

УДК 004.9+378.147

А.В. Чичурин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

В статье рассматриваются вопросы использования систем компьютерной математики в трех специальных курсах, которые читаются на математической факультете. Обсуждается целесообразность выбора системы *Mathematica*, а также использование этой системы при решении новых ограниченных задач космической динамики. Приводятся примеры эффективного использования визуализации и анимации системы компьютерной математики *Mathematica*.

Не вызывает сомнений, что сохранение и совершенствование уровня вузовской математической подготовки в Беларуси – задача первостепенной важности. В математике – науке и дидактике – одинаково значимы интуитивно-содержательная и абстрактно-логическая составляющие, индуктивный и дедуктивный способы формирования и развития знания. Также весьма важно гармоничное сочетание дискретного и непрерывного в изучении математики и в понимании ее характера. Моделирование – универсальный метод научного познания. В математике моделирование проявляется в построении примеров и контрпримеров понятий и теорий. Освоение модельных примеров основополагающих математических теорий – отправной и важнейший акт обучения математике, это предметный фундамент, на котором стоит весь курс математики и отдельные его части. И здесь важную роль играют современные системы компьютерной математики [1; 2].

Компьютерная математика – это современная область науки, которая возникла на стыке математики и информационных технологий. Ее предметом является осуществление символьных и численных вычислений, а также визуализация и анимация с помощью компьютера. Наиболее известными системами компьютерной математики являются *Mathematica* [3], Maple, MathCAD, MathLAB, Derive. Заметим, что математические системы развиваются в направлении интегрирования друг с другом. Интенсивно идет оснащение математических систем средствами для работы в Internete.

На математическом факультете УО «БрГУ имени А.С. Пушкина» применение систем *Mathematica* и Maple, изучение их возможностей и использование в учебном процессе было начато с 2000 года. В научных исследованиях, проводимых на факультете, эти системы стали использоваться по крайней мере на 5 лет раньше. Первый русскоязычный учебник в Беларуси по системе *Mathematica* «Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений» был написан в Бресте в 1998 году и издан в издательстве БГУ (г. Минск) в 1999 году [4]. В 2005 году с учетом новой версии *Mathematica* 5.0 он был дополнен и представлен в форме интерактивного учебника на компакт-диске как набор документов типа *Notebook*, получаемых при работе с пакетом *Mathematica* 5.0 [5].

Выбор изучения этой системы был связан со следующими обстоятельствами. Система *Mathematica* изначально была лидером среди систем компьютерной алгебры. Версии *Mathematica* 5.1, 5.2, самые известные и распространенные среди пользователей системами этого класса, были направлены на сохранение этого лидерства. Новейшие же версии *Mathematica* 6.0 и 7.0 содержат огромное число новаций, которые касаются интерфейса документов системы, анимационных, визуализационных, аналитических и

численных возможностей, включают большой набор содержательных полезных функций. Следует отметить также высочайшую скорость вычислений последних двух версий и новую парадигму вычислений [1; 6].

Интерес к использованию современных систем компьютерной математики в научных исследованиях и в образовании проявился с момента создания математического факультета в 1995 году. Вот названия лишь нескольких конференций, связанных с системами компьютерной математики, которые проводились на математическом факультете: международная математическая конференция «Дифференциальные уравнения и Системы Компьютерной Алгебры» (19–22 сентября 2000 года); международная математическая конференция «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – VIII» (20–23 мая 2002 года) (включала в себя секцию «Системы компьютерной алгебры и их приложения в теории дифференциальных уравнений»); международная научная конференция «Applications of the «Mathematica» System to the Social Processes and Mathematical Physics» (3–6 июня 2003 года); международная математическая конференция «Дифференциальные уравнения и Системы Компьютерной Алгебры» (DE&CAS'2005, 5–8 октября 2005 года).

По результатам работы этих конференций были изданы сборники материалов и статей. Ежегодно на протяжении последних 10 лет на факультете проводится студенческая научная конференция, последние три года под названием «Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике» в формате республиканской конференции, где присутствует секция «Системы компьютерной алгебры и их научные приложения». По результатам работы этой конференции также издаются сборники материалов докладов участников.

