить ответ на поставленный в задаче вопрос. Важно осознавать, что все дополнительные построения выполняются не произвольно, а в соответствии с теми закономерностями, которые изучаются в теоретической части школьного курса стереометрии.

Осуществлять пространственные построения на экране компьютера с возможностями перемещений или поворотов изображения, и тем самым облегчающий приобретение навыков решения стереометрических задач на трудной начальной стадии решения позволяет электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) «Стереометрия», созданный как вспомогательный инструмент для изучения стереометрии, педагогами из Новосибирска Ю.В.Михеевым, А.В.Овчинниковым, Г.Б.Чернецовой. Задачник программы позволяет решать задачи на пересечение прямой с многогранником, построение сечений многогранников, угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью, построение перпендикуляра к плоскости, сложные задачи на перпендикулярность, задачи повышенной трудности. Предусмотрена также возможность экспорта текущего состояния чертежа в графический файл, что удобно для создания иллюстраций к текстам или презентациям.

При запуске клиентской части программы на экране компьютера слева вверху расположена строка панели меню, ниже расположена панель для чертежа, справа – панель для текста задачи, слева внизу остается место для появления дополнительных панелей меню. Выбрав в меню кнопку «Файл», можно загрузить локальную задачу. На появившейся вкладке можно выбрать конкретный раздел задачника и в этом разделе конкретную задачу. После выбора конкретной задачи на экране появляется условие задачи и исходный чертеж, становятся доступными кнопки меню, позволяющие перейти к поиску решения задачи.

При решении большинства стереометрических задач, имеющих отношение к многогранникам, при выполнении геометрических конструкций достаточно применять всего два режима: строить прямые и отмечать точки пересечения прямых. Поэтому для формирования ответа при решении задач с помощью программы «Стереометрия» предусмотрено выполнение следующих элементарных действий: строить или стирать точку, строить или стирать отрезки прямых, строить многоугольник по его вершинам. Указанные действия реализуются путем применения одного из следующих режимов, позволяющих построить:

– точку пересечения двух прямых;

– точки пересечения некоторой прямой со всеми прямыми, имеющимися на чертеже;

– точку на отрезке, делящую его в заданном рациональном отношении;

– точку на продолжении отрезка, находящуюся от его конца на расстоянии, пропорциональном длине отрезка с рациональным коэффициентом пропорциональности;

– отрезок прямой, соединяющий две заданные точки;

– отрезок прямой с одним из концов в данной точке, который параллелен данной прямой;

– отрезок прямой с одним из концов в данной точке, который перпендикулярен данной прямой (перпендикуляр к прямой);

– отрезок луча, представляющий биссектрису данного плоского угла.

Названия точек при построениях могут быть введены с клавиатуры, а могут быть внесены при помощи клика по правой кнопке мыши в момент, когда курсор мыши подведен к нужной точке.

Ответом в задаче может быть точка, отрезок, угол или многоугольник. Это означает, что, выбрав соответствующий пункт в меню, можно ввести ответ задачи в виде геометрической фигуры, обозначенной названиями точек из числа точек, имеющихся на чертеже. Программа анализирует введенный вариант на правильность ответа и выдает соответствующее сообщение.

1. Чтобы построить точку пересечения двух прямых, необходимо ввести их обозначения. При этом нужная прямая может обозначаться любыми двумя различными точками этой прямой из числа имеющихся на чертеже. В случае, когда обозначение некоторой прямой вводится некорректно, программа выдает соответствующее сообщение. После ввода данных программа производит анализ и либо строит их точку пересечения, либо выдает сообщение, по каким причинам такое построение не реализуемо (прямые скрещивающиеся, параллельны, совпадают).

2. Чтобы построить точку X на отрезке AB, необходимо ввести обозначение отрезка и отношение в виде m/n, которому равно отношение AX/XB. При этом концы отрезка должны существовать на чертеже и быть различными точками, а числа m и n должны быть натуральными.

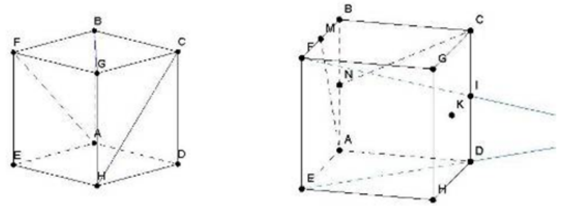
3. Чтобы построить прямую, параллельную данной, а точнее, отрезок такой прямой, сначала необходимо ввести обозначение точки, через которую проводится нужная прямая, а затем любые две точки на прямой, параллельно которой строится искомая прямая.

4. Чтобы построить отрезок перпендикуляра к прямой, необходимо ввести обозначение точки, из которой проводится перпендикуляр, и любые две точки на прямой, к которой проводится перпендикуляр. Не предусмотрено построение перпендикуляра к прямой, который проходит через точку этой прямой, потому что такое построение чаще всего приводит к некоторой неопределенности.

5. Чтобы построить биссектрису плоского угла, достаточно ввести обозначение

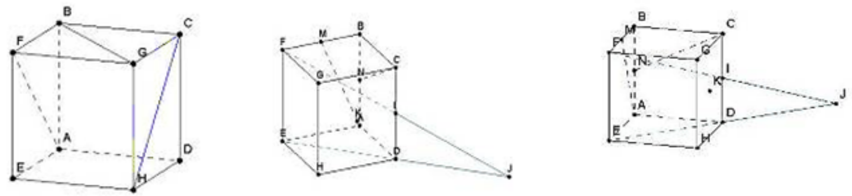
этого угла. В программе предусмотрено построение биссектрисы плоского угла, величина которого заключена в пределах от 0^0 до 180^0.

В процессе выполнения указанных действий исходный чертеж преобразуется за счет добавления новых точек, отрезков или прямых. Иногда чертеж может оказаться неудобным.



Сливающиеся линии AB и GH Построенная точка J оказалась вне чертежа

В таком случае предусмотрены возможности видоизменения чертежа. В любой момент решения задачи можно покрутить исходную фигуру вокруг одной из координатных осей. Для этого нужно, зажав левую кнопку мыши, перемещать курсор мыши вправо-влево или вверх-вниз. Можно также изменять масштаб и выполнять некоторые перемещения изображения.



После поворота линии уже не сливаются После поворота точка J уже внутри чертежа После изменения масштаба точка J уже внутри чертежа

Если на некотором этапе обнаружится, что Вас не удовлетворяет текущий ход решения, можно выбрать пункт меню «Начать заново», при этом восстанавливается начальный чертеж к задаче, а все ранее выполненные построения аннулируются. Работают также кнопки «Шаг назад» и «Шаг вперед». Применение ЭУМК «Стереометрия» к решению задач непосредственно связано с использованием закономерностей трехмерного пространства. Поэтому теоретическую основу для работы с программой «Стереометрия» составляет учебный материал, который изучается в соответствии со школьным курсом стереометрии:

– аксиомы стереометрии, отражающие основные свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве;

– определения параллельности прямых в пространстве, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

– определения перпендикулярности прямой и плоскости, расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями, угла между прямой и плоскостью;

– признаки параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

– признаки перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей;

– теорема о трех перпендикулярах.

На основе перечисленных свойств с помощью возможностей ЭУМК «Стереометрия» удается реализовать решение задач по всем принципиальным направлениям школьного курса стереометрии. Укажем эти направления и приведем некоторые примеры.

I. Начальный этап изучения стереометрии относится к определению взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве. Для этого нужно освоить решение задач следующего вида:

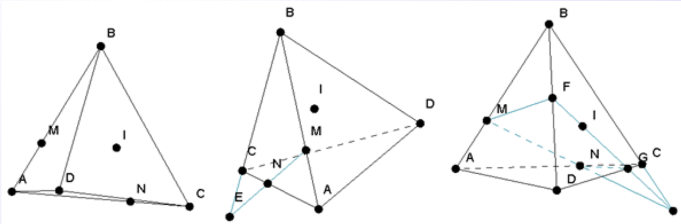
– найти пересечение данных прямых;

– найти пересечение данной прямой с данной плоскостью;

– найти пересечение данных плоскостей.

Решение перечисленных задач основывается на аксиомах стереометрии и простейших следствиях из них.

Пример 1. В правильном тетраэдре ABCD построить сечение, проходящее через центр грани BCD и точки M, N на ребрах AB и AC такие, что AM:MB=CN:NA=1:2. («Сечение тетраэдра через 2 точки на ребрах и центр грани»)



Решение. Заметим, что точки M и N лежат в одной плоскости ABC, причем отрезок MN не параллелен отрезку BC. Построив отрезок MN, заметим, что точка I не лежит ни с одной из данных точек в одной плоскости. Чтобы изменить указанную ситуацию, будем искать дополнительную точку секущей плоскости, принадлежащую одной из граней тетраэдра, на которых уже имеется одна точка сечения. Например, построим точку пересечения прямой MN с плоскостью грани BCD. Для этого построим точку E пересечения прямых MN и BC. Точки F и G пересечения прямой FE с прямыми CD и BD являются точками секущей плоскости, которые находится в плоскости грани BHDG. Многоугольник MFGN является искомым сечением тетраэдра плоскостью MNI.

II. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению параллельности в пространстве. Для этого нужно освоиться с определениями параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и с решением задач следующего вида:

– построить прямую, которая проходит через данную точку и параллельна данной прямой;

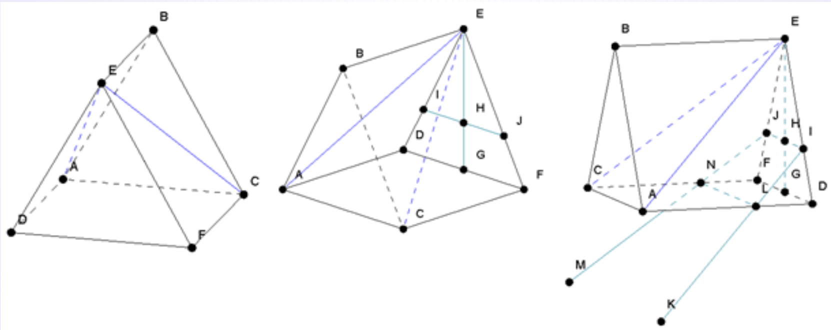
– построить плоскость, которая проходит через две данные точки и параллельна данной прямой;

– построить плоскость, которая проходит через данную точку и параллельна двум данным прямым;

– построить плоскость, которая проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Решение всех перечисленных задач основывается на определениях параллельности, свойствах параллельности, признаках параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей.

Пример 2. В правильной треугольной призме ABCDEF построить сечение, проходящее через центр грани DEF и параллельное плоскости AEC. («Сечение призмы»)



Решение. Сначала построим центр грани DEF как точку H, делящую медиану EG в отношении 2:1. Построим прямую, которая проходит через точку H параллельно прямой DF. Отметим, что любая плоскость, проходящая через прямую IJ, по соответствующему признаку будет параллельна прямой AC. Затем через точку I проводим прямую, параллельную прямой AO. Для этого достаточно отметить точку, делящую отрезок AD в отношении 2:1. Аналогично строим прямую в плоскости BEF, параллельную EC. На основании указанного признака параллельности плоскостей плоскость NLI является искомой, так как содержит прямые IL и NL, которые параллельны прямым EA и CA соответственно.

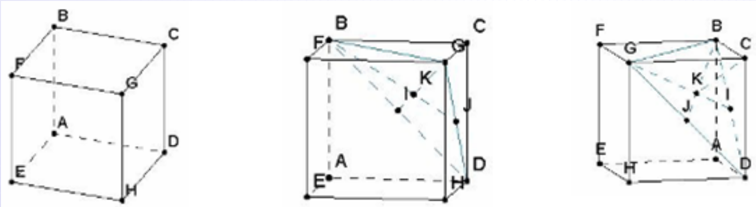
Умения находить точки пересечения прямых и плоскостей, а также производить построения параллельных прямых и плоскостей служат основой для решения практически всех стереометрических задач.

III. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве. Для этого нужно освоиться с определением перпендикулярности прямой и плоскости, признаком перпендикулярности и с решением задач следующего вида:

– построить перпендикуляр из данной точки к данной плоскости;

– имея некоторый перпендикуляр к данной плоскости, построить другой перпендикуляр к этой плоскости, проведенный из данной точки.

Пример 3. В кубе ABCDEFGH построить отрезок перпендикуляра, проведенный из точки C к плоскости BDG. («Расстояние от вершины куба до заданной плоскости»)



Решение. Выделим плоскость BDG, построив отрезки ее пересечения с гранями куба. Затем построим точку Kпересечения медиан треугольника BDG. Нетрудно понять, что перпендикуляром из точки C плоскости к плоскости BDG есть отрезок

CK. Для обоснования этого итога достаточно осознать, что наклонные CB, CG и CD равны, точка K – центр правильного треугольника BDG.

Задачи на построение сечений многогранников плоскостями, проходящими через три заданные точки, также целесообразно рассматривать на начальном этапе изучения стереометрии. В задачах такого вида сначала желательно обращать внимание на плоскости граней многогранника и смотреть, в какой из них расположено две из указанных точек секущей плоскости. Если такая грань имеется, то можно рассмотреть прямую, проходящую через эти две точки, и точки ее пересечения с другими прямыми в плоскости грани. Если такой грани нет, то задача существенно усложняется.

IV. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению двугранных углов. Умение решать задачи с двугранными углами чаще всего напрямую зависит от умения строить перпендикуляры, так как по своему смыслу величина двугранного угла характеризуется величиной линейного угла, который получается при построении в гранях лучей с общей вершиной на ребре двугранного угла, которые перпендикулярны к ребру. Линейный угол можно получать также как пересечение двугранного угла с плоскостью, которая перпендикулярна ребру двугранного угла.

(«Угол между боковыми гранями пирамиды»).

V. Иногда рассматриваются задачи на вычисление величины угла между прямой и плоскостью. Умение решать задачи с этими углами также зависит от умения строить перпендикуляры, так как угол между наклонной прямой и плоскостью определяется как угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость («Угол между заданной прямой и гранью призмы»).

VI. Одним из разделов школьного курса стереометрии является изучение тел вращения, в том числе изучение сферы и шара. ЭУМК «Стереометрия» можно приспособить к решению задач, относящихся к сферам, если ограничиваться только построением центров сфер и некоторых радиусов, так как эта часть работы непосредственно зависит от умения строить перпендикуляры к плоскостям и прямым. Действительно, если известно, что сфера касается плоскости, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к этой плоскости; если сфера касается прямой, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой. Условия для сферы, проходящей через некоторые точки, также удается представить в терминах перпендикулярности. А именно, если сфера проходит через концы отрезка, то центр сферы содержится в плоскости – серединном перпендикуляре к этому отрезку; если сфера проходит через вершины треугольника, то ее центр принадлежит прямой, которая проходит через центр описанной вокруг треугольника окружности и перпендикулярна к плоскости треугольника.

Приведенные примеры наглядно демонстрируют широкие возможности ЭУМК «Стереометрия» по компьютерной поддержке всего школьного курса стереометрии в старших классах общеобразовательной школы. Работа с данной компьютерной программой обеспечивает не только наглядность при изучении данного материала, но и в значительной степени способствует развитию логического мышления, так как процесс работы над задачами предполагает поиск каждого очередного действия на основании анализа той ситуации, которая возникает в результате применения всех предшествующих действий. Оставаясь наедине с компьютером, такие ученики довольно быстро начинают экспериментировать, «нажимать кнопки», и таким образом, получая от компьютера ответную реакцию, постепенно осваиваются, и через какое-то время начинают выполнять успешные действия. Конструктивная направленность программы позволяет обращать внимание на одну из частей решения абсолютного большинства задач по стереометрии.

Наиболее важной чертой программы является генератор задач, который позволяет учителю простыми и наглядными средствами пополнять список задач и добавлять новые разделы. При создании новой задачи при помощи генератора задач можно задавать все вершины и ребра вручную, а можно начать построение с автофигуры (куб, призма, треугольная или четырехугольная пирамида) и вручную добавить лишь дополнительно заданные на этой фигуре точки. Цвета построенных отрезков определяются пользователем. Для того чтобы невидимые линии рисовались пунктиром, надо в редакторе задач все грани фигуры задать прозрачными.

Особый эффект в обучении достигается в сочетании мультимедийных демонстраций с использованием интерактивной доски, которая может применяться и на уроках геометрии. Использование интерактивной доски на уроках геометрии позволяет учителю решать сразу же несколько задач:

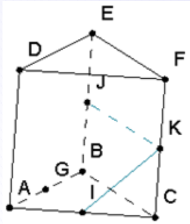
- демонстрировать заранее подготовленные чертежи и динамические модели фигур и их комбинаций;
- в короткий промежуток времени проводить дополнительные построения на готовых чертежах к рассматриваемым задачам, тем самым максимально эффективно расходовать время урока;
- самостоятельно в интерактивном режиме создавать изображения фигур; сохранять выполненные в ходе урока чертежи.

Графические пакеты и особенно стереоконструкторы позволяют изменить отношение учащегося к геометрическому объекту, созданному своим трудом. Он помнит процесс его создания, какие трудности пришлось преодолеть, прежде чем прийти к желаемому результату. Применение стероконструкторов и графических пакетов в обучении:

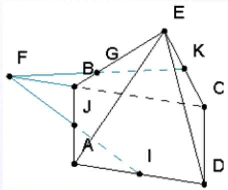
- развивает навыки самостоятельного мышления;
- повышает самооценку учащегося;
- выявляет заинтересованность и потребность в получении дополнительных знаний;
- пробуждает интерес к научной деятельности;
- формирует положительное и ответственное отношение к учебе, при этом прослеживается тенденция к росту успеваемости.

4. Практикум «Решение задач на построение сечений»

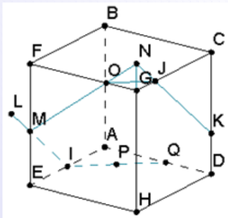
1. В правильной треугольной призме АВСДЕF построить сечение, проходящее через середины ребер АС, ВЕ и СF.



2. В правильной четырехугольной пирамиде ЕАВСД построить сечение, проходящее через середину ребер АВ, АД и СЕ.



3. В кубе АВСДЕFGH построить сечение, проходящее через середину ребра АЕ, точку J на CG такую, что CJ: JG=3, и точку K на СД такую, что СК:КД=2.



Лекция 7. Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве

Из программы

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (20 ч)

Параллельные прямые в пространстве. Определение и признак параллельности прямых. Свойства параллельных прямых в пространстве.

Прямая, параллельная плоскости. Определение и признак параллельности прямой и плоскости. Свойство прямых, параллельных плоскости.

Скрещивающиеся прямые. Определение и признак скрещивающихся прямых.

Угол между прямыми.

Параллельные плоскости. Определение и признак параллельности плоскостей.

Свойства параллельных прямых и плоскостей в пространстве.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать и правильно использовать определения: параллельные прямые; скрещивающиеся прямые; параллельные прямая и плоскость; параллельные плоскости;

знать:

• признаки: параллельности прямых, скрещивающихся прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

• свойства: параллельных прямых, параллельных прямой и плоскости, параллельных плоскостей;

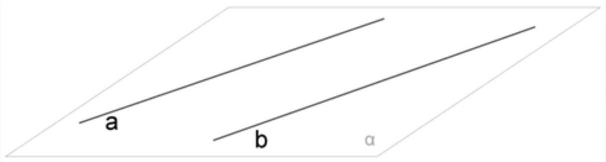
уметь:

• строить сечения многогранников плоскостью на основании теорем о параллельности прямой и плоскости;

• решать задачи, в том числе на доказательство параллельности прямых и плоскостей в пространстве.

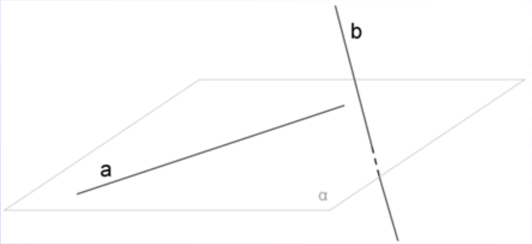
В пространстве прямые расположены следующим образом:

1. Параллельные



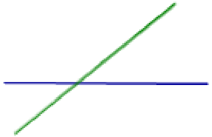
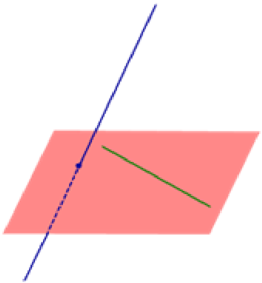
2. Пересекающиеся

3. Скрещивающиеся

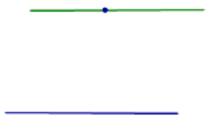
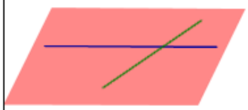


Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Все возможные случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве представлены в следующей таблице.

Фигура	Рисунок	Определение
Две пересекающиеся прямые		Две прямые называют пересекающимис я прямыми, если они имеют единственную общую точку.
Две параллельные прямые		Две прямые называют параллельными прямыми, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек
Две скрещивающие ся прямые		Две прямые называют скрещивающими ся прямыми, если не существует плоскости, содержащей обе прямые.

С перечисленными в предыдущей таблице случаями взаимного расположения двух прямых в пространстве близко связаны утверждения, представленные в следующей таблице.

Фигура	Рисунок	Тип утверждения и формулировка
Две различные точки		Аксиома о прямой линии, заданной двумя точками Через две различные точки проходит одна и только одна прямая линия.
Прямая линия и точка, не лежащая на этой прямой		Аксиома о параллельных прямых Через точку, не лежащую на прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная этой прямой.
Две пересекающиеся прямые		Теорема о плоскости, определяемой двумя пересекающимися прямыми Через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна плоскость, содержащая обе эти прямые.
Две параллельные прямые		Теорема о плоскости, определяемой двумя параллельными прямыми Через две параллельные прямые проходит одна и только одна плоскость, содержащая обе эти прямые.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит на плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются (рис.1).

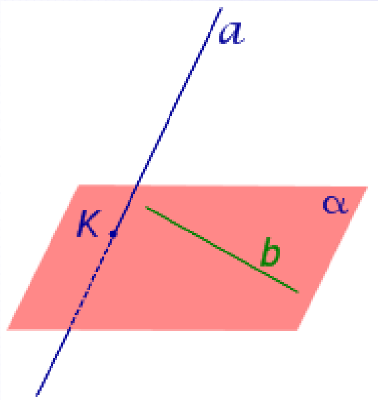


Рис.1

Доказательство. Напомним, что две прямые называют скрещивающимися, если не существует плоскости, содержащей обе эти прямые, и будем доказывать признак скрещивающихся прямых методом «От противного».

Для этого предположим, что прямая a, пересекающая плоскость в точке K, и прямая b, лежащая в плоскости α (рис. 1), не являются скрещивающимися. Из этого предположения следует, что существует плоскость, содержащая обе эти прямые. Обозначим эту плоскость буквой β и докажем, что плоскость β совпадает с плоскостью α. Действительно, поскольку обе плоскости α и β проходят через прямую b и точку K, не лежащую на этой прямой, то они совпадают. Следовательно, прямая a лежит в плоскости. Мы получили противоречие с тем, что по условию прямая a пересекает плоскость, а не лежит в ней.

Угол между скрещивающимися прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называют угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым (рис. 2).

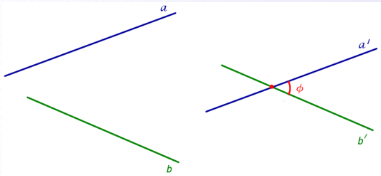


Рис.2

На рисунке 2 изображены скрещивающиеся прямые a и b. Прямая a' параллельна прямой a, прямая b' параллельна прямой b. Прямые a' и b' пересекаются. Угол φ и является углом между скрещивающимися прямыми a и b.

Задача. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Поскольку прямая AB_1 пересекает плоскость BB_1C_1 в точке B_1, которая не лежит на прямой BC_1, то по признаку скрещивающихся прямых прямые AB_1 и BC_1 скрещиваются (рис. 3).

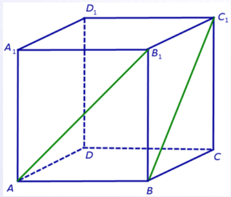


Рис.3

Начало
Содержание
Страница 132 из 187
Назад
На весь экран
Закрыть

Для того, чтобы найти угол между прямыми AB_1 и BC_1, проведем в кубе диагональ боковой грани AD_1 и диагональ верхнего основания D_1B_1 (рис. 4).

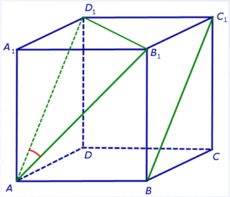


Рис.4

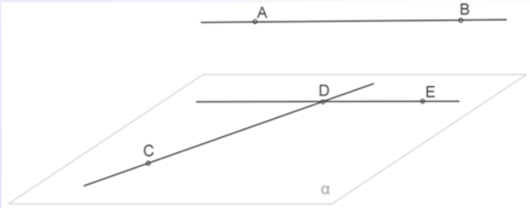
По определению угла между скрещивающимися прямыми угол D_1AB_1 и является углом между прямыми AB_1 и BC_1. Поскольку треугольник AD_1B_1 равносторонний, угол D_1AB_1 равен 60^0.

Ответ. 60^0.

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство. Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD.



1. Через точку D можно провести прямую DE, параллельную AB.
2. Через пересекающиеся прямые CD и DE можно провести плоскость α.

3. Так как прямая AB не лежит в этой плоскости и параллельна прямой DE, то она параллельна плоскости.

4. Эта плоскость единственная, так как любая другая плоскость, проходящая через CD, будет пересекаться с DE и AB, которая ей параллельна.

Теорема доказана.

Углы между прямыми

1. Если прямые параллельны, то угол между ними — 0^0.

2. Углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, образованных этими прямыми. Если все углы равны, то эти прямые перпендикулярны (образуют угол 90^0).

3. Углом между двумя скрещивающимися прямыми называют угол между двумя пересекающимися прямыми,

Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в курсе стереометрии

Изучение параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в курсе стереометрии может осуществляться в различной последовательности (сначала перпендикулярность, а затем параллельность и наоборот).

В настоящее время их изучение в школе начинается с параллельности. Это дает возможность пораньше познакомить учащихся с изображением пространственных фигур на плоскости, позволяет показать роль аксиом при изложении этого раздела, развивать конструктивные навыки учащихся в процессе решения позиционных задач. Тема играет важную роль в процессе формирования пространственных представлений учащихся, обобщаются известные из планиметрии сведения о параллельности и перпендикулярности прямых. Основная цель изучения – дать учащимся систематические знания о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

II. Всю тему «Параллельность в пространстве» можно разделить на 4 блока:

1) параллельность прямых в пространстве;

2) параллельность прямой и плоскости;

3) параллельность плоскостей в пространстве;

4) параллельная проекция и ее свойства. Изображение пространственных фигур на плоскости.

Для новых трех блоков можно выделить общий план изучения:

1) определение;

2) признак;

3) вопрос существования и единственности;

4) свойства (для параллельных плоскостей).

Всю тему «Перпендикулярность в пространстве» можно условно разделить на три части:

1) перпендикулярность прямых в пространстве;

2) перпендикулярность прямой и плоскости;

3) перпендикулярность плоскостей.

Содержание темы:

1) перпендикулярность прямых;

2) перпендикулярность прямой и плоскости, признак перпендикулярности прямой и плоскости; перпендикуляр, наклонная, проекция наклонной на плоскость; расстояние точки до плоскости, теоремы о параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости;

3) перпендикулярность плоскостей; теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей; расстояние от прямой до параллельной ей плоскости; расстояние между параллельными плоскостями.

1. **При изучении взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве** широко используются стереометрический ящик, геометрия

«классной комнаты», «подручные» средства (журнал, книга, ручка, мел и т.д.), аналогия с планиметрией.

2. При изучении понятий данной темы можно придерживаться следующей **методологической схемы**:

1) формулировка определения учителем;

2) иллюстрация понятия на модели куба (параллелепипеда), геометрии «классной комнаты»;

3) логический анализ формулировки определения;

4) упражнения на распознавание понятия; приведение примеров из окружающей обстановки с соответствующим обоснованием.

3. При изучении теорем, выражающих признаки параллельности или перпендикулярности прямых и плоскостей, целесообразно придерживаться такой **методической схемы**:

1) мотивация изучения признака;

2) раскрытие содержания теоремы на стереометрическом ящике, на реальных объектах;

3) формулировка признака;

4) сообщение идеи доказательства, совместное составление плана доказательства;

5) оформление доказательства в соответствии с принятыми требованиями;

6) показ применимости признака на простейшей модели;

7) закрепление при решении задач.

При изучении стереометрии одним из важнейших является вопрос **об изображении пространственных фигур на плоскости**. Его сложность заключается в том, что плоские изображения не могут в полной мере дать представление обо всех особенностях пространственных фигур. Речь идет о построении таких изображений, которые бы отображали свойства оригинала и давали возможность достаточно просто, наглядно и полно ознакомиться с ним.

Способ построения изображения фигуры подсказывают нам тени, которые падают от ее пространственной модели. При этом возможны два случая. В первом из них лучи исходят из точечного источника света (лампы, фонаря), размещенного вблизи модели. Этой ситуации отвечает **центральное проектирование**. По его законам формируется изображение предметов на сетчатке глаза. Однако центральное проектирование искажает одно из основных отношений геометрии — параллельность (например, нам кажется, что параллельные железнодорожные пути сливаются на горизонте). Кроме того, создание такого изображения является достаточно сложным делом.

Другой способ изображения пространственных фигур связан с освещением модели параллельными лучами. Такими, например, можно считать солнечные лучи. Соответствующий метод изображения называется **методом параллельного проектирования**. Он в достаточной степени удовлетворяет упомянутым условиям. Метод параллельного проектирования широко используется не только в геометрии, но и в черчении. **Проекция** — от латинского projection — бросание вперед.

Итак, если заданы плоскость α и прямая а, пересекающая ее, то для каждой точки пространства существует ее параллельная проекция на плоскость α при проектировании параллельно прямой а. Эта проекция определяется однозначно, поскольку через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. Плоскость α называется плоскостью проекций. При замене прямой а на произвольную параллельную ей прямую проекции точек пространства не меняются. Это вытекает из транзитивности отношения параллельности прямых. Поэтому говорят, что прямая а определяет направление проектирования. Все прямые, параллельные прямой а, определяют одно и то же направление проектирования и вместе с прямой а называются проектирующими прямыми. Если спроектируем на плоскость все точки некоторой пространственной фигуры F, то получим фигуру F_1 в плоскости проекций.

Параллельной проекцией фигуры называется фигура, составленная из параллельных проекций всех точек данной фигуры.

Договоримся в дальнейшем обозначать плоскость проекций через α, прямую, задающую направление проектирования, через a, а проекцию точки, прямой и т.п. — той же буквой, что и данную фигуру, но с индексом.

Для построения параллельных проекций фигур и восстановления по ним свойств фигур следует знать свойства параллельного проектирования.

Теорема 1 (свойство параллельной проекции прямой и отрезка).

Параллельной проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка — отрезок.

Теорема 2 (свойство проекции параллельных прямых).

Проекции параллельных прямых — параллельны или совпадают.

Теорема 3. Отношение длин проекций двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин этих отрезков.

Теорема 4 (свойства параллельных проекций плоских фигур).

1. Проекцией угла является угол.
2. Проекцией треугольника является треугольник.
3. Проекцией параллелограмма является параллелограмм.
4. Проекцией трапеции является трапеция.
5. Проекцией n-угольника является n-угольник.

Изображение фигур в стереометрии

Изображением пространственной фигуры называется фигура, подобная параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость.

Требования к изображениям:

1) изображение должно быть правильным, то есть удовлетворять определенным правилам;

2) изображение должно быть наглядным;

3) изображение должно быть простым для выполнения.

Правильность изображения обеспечивается соблюдением правил построения параллельных проекций. Наглядность и простота обеспечиваются выбором направления проектирования, то есть «угла зрения» на фигуру и расположением плоскости проекции. Важным средством обеспечения наглядности изображения является изображение элементов фигуры (медиан, биссектрис, средних линий, диагоналей и т. п.), а также простейших сечений. Построение изображений различных фигур является неотъемлемой составляющей решения задач стереометрии.

Часто при решении задач необходимо выполнить определенные построения на изображении (провести медиану, указать центр вписанной окружности, построить сечение и т. п.). Эти построения обычно выполняются по свойствам параллельного проектирования.

Лекция 8. Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей

Из программы:
10 класс

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (23 ч)

Определение прямой, перпендикулярной плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна плоскости. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.

Перпендикуляр и наклонная. Теоремы о длинах перпендикуляра, наклонных и проекций этих наклонных.

Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между фигурами. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Расстояние между параллельными плоскостями.

Определение угла между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Мера двугранного угла. Угол между плоскостями. Определение перпендикулярных плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей. Обратная теорема. Теоремы о связи между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей.

Свойства перпендикулярных прямых и плоскостей.

Основные требования
к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать и правильно использовать определения: перпендикулярные прямые, перпендикулярные прямая и плоскость, перпендикулярные плоскости; перпендикуляр к плоскости, наклонная к плоскости, расстояние между параллельными прямыми; расстояние между параллельными прямой и плоскостью, расстояние между параллельными плоскостями; двугранный угол, линейный угол двугранного угла, угол между плоскостями;

знать:

• признаки: перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей;

• свойства: перпендикулярных прямых, перпендикулярных прямой и плоскости, перпендикулярных плоскостей;

• теорему о трех перпендикулярах;

уметь:

• находить расстояние между: двумя параллельными прямыми, параллельными прямой и плоскостью, параллельными плоскостями;

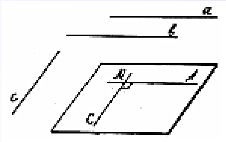
• находить угол между: двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями;

• решать задачи, в том числе на доказательство.

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90^0. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Дано: a || b, a ⊥ c

Доказать: b ⊥ c

Доказательство:

Через точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c. Так как a ⊥ c, то ∠AMC=90^0.

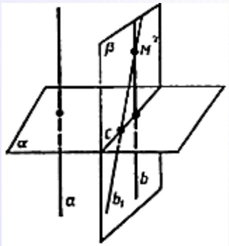
Так как b || a, а a || MA, то b || MA.

Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между ними равен 90^0, т.е. b || MA, c || MC, угол между MA и MC равен 90^0.

Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90^0, то есть b ⊥ c.

Теорема о прямой перпендикулярной к плоскости. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Теорема. Ели две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.



Начало
Содержание
Страница 142 из 187
Назад
На весь экран
Закрыть

Дано: a $\perp$ α, b $\perp$ α

Доказать, что a || b

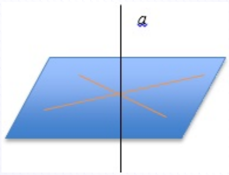
Доказательство:

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a.

M $\in$ b, M $\in$ b_1, b_1 || a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$.

Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будем доказано, что a || b. Допустим, что прямые b_1 и b не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно, следовательно, a || b, т.е. b $\in \beta$, $b_1 \in \beta$, $\alpha \cap \beta$ = c (невозможно)$\rightarrow$ a || b

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Теорема. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

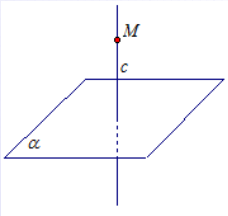


Рис. 1.

Доказательство.

Пусть дана плоскость α и точка M (см. рис. 1). Нужно доказать, что через точку M проходит единственная прямая c, перпендикулярная плоскости α.

Проведем прямую a в плоскости α (см. рис. 2). Согласно доказанному выше утверждению, через точку M можно провести плоскость γ перпендикулярную прямой a. Пусть прямая b – линия пересечения плоскостей α и γ.

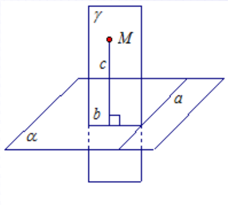


Рис. 2.

В плоскости γ через точку M проведем прямую c, перпендикулярную прямой b. Прямая c перпендикулярна b по построению, прямая c перпендикулярна a (так как прямая a перпендикулярна плоскости γ, а значит, и прямой c, лежащей в плоскости γ). Получаем, что прямая c перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости α. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая c перпендикулярна плоскости α. Докажем, что такая прямая c единственная. Предположим, что существует прямая c_1, проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α. Получаем, что прямые c и c_1 перпендикулярны плоскости α. Значит, прямые c и c_1 параллельны. Но по построению прямые c и c_1 пересекаются в точке M. Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная плоскости α, что и требовалось доказать.

Замечания.

1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.

2. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

3. Если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, не принадлежащими одной плоскости, и их общей прямой (ребро).

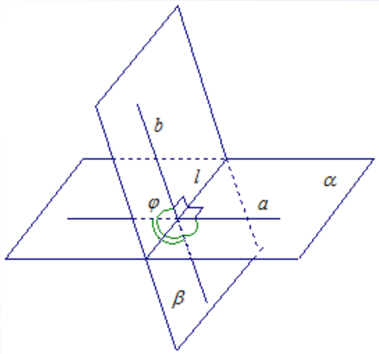


Рис. 3

Рассмотрим две полуплоскости α и β (рис. 3). Их общая граница – l. Указанная фигура называется двугранным углом. Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром.

Двугранный угол измеряется своим линейным углом. На общем ребре l двугранного угла выберем произвольную точку. В полуплоскостях α и β из этой точки проведем перпендикуляры a и b к прямой l и получим линейный угол двугранного угла.

Прямые a и b образуют четыре угла, равных φ, 180^0 - φ, φ, 180^0 - φ. Углом между прямыми называется наименьший из этих углов.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90^0.

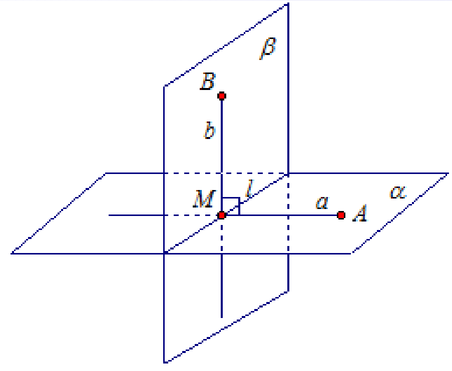


Рис. 4

На ребре l выбрана произвольная точка M (рис. 4). Проведем две перпендикулярные прямые MA = a и MB = b к ребру l в плоскости α и в плоскости β соответственно. Получили угол AMB. Угол AMB – это линейный угол двугранного угла. Если угол AMB равен 90^0, то плоскости α и β называются перпендикулярными.

Прямая b перпендикулярна прямой l по построению. Прямая b перпендикулярна прямой a, так как угол между плоскостями α и β равен 90^0. Получаем, что прямая b перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и l из плоскости α. Значит, прямая b перпендикулярна плоскости α.

Аналогично можно доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости β. Прямая a перпендикулярна прямой l по построению. Прямая a перпендикулярна прямой b, так как угол между плоскостями α и β равен 90^0. Получаем, что прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым b и l из плоскости β. Значит, прямая a перпендикулярна плоскости β.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей): Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

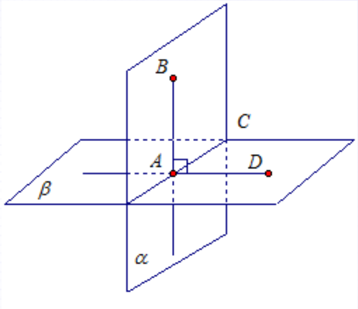


Рис. 5

Дано:

BA $\perp \beta$, BA $\subset \alpha$.

Доказать:

$\alpha \perp \beta$

Доказательство.

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой AC (рис. 5). Чтобы доказать, что плоскости взаимно перпендикулярны, нужно построить линейный угол между ними и показать, что этот угол равен 90^0.

Прямая AB перпендикулярна по условию плоскости β, а значит, и прямой AC, лежащей в плоскости β.

Проведем прямую AD перпендикулярно прямой AC в плоскости β. Тогда BAD –линейный угол двугранного угла.

Прямая AB перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AD, лежащей в плоскости β. Значит, линейный угол BAD равен 90^0. Значит, плоскости α и β перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 6).

Дано:

$\alpha \bigcap \beta = l \gamma \perp l$

Доказать:

$\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$.

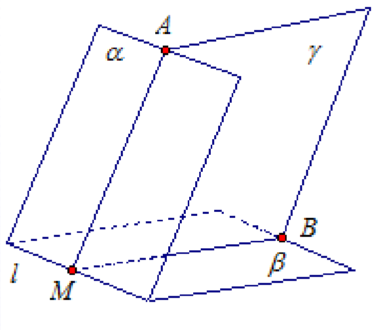


Рис. 6

Доказательство.

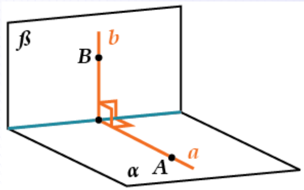
Прямая l перпендикулярна плоскости γ, а плоскость α проходит через прямую l. Значит, по признаку перпендикулярности плоскостей, плоскости α и γ перпендикулярны.

Прямая l перпендикулярна плоскости γ, а плоскость β проходит через прямую l. Значит, по признаку перпендикулярности плоскостей, плоскости β и γ перпендикулярны.

Следствие доказано.

Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^0.

Определение. Плоскости перпендикулярны, если двугранный угол между ними равен 90^0.

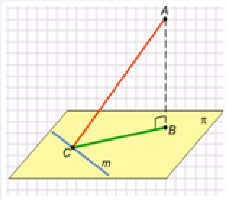


Критерий перпендикулярности плоскостей. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости.

Теорема о трёх перпендикулярах

Теорема. Если прямая, проведённая на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной

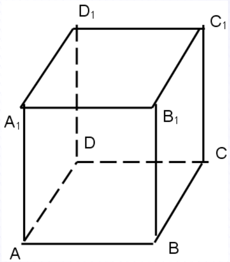
Доказательство.



Отрезок AB – перпендикуляр к плоскости π, AC – наклонная, m – прямая, проведенная в плоскости π через точку C перпендикулярно к проекции CB наклонной. Докажем, что $m \perp AC$.

Рассмотрим плоскость ACB. Прямая m перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AB и BC, лежащим в плоскости ACB ($m \perp BC$ по условию и $m \perp AB$, так как $AB \perp \pi$). Отсюда следует, что прямая m перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости ABC, в частности $m \perp AC$. Теорема доказана.

Пример 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис.) боковая грань DD_1C_1C – квадрат, DC равно 4 см, BD_1 равно 6 см. Найдите BC и докажите, что плоскости BCD_1 и DC_1B_1 взаимно перпендикулярны.



Сначала найдем BC. Воспользуемся тем свойством прямоугольного параллелепипеда, что квадрат его диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

Тогда диагональ BD_1 в квадрате равна AD в квадрате плюс DD_1 в квадрате плюс DC в квадрате. BD_1 – известно из условия, DD_1 и DC – стороны квадрата и тоже известны из условия, тогда отсюда мы можем выразить ребро AD, которое ребру BC. Отсюда находим, что BC равно 2 сантиметрам.

Для доказательства перпендикулярности плоскостей BCD_1 и DC_1B_1 воспользуемся признаком перпендикулярности плоскостей. Этот признак звучит следующим образом: если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Заметим, что плоскость BCD_1 проходит через диагональ грани DD_1C_1C – CD_1. Эта диагональ перпендикулярна плоскости DC_1B_1 в соответствии с признаком перпендикулярности прямой и плоскости, так как CD_1 перпендикулярна второй диагонали квадрата – C_1D и перпендикулярна ребру прямоугольного параллелепипеда C_1B_1. Что и требовалось доказать.

Методика изучения перпендикулярности прямых и плоскостей.

Всю эту тему можно условно разделить на три части:

1) перпендикулярность прямых в пространстве;
2) перпендикулярность прямой и плоскости;
3) перпендикулярность плоскостей.

По каждой из этих частей проводится учет знаний учащихся: самостоятельные работы, контрольные работы, опрос учащихся на уроке и др.

В процессе изучения каждой из указанных частей следует исходить из общей схемы взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, с которой учащиеся познакомились в начале курса стереометрии при изучении параллельности в пространстве. Это дает возможность случай перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве вписать в общую схему взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, связать перпендикулярность в пространстве с аксиоматикой стереометрии, планомерно осуществлять повторение при изучении нового материала.

При ее изучении особое внимание следует уделить решению задач; в задачах надо использовать многогранники – призмы и пирамиды – с целью подготовки учащихся к изучению соответствующего раздела в курсе стереометрии XI класса.

Основная цель: сообщить учащимся основные факты об одном из наиболее важных отношений между прямыми и плоскостями – перпендикулярности; ввести понятие углов между прямыми и плоскостями, между плоскостями.

Перпендикулярность прямых в пространстве

Этот раздел рассматривается как повторение пройденного ранее. Повторение нужно вести по следующему плану:

- определение взаимно перпендикулярных прямых:

- пересекающиеся и скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые;

- иллюстрация их на моделях многогранников и в окружающей действительности.

При повторении важно подчеркнуть, что в пространстве взаимно перпендикулярные прямые могут не иметь общих точек.

Перпендикулярность прямой и плоскости

Изучение целесообразно начать с повторения о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве.

Как нетрудно видеть, прямая и плоскость перпендикулярны тогда, когда они пересекаются.

Встает вопрос, в каком случае прямая, пересекающая плоскость будет ей перпендикулярна.

Как показывает опыт, если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой на этой плоскости. Это положение иллюстрируется на наглядном пособии (на модели прямой призмы, на рисунке, с помощью стереометрического ящика). После этого дается определение перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве. Важно заметить, что перпендикулярность прямой и плоскости сводится к перпендикулярности прямых в пространстве, что уже знакомо учащимся.

При изучении признака перпендикулярности прямой и плоскости надо позаботиться и о том, чтобы высвободить время для решения задач на доказательство и на вычисление, что во многом облегчает изучение темы

«Многогранники» в дальнейшем. Изучение взаимосвязи перпендикулярности прямой и плоскости с параллельностью прямых и плоскостей в пространстве следует связать с повторением темы «Параллельность в пространстве».

Перпендикулярность плоскостей

Раздел о перпендикулярности плоскостей в пространстве целесообразно начать с повторения о взаимном расположении двух плоскостей. С помощью рисунков, опираясь на жизненные представления учащихся, выясняется, что две перпендикулярные плоскости являются пересекающимися. Это требование включается в определение перпендикулярных плоскостей.

По аналогии с перпендикулярностью прямых о перпендикулярности двух плоскостей судят по углу между ними. Поэтому встает проблема: что такое угол между плоскостями? В решении этой проблемы изложены различные точки зрения. Сначала вводится понятие двугранного угла, а затем на этой основе дается определение перпендикулярных плоскостей. Или - сначала вводится угол между плоскостями, который рассматривается как угол между прямыми, полученными при пересечении двух плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной линии их пересечения. Такой подход к изучению перпендикулярных плоскостей позволяет на этой стадии обучения избежать введения нового понятия двугранного угла, которое для учащихся является непростым.

В некоторых учебниках понятие перпендикулярности двух плоскостей вводится на основе понятия перпендикулярности прямой и плоскости: «Две плоскости называются перпендикулярными, если в каждой из них через любую точку проходит прямая, перпендикулярная другой плоскости».

Такой подход к определению перпендикулярных плоскостей позволяет совершенно естественно перейти к пункту о перпендикулярности двух плоскостей, используя аналогию с перпендикулярностью прямой и плоскости, что является, несомненно, выигрышным при изучении этого вопроса. Однако при введении самого понятия перпендикулярных плоскостей в этом случае нежелательно использовать аналогию с введением понятий перпендикулярных прямых и перпендикулярности прямой и плоскости.

В процессе введения перпендикулярных плоскостей необходимо использовать наглядность из окружающей обстановки, модели многогранников (куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы), стереометрический ящик.

В других - сначала предварительно доказывается признак перпендикулярности плоскости, исходя из предположения, что такие плоскости существуют, а затем показывается конструктивно их существование.

Во всех остальных случаях существование перпендикулярных плоскостей может быть показано конструктивно сразу после введения определения этого понятия.

В процессе изучения раздела о перпендикулярных плоскостях с учащимися отрабатываются такие вопросы, как:

а) определение перпендикулярных плоскостей;

б) признак перпендикулярности плоскостей (его доказательство);

в) построение перпендикулярных плоскостей;

г) решение задач с использованием определения и признака перпендикулярности плоскостей.

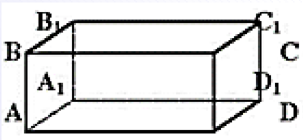
Эти вопросы должны быть центральными в процессе контроля знаний учащихся:

Методическая схема изучения признака перпендикулярности прямой и плоскости

Содержание: определение перпендикулярных прямых (1. Две прямые на плоскости называются перпендикулярными, если при пересечении образуют 4 прямых угла; 2. Две прямые в пространстве перпендикулярны друг другу, если они соответственно параллельны некоторым двум другим прямым, лежащим в одной плоскости и перпендикулярным в ней), определение перпендикулярных прямой и плоскости, перпендикуляра к плоскости(прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой из этой плоскости), расстояние от точки до плоскости, наклонной, прямоугольной проекции наклонной, перпендикулярных плоскостей, теоремы о перпендикулярных прямых, признак перпендикулярности прямой и плоскости (если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости), теорема о связи между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве, теорема о трех перпендикулярах, теорема о перпендикулярных плоскостях(если плоскость β содержит прямую а, перпендикулярную плоскости α, то плоскости α и β перпендикулярны).

Определения, приведенные в этой теме, относятся к генетическим (конструктивным), поэтому при их изучении используют методическую схему, определенную для параллельного проектирования. Согласно определению к плоскости проводим прямую, которая пересекает ее в некоторой точке А. В этой плоскости найдется прямая, проходящая через точку пересечения.

Если эта прямая перпендикулярна к данной прямой, то ее называют перпендикулярной к плоскости. Можно по рисунку куба попросить учащихся назвать ребра куба, перпендикулярные к плоскостям AA_1BB_1, ABCD, D_1C_1CD, и назвать плоскости, которым перпендикулярны ребра C_1D_1, A_1D_1, BC.



Признак перпендикулярности:

Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна к двум прямым в этой плоскости, то она перпендикулярна к плоскости.

Методическая схема изучения признака перпендикулярности прямой и плоскости

1) подвести учащихся к признаку, сформулировать его;
2) выполнить рисунок, краткую запись теоремы;
3) сообщить общую идею доказательства теоремы;
4) выполнить доп. построения;
5) сообщить идею доказательства теоремы в более конкретной форме;
6) привести план доказательства;
7) изложить доказательство;
8) закрепить доказательство по частям;
9) воспроизведения доказательства полностью.

Для того чтобы подвести учащихся к теореме можно воспользоваться и другой моделью, состоящей из листа картона и нескольких спиц. С ее помощью показать, что если прямая перпендикулярна только к одной прямой, расположенной в плоскости α, то этого не достаточно, чтобы прямая а была перпендикулярна к плоскости α.

«Перпендикулярность прямых и плоскостей» - это одна из самых сложных и тяжело-усваиваемых тем школьного курса. Так как в ней затрагиваются не только такие понятия, как прямые и плоскости в пространстве, но и углы между ними, двугранные углы, а также перпендикулярности плоскостей. Обычно учащимся бывает очень сложно запомнить свойства перпендикулярности между плоскостями и прямыми, а также теорему о трех перпендикулярах. Одна из причин этому, сложность понимания материала. Не каждый сможет понять, о чем говорится в этих свойствах и теоремах.

Другая проблема заключается в построении чертежей. Как было уже сказано, в тетради сложно построить правильный чертеж, отображающий правильную картину поставленной задачи. Ведь в реальной жизни мы привыкли решать задачи, ориентируясь на ситуацию, чертеж или общую картину сложившейся проблемы. Как известно, одну из самых важных ролей в геометрических задачах имеет чертеж. Он является гарантией дальнейшего правильного решения поставленной задачи. Обучающиеся сразу приступают к построению объёмной фигуры, не уделяя внимания технике выполнения чертежа, и из-за этого допускают ошибки при построении изображения, в результате чего усложняют себе дальнейшее решение множества задач.

Но в любом случае, какая бы не возникала проблема, преподаватель должен уметь их решать. Он должен понятно и доступно объяснять материал, предоставлять ученикам максимально доступную модель изучаемого понятия. В нашем случае можно использовать современные компьютерные технологии или хотя бы приближенную модель. К примеру, для того, чтобы изобразить плоскость можно использовать лист бумаги, а для модели прямой подойдет и обыкновенная ручка или карандаш. Достаточно приложить минимум усилий, но результат будет намного лучше. Намного больше учеников поймут изучаемый материал.

Также не стоит забывать о том, что учащиеся очень быстро теряют интерес к предмету. В особенности, это относится к геометрии. Стереометрия – один из тех разделов геометрии, который является наиболее занимательным и полезным в обыденной жизни. Поэтому при изучении материла, не стоит забывать о подкреплении интереса учащихся к изучаемой теме. Нас окружают примеры использования теории и свойств перпендикулярности прямых и плоскостей. Что и нужно донести до учащихся. Видя примеры в живую, и понимая теорию, у ученика не возникнет проблем с пониманием всего материала.

Практическое занятие 1

Замечательные точки треугольника

Замечательные точки треугольника – это следующие четыре точки в треугольнике, сохранившие еще по традиции название «замечательных»: 1) центр описанной около треугольника окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; 2) центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис его; 3) ортоцентр треугольника – точка пересечения высот его; 4) центроид треугольника – точка пересечения медиан его; центроид треугольника также называется центром масс треугольника.

Точки пересечения медиан и биссектрис треугольника всегда лежат внутри треугольника, а точки пересечения высот и серединных перпендикуляров к сторонам треугольника могут лежать как внутри треугольника, так и вне его и на сторонах треугольника. Центроид треугольника делит каждую медиану на отрезки, отношение длин которых (считая отрезки от основания медианы) равно 1:2. Кроме указанных «замечательных» точек в треугольнике, имеется еще множество других «специальных» точек, связанных с треугольником и название которых отражает имя математика, изучавшего эти точки: Торричелли точка, Жергона точка и др.

1. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении медиан треугольника. В каком классе изучают эту теорему? Отличается ли Ваше доказательство от доказательства, приведенного в учебнике? В чем отличия?

2. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении биссектрис треугольника. В каком классе изучают эту теорему? Отличается ли Ваше доказательство от доказательства, приведенного в учебнике? В чем отличия?

3. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. В каком классе изучают эту теорему?

Отличается ли Ваше доказательство от доказательства, приведенного в учебнике? В чем отличия?

4. Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника. В каком классе изучают эту теорему? Отличается ли Ваше доказательство от доказательства, приведенного в учебнике? В чем отличия?

5. Разработайте методику решения задач:

а) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AK и высота AH (H лежит между K и B) так, что MK=KH=HB. Найти отношение сторон треугольника ABC.

б) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Найти BD и DC, если AD=5 см, BC=9 см.

6. Подготовьте историческую справку о точках Торричелли, Жергона, Нагеля, Лемуана и др.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Гринько, Е. П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 2. – 196 с.

3. Гринько, Е. П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего средн. образования : в 2 ч. / Е. П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 2. – 115 с.

4. Капкаева, Л. С. Лекции по теории и методике обучения математике : частная методика : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов : в 2 ч. / Л. С. Капкаева; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – Ч. 1. – 262 с.

5. Киселев, А. П. Элементарная геометрия : книга для учителя / А. П. Киселев. – М. : Просвещение, 1980. – 287 с.

6. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в средней школе. Часть 2 : Специальные основы методики преподавания математики (частные методики) : учеб. пособие / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ им. А. Л. Кулешова, 2011. – 388 с.

7. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников

1. Сформулируйте и докажите теоремы о вписанных и описанных треугольниках.

2. Докажите теорему: Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

3. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?

4. Можно ли описать окружность около четырехугольника со сторонами 1 см, 2 см, 3 см, 4 см и одной диагональю 4 см?

5. Разработайте методику изучения теоремы Птолемея для четырехугольника, вписанного в окружность.

6. Докажите теорему: Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается только в случае четырехугольника, вписанного в окружность.

7. Верно ли, что суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны?

8. Можно ли вписать окружность в: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) квадрат; д) дельтоид?

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Капкаева, Л. С. Лекции по теории и методике обучения математике : частная методика : учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов : в 2 ч. / Л. С. Капкаева; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – Ч. 1. – 262 с.

3. Киселев, А. П. Элементарная геометрия : книга для учителя / А. П. Киселев. – М. : Просвещение, 1980. – 287 с.

4. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

5. Смирнова, И. М. Вписанные и описанные многоугольники / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов // Квант. – 2006. – № 4. – С. 33–37.

Практическое занятие 3

Методика обучения школьников решению задач планиметрии

1. Охарактеризуйте различные классификации геометрических задач (планиметрия).

2. Перечислите основные методы решения геометрических задач (планиметрия). Кратко изложите суть каждого из методов.

3. Требования к геометрическому чертежу. Функции чертежа при решении задач.

4. Охарактеризуйте нестандартные приёмы решения задач планиметрии (на примерах).

5. Разработайте методику решения задачи: Дан параллелограмм ABCD, AB=3, BC=5, $\angle A=60^0$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника ABOD.

6. Проиллюстрируйте методику решения задач на построение (на примерах).

7. Охарактеризуйте методы решения задачи: Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

8. Какие программные среды можно использовать при обучении учащихся решению задач планиметрии? Расскажите коротко о программах динамической геометрии.

9. Разработайте методику решения задачи планиметрии (на ваш выбор) с использованием программы GeoGebra.

Литература

1. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев [и др.] ; под общ. ред. В. А. Гусева. – М. : Изд. центр «Академия», 2004. – 368 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие / Сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

3. Методика преподавания математики в средней школе : Частная методика: учеб. пособие / А. Я. Блох [и др.] ; сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

4. Болтянский, В. Г. Как учить поиску решения задач / В. Г. Болтянский, Я. И. Груденов // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 8–15.

5. Готман, Э. Г. Правильное решение геометрической задачи / Э. Г. Готман // Квант. – 1987. – № 5. – С. 50–55.

6. Далингер, В. А. Чертеж учит думать / В. А. Далингер // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 32–36.

7. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в средней школе. Часть 2 : Специальные основы методики преподавания математики (частные методики) : учеб. пособие / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. – Могилев : МГУ им. А. Л. Кулешова, 2011. – 388 с.

8. Столяр, А. А. Педагогика математики : учеб. пособие / А. А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

9. Шарыгин, И. Ф. Несколько эпизодов из жизни вписанной и описанной окружностей / И. Ф. Шарыгин // Квант. – 1990. – № 8. – С. 66–70.

10. Учебные пособия по математике для средней школы.

11. Метельский, Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

12. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе : книга для учителя / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2000. – 173 с.

Практическое занятие 4

Методика решения конструктивных задач

1. Основы теории геометрических построений. Общие аксиомы конструктивной геометрии.

2. История развития методов решения задач на построение.

3. Что значит решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки.

4. Методика решения геометрической задачи на построение.

5. Основные методы решения задач на построение: метод параллельного переноса; метод подобия; метод геометрического места точек; алгебраический метод (*распределитесь по подгруппам, рассмотрите по одному методу на подгруппу, представьте каждый из методов с использованием ИКТ*).

6. Разработайте методику решения задач:

a) Разделите отрезок пополам.

b) Разделите угол пополам.

c) Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

d) Постройте треугольник по трём сторонам.

e) Постройте треугольник по двум углам и прилежащей стороне.

f) Построить треугольник ABC, зная AC и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ADC, где AD высота.

7. Разработайте методику решения геометрической задачи на построение (на ваш выбор) с использованием программы GeoGebra.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 232 с.

3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Гусев, В. А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: учеб. пособие для вузов / В. А. Гусев. – М. : Дрофа, 2010. – 473 с.

5. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений : кн. для учителя / В. А. Далингер. – М.: Просвещение, 2006. – 256 с.

6. Пойа, Д. Как решать задачу /Д. Пойа. – М. : Учпедгиз, 1961. – 207 с.

7. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : ВЛАДОС, 2006. – 183 с.

8. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике / Л. М. Фридман. – М. : Московский психолого-социальный институт : Флинта, 1998. – 224 с.

9. Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

Практическое занятие 5

Методика введения многогранников на первых уроках

1. Перечислите основные вопросы содержания темы «Многогранники» в школьной программе по математике. Какими знаниями и умениями должны овладеть учащиеся?

2. Охарактеризуйте роль и значение данной темы в курсе математики средней школы.

3. Проанализируйте определения различных видов многогранников, изучаемых в курсе стереометрии. К какому виду определений они относятся?

4. На материале темы «Многогранники» составьте для учащихся задания по выяснению отношений между различными подмножествами многогранников и составлению логических схем их отношений.

5. Раскройте дидактическую значимость приемов сопоставления и противопоставления понятий планиметрии и стереометрии в процессе формирования у учащихся стереометрических понятий на примере учебного материала темы «Многогранники».

6. Разработайте методику введения одного из понятий темы «Многогранники» на основе использования приемов сравнения понятий планиметрии и стереометрии.

7. Разработайте вариант таблицы опорных задач по теме «Многогранники».

8. Разработайте план-конспект первых уроков по теме «Многогранники» с использованием программы GeoGebra.

9. Подготовьте задания для учащихся по изготовлению моделей многогранников.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 232 с.

3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Гусев, В. А. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие для вузов / В. А. Гусев. – М. : Дрофа, 2010. – 473 с.

5. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений : кн. для учителя / В. А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006. – 256 с.

6. Пойа, Д. Как решать задачу /Д. Пойа. – М. : Учпедгиз, 1961. – 207 с.

7. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : ВЛАДОС, 2006. – 183 с.

8. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике / Л. М. Фридман. – М. : Московский психолого-социальный институт : Флинта, 1998. – 224 с.

9. Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

Практическое занятие 6

Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами. Использование систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.)

1. История геометрических построений в пространстве.

2. Охарактеризуйте основные принципы методики преподавания геометрических построений в пространстве.

3. Какие методические трудности возникают при изучении геометрических построений в пространстве?

4. Подготовьте сообщение о возможностях использования систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.) при обучении построению сечений многогранников.

5. Особенности построения изображений многогранников.

6. Разработайте методику решения задачи: Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отрезка PK, лежащего в плоскости грани BCC_1B_1. Построить точки пересечения прямой PK с плоскостями $ABCD$ и ADD_1A_1.

7. Охарактеризуйте основные методы построения сечений многогранников.

8. Разработайте план обучения учащихся решению задач на построение сечений.

9. Разработайте методику решения задачи: Дано изображение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ее ребрах AD, DC и B_1C_1 даны, соответственно, точки K, P и H. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, P и H.

10. Разработайте план-конспект одного из уроков по теме «Построение сечений» с использованием программы GeoGebra.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 232 с.

3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

Методика изучения параллельности и перпендикулярности геометрических объектов в пространстве

1. Цели и этапы изучения взаимного расположения прямых на плоскости.
2. Различные подходы к введению понятия параллельности прямых на плоскости.
3. Разработайте методику доказательства признака скрещивающихся прямых.
4. Разработайте методику изучения перпендикулярности прямых и плоскостей.
5. Разработайте методику доказательства теоремы о трех перпендикулярах с использованием презентации.
6. Разработайте методику решения задачи №107 (уч. пособ. Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., Горбунова И. В.).
7. Разработайте методику решения задачи №150 (уч. пособ. Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., Горбунова И. В.).
8. Разработайте методику решения задачи №182 (уч. пособ. Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., Горбунова И. В.).
9. Разработайте план-конспект одного из уроков по теме «Параллельность плоскостей» с использованием программы GeoGebra.
10. Разработайте план-конспект одного из уроков по теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» с использованием программы GeoGebra.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.
2. Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 232 с.
3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

5. Зив, Б. Г. Задачи по геометрии для 7–11 классов / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. П. Баханский. – М. : Просвещение, 2003.

6. Саакян, С. М. Изучение геометрии в 10–11 классах : Методические рекомендации к учебнику : кн. для учителя / С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. – М. : Просвещение, 2001.

Практическое занятие 8

Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии

1. Методика использования наглядных пособий и ТСО на первых уроках стереометрии.

2. Разработайте методическую схему изучения понятий, аксиом и теорем на первых уроках стереометрии. Покажите реализацию данной схемы на примере одной аксиомы.

3. Перечислите основные вопросы, связанные с рассмотрением многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Какими знаниями и умениями должны овладеть учащиеся?

4. Проведите анализ учебника геометрии с точки зрения изучения многогранников на первых уроках стереометрии, используя следующий план: а) логическая последовательность изложения учебного материала; б) основные подходы к определению многогранника и его видов; в) оцените возможность параллельного изучения призмы и пирамиды.

5. Проанализируйте определения различных видов многогранников, изучаемых в курсе стереометрии. К какому виду определений они относятся?

6. На материале темы «Многогранники» составьте для учащихся задания по выяснению отношений между различными подмножествами многогранников и составлению логических схем их отношений.

7. Составьте календарно-тематический план изучения темы «Многогранники», используя лекционно-семинарскую систему обучения.

8. Подберите из учебных пособий или составьте самостоятельно две-три задачи на многогранники, при решении которых целесообразно выполнение выносного чертежа. Дайте образец оформления решения задач.

9. Подготовьте задания для учащихся 10 класса по изготовлению моделей многогранников.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Василевский, А. Б. Методы решения геометрических задач. Учебное пособие для математических факультетов пединститутов / А. Б. Василевский. – Минск : Издательство «Вышэйшая школа», 1969.

3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Метельский, Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы/ Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

Лабораторная работа «Методика решения задач на построение сечений многогранников»

Опишите методику решения задач:

1. Изобразите куб $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B_1, T и O, где точки T и O – середины ребер АД и ДС соответственно.

2. Изобразите параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки T, P и O – середины ребер BB_1, АД и ДС соответственно.

3. Изобразите четырехугольную пирамиду SABCД. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки T, O, E (T лежит на ребре SB (не на середине), O - середина ребра СД, E лежит на ребре SC (не на середине)).

4. Изобразите четырехугольную пирамиду SABCД. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер SA, АД, ДС.

5. Изобразите куб $ABCДA_1B_1C_1Д_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, АД и CC_1.

6. Изобразите прямоугольный параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$, основание которого – квадрат, длина стороны которого равна a. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью AB_1C.

Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, если площадь треугольника AB_1C равна S.

7. В прямой треугольной призме $BCEB_1C_1E_1$ угол BCE равен 90 градусов. Сечение проходит через середины ребер BC и CC_1 параллельно высоте CO треугольника BCE. Известно, что $BC=CE=CC_1=2$. Найдите площадь сечения.

Литература

1. Действующие в РБ учебники геометрии.

2. Василевский А. Б. Методы решения геометрических задач / А. Б. Василевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 232 с.

3. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.

4. Резникова, Н. Математика сечения многогранников. ЕГЭ. Профильный уровень / Н. Резникова, Е. Фридман. – Изд-во Легион, 2016.

Примерная контрольная работа по методике преподавания математики

Вариант 1

1. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике.

2. Разработайте методику решения задачи: На рёбрах AB, BC и CD тетраэдра ABCD расположены, соответственно, точки K, N и M, отличные от вершин тетраэдра (при этом прямые KN и AC не параллельны). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN.

3. Приведите примеры теорем, излагаемых в теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве», которые можно доказать различными способами. Сравните возможные методы доказательств.

Вариант 2

1. Охарактеризуйте основные методы построения сечений многогранников.

2. Разработайте методику решения задачи: Найдите угол между двумя гранями правильного тетраэдра.

3. Составьте две задачи с практическим содержанием, решение которых основано на применении аксиом стереометрии и следствий из них.

Вариант 3

1. Методика обучения школьников решению задач планиметрии.

2. Разработайте методику решения задачи: В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD (с вершиной S) сторона основания равна 2 и высота равна 1. Найдите расстояние от точки D до плоскости BCS.

3. Разработайте методическую схему изучения понятий, аксиом и теорем на первых уроках стереометрии.

Вопросы и задания к зачету

3 курс, 6 семестр
Теоретическая часть

1. Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью.
2. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике.
3. Замечательные точки треугольника.
4. Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников.
5. Основные методы решения планиметрических задач.
6. Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике.
7. Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии. Особенности конструктивных задач на плоскости.
8. Методика обучения школьников решению задач планиметрии.
9. Методика решения конструктивных задач.
10. Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них.
11. Методика введения многогранников на первых уроках.
12. Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами.
13. Методика решения задач на построение сечений многогранников.
14. Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые.
15. Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в пространстве.

16. Методические особенности изучения параллельного проектирования в школе.

17. Изображение плоских и пространственных фигур.

18. Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей.

19. Методика изучения параллельности и перпендикулярности геометрических объектов в пространстве.

20. Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии.

21. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии.

22. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии.

Практическая часть

1. Разработайте методику решения задачи: Провести окружность через две точки A и B так, чтобы длина касательной к ней, проведённой из точки C равнялась a.

2. Охарактеризуйте методы решения задачи: Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с площадью 4 и площадью 16. Найдите длину гипотенузы.

3. Решите задачу, используя координатный метод: В треугольнике ABC биссектриса BF и медиана AK перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 208. Найдите стороны треугольника ABC.

4. Разработайте методику решения задачи: Точка H является основанием высоты BH, проведенной из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если PK=15.

5. Докажите теорему: Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180 градусов.

6. Можно ли описать окружность около: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) ромба; г) квадрата; д) равнобедренной трапеции; е) прямоугольной трапеции?

7. Можно ли описать окружность около четырехугольника со сторонами 1 см, 2 см, 3 см, 4 см и одной диагональю 4 см?

8. Разработайте методику изучения теоремы Птолемея для четырехугольника, вписанного в окружность.

9. Докажите теорему: Произведение диагоналей произвольного четырехугольника меньше или равно сумме произведений его противоположных сторон, причем равенство достигается только в случае четырехугольника, вписанного в окружность.

10. Разработайте методику решения задачи: В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AK и высота AH (H лежит между K и B) так, что MK=KH=HB. Найти отношение сторон треугольника ABC.

11. Разработайте методику решения задачи: Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Найти BD и DC, если AD=5 см, BC=9 см.

12. Разработайте методику решения задачи: Дано изображение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отрезка PK, лежащего в плоскости грани BCC_1B_1. Построить точки пересечения прямой PK с плоскостями ABCD и ADD_1A_1.

13. Разработайте методику решения задачи: Дано изображение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На ее ребрах AD, DC и B_1C_1 даны, соответственно, точки K, P и H. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки K, P и H.

14. Изобразите куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки $В_1$, Т и О, где точки Т и О – середины ребер АД и ДС соответственно.

15. Изобразите параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки Т, Р и О – середины ребер $ВВ_1$, АД и ДС соответственно.

16. Изобразите четырехугольную пирамиду SАВСД. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки Т, О, Е (Т лежит на ребре SB (не на середине), О - середина ребра СД, Е лежит на ребре SC (не на середине)).

17. Изобразите четырехугольную пирамиду SАВСД. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер SA, АД, ДС.

18. Изобразите куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер $АА_1$, АД и $СС_1$.

19. Изобразите прямоугольный параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, основание которого – квадрат, длина стороны которого равна а. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью $АВ_1С$. Найдите радиус окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, если площадь треугольника $АВ_1С$ равна S.

20. В прямой треугольной призме $ВСЕВ_1С_1Е_1$ угол ВСЕ равен 90 градусов. Сечение проходит через середины ребер ВС и $СС_1$ параллельно высоте СО треугольника ВСЕ. Известно, что $ВС=СЕ=СС_1=2$. Найдите площадь сечения.

Тест

Литература

1. Ананчанка, К.А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К.А. Ананчанка. – Минск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Арнольд, А.А. Урок-консультация // Математика в школе. – 1994 – №2. – С. 23–24.

3. Гельфман, Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитанние учащихся / Э.Г. Гельфман, М.А. Холодная. – СПб. : Питер, 2006. – 380 с.

4. Гринько, Е.П. Формирование готовности учителя математики к работе с одаренными детьми : монография / Е.П. Гринько ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2014. – 222 с.

5. Гринько, Е.П. Подготовка в университете будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : монография / Е.П. Гринько ; М-во образования Респ. Беларусь ; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2017. – 241 с.

6. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

7. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А.Гусев. – М. : Вербум-М, 2003. – 432 с.

8. Груденов, Я.И. Совершенствование работы учителя математики / Я.И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

9. Костицын, В. Н. Моделирование на уроках геометрии: теория и методические рекомендации / В. Н. Костицын, В. Н. Крстицын. – Москва: ВЛАДОС, 2000. – 158 с.

10. Ксензова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии. Учебно-методическое пособие / Г.Ю. Ксензова. – М. : Педагогическое общество России, 2000. – 224 с.

11. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: книга для учителя / С. Г. Манвелов. – Москва: Просвещение, 2002. – 173 с.

12. Математика для каждого: технология, дидактика, мониторинг: сборник / Вып. 4 / Л. А. Аверкиева, И. Ю. Ананьева, М. В. Астанина [и др.] / Ассоц. “Школа 2000...”. – Москва: Школа 2000. . . , 2002. – 271 с.

13. Метельский, Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

14. Методика обучения геометрии : Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев [и др.] ; под общ. ред. В.А. Гусева. – М. : Изд. центр «Академия», 2004. – 368 с.

15. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики/ Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. институтов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушин и др. – Москва: Просвещение, 1977. – 479 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин [и др.]. – Москва: Просвещение, 1975. – 461 с.

17. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие / Сост. : Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336с.

18. Методика преподавания математики в средней школе : Частная методика: учеб. пособие / А.Я. Блох [и др.] ; сост. В.И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

19. Окунев, А.А. Спасибо за урок, дети! - М.: Просвещение, 1988.

20. Пивоварук, Т.В. Педагогическая практика по математике : электронное учебно-методическое пособие / Т.В. Пивоварук, С.В. Селивоник. – Рег. № 44/2016 от 06.12.2016.

21. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2018. – Ч. 1 : Общие основы методики преподавания математики (общая методика). – 312 с.

22. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2019. – Ч. 2: Специальные основы методики преподавания математики (частные методики). – 388 с.

23. Столяр, А.А. Педагогика математики : учеб. пособие / А.А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

24. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

25. Эрдниев П.М. Обучение математике в школе. Укрупнение дидак-тических единиц. Книга для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М. : Столетие, 1996. – 320 с.

26. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Книга для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений/ Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – Москва: Просвещение: АО "Учебная литература", 1996. – 319 с.

27. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе / Л.В. Виноградова. – Ростов на/Д : Феникс, 2005. – 252 с.

28. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 5–9 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования / Е.П. Гринько. – Мозырь: Выснова, 2019. – 165 с. – (Гриф МО)

29. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 1. – 184 с.

30. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 2. – 196 с.

31. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 1. – 129 с. – (Гриф МО)

Начало
Содержание
Страница 185 из 187
Назад
На весь экран
Закрыть

32. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего средн. образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 2. – 115 с. – (Гриф МО)

33. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (Элементарная алгебра) : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько, В.Я. Логвинович. – Рег. № 22/2016 от 18.10.2016.

34. Гринько, Е.П. Элементарная математика : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько. – Рег. № 5/2016 от 15.01.2016.

35. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

36. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике / В.А. Далингер. – М. : Просвещение, 1991. – 80 с.

37. Депман, И. Я. За страницами учебника математики: пособ. для уч-ся 5-6 кл. ср. шк. / И. Я. Депман, Н. Я. Виленкин. – Москва: Просвещение, 1989. – 287 с.

38. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Геаметрыя (Планіметрыя) : электронны вучэбна-метадычны комплекс / М.А. Калавур. – Рэг. пасв. № 2271816070 от 05.07.2018.

39. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Планіметрыя : вучэб.-метад. комплекс / М.А. Калавур ; Брэсц. дзярж. ун-т імя А.С. Пушкіна. – Брэст : БрДУ, 2014. – 48 с.

40. Методические журналы : «Матэматыка», «Математика в школе», «Математика для школьников», «Квант», «Репетитор» и т.д.

41. Организация контроля знаний учащихся в обучении математике : Пособие для учителей / Сост. З.Г. Борчунова, Ю.Ю. Батий. – М. : Просвещение, 1980. – 96 с.

42. Пивоварук, Т.В. Внеклассная работа по математике : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 5/2015 от 22.06.2015.

43. Пивоварук, Т.В. Элементарная математика и ПРЗ. Тригонометрия : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 12/2012 от 14.11.2012.

44. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Г.К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

45. Селивоник, С.В. Решение задач с параметрами : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 52/2016 от 08.12.2016.

46. Селивоник, С.В. Элементарная математика и практикум по решению задач (Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач) : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 14/2015 от 02.10.2015.

47. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики / А.А. Темербекова. – М. : Владос, 2003. – 176 с.

48. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – Львов : Квантор, 1991. – 215 с.

49. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач : основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – 452 с.

50. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике : учеб. пособие / Л.М. Фридман. – М. : Флинта, 1998. – 168 с.

51. Борисов, В.К. К выполнению и защите курсовой работы, дипломного проекта и отчета по практике : метод. рекомендации / В.К. Борисов ; Рос. междун. западно-подмосковный ин-т туризма : РМАТ – Москва, 2006. – 49 с.

52. Рогожин, М. Как написать курсовую и дипломную работы / М. Рогожин. – СПб : Питер, 2005. – 188 с.

53. Кульпанович, О. А. Подготовка, оформление и защита курсовых и дипломных работ, отчетов по практике : учеб.-метод. пособие / О.А. Кульпанович – Минск : МЦПЭР, 2006. - 46 с.

54. Бибило, В.Н. Рекомендации по оформлению курсовой работы. Минск, 2005. – 7 с.