В настоящее время на математическом факультете Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина читается специальный курс «Системы компьютерной математики» (объем курса – 44 часа: 28 часов лекционных + 16 часов лабораторных для специальности 1-02 05 03-02 Математика. Информатика, 5-й курс), а также две дисциплины по выбору «Использование систем компьютерной алгебры при решении задач» (объем курса – 46 часов: 28 часов лекционных + 18 часов лабораторных для специальности 1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность, 3-й курс), «Математические модели и их решение с использованием систем компьютерной математики» (объем курса – 34 часа: 18 часов лекционных + 16 часов лабораторных для специальности 1-02 05 05-01 Информатика. Иностранный язык, 2-й курс).

Эти дисциплины включают в себя краткое описание основных численных, аналитических и графических возможностей системы *Mathematica* 6.0, а также ряд демонстрационных проектов математического и естественнонаучного характера, часть из которых размещена разработчиками и пользователями этой системы на сайтах фирмы-разработчика.

Приведем одно из приложений, которое рассматривается в спецкурсе и двух упомянутых выше дисциплинах по выбору. Оно связано с поиском решений новых ограниченных задач космической динамики, предложенных московским профессором Е.А. Гребениковым [2; 7] и парижским профессором Б. Эльмабсуттом [8]. В этих работах всесторонне раскрывается мощь и эффективность, а также уместность использования систем компьютерной математики. В качестве такой системы используется система *Mathematica*.

По аналогии с классической проблемой гамильтоновой космической динамики, названной К. Якоби и А. Пуанкаре [9], «ограниченная задача трех тел», модели Гребеникова–Эльмабсутта получили название «ограниченных задач многих ($n > 3$) тел» [2]. В этих моделях гравитационное поле создается телами, образующими правильные многоугольники, вращающиеся вокруг центрального тела, и в таком гравитационном поле исследуется движение пассивно гравитирующей массы. Описывающие такие модели,

системы дифференциальных уравнений являются существенно нелинейными и поэтому их интегрирование «в квадратурах» абсолютно бесперспективно. В таких случаях А. Пуанкаре [9] рекомендовал исследовать проблему существования стационарных решений (точек равновесия). Эта проблема, как показали современные авторы, сводится к решению весьма сложных систем нелинейных алгебраических уравнений, которые раньше не были известны в математической литературе. Найти точное решение этих алгебраических систем в аналитической форме невозможно из-за их существенной нелинейности. Используя же систему *Mathematica* [3; 6] можно найти координаты точек равновесия с произвольной точностью.

Первоначально рассматриваются задачи одного и двух тел, которые допускают аналитическое решение [2]. Затем формулируются и описываются ограниченные задачи для n тел с полной и неполной симметриями, а также программы в системе кодов СКА *Mathematica*, позволяющие построить графики рассматриваемых моделей. В частности, исследуется вопрос о существовании точных гомографических решений ограниченных задач космической динамики на примере задачи 14-ти тел с полной и неполной симметриями [2; 10]. Приведены компьютерные алгоритмы и программы, позволяющие найти положения равновесия в ограниченных задачах 14-ти тел, а также построены их графики для различных значений параметров.

Система *Mathematica* позволяет изучать визуальное динамические процессы, то есть позволяет осуществлять процессы визуализации и анимации. Поэтому при изучении соответствующих вопросов в спецкурсах приводится программная реализация движения космических тел в реальном масштабе времени при интерпретации симметрических решений в проблеме 13-ти тел, а также при движении точки с бесконечно малой массой в соответствующем симметричном гравитационном поле [11]. Для понимания визуализационных инструкций системы *Mathematica* в лабораторных работах содержатся теоретические сведения, поясняющие и дополняющие материал, связанные с построением плоских и пространственных кривых, поверхностей, методы решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а также элементы программирования, необходимые для понимания изучаемых модулей, процедур и программ [6; 10]. Ниже приведем примеры эффективного использования визуализационных и анимационных возможностей системы.

Пример 1. При визуализации частных решений в ограниченной однокольцевой задаче тринадцати тел [2; 10] получаем следующий рисунок 1, где фазовые траектории движения 12-ти тел (P1-P12) вокруг центрального тела P0 представляют собой при выбранных начальных условиях кривые второго порядка (эллипсы).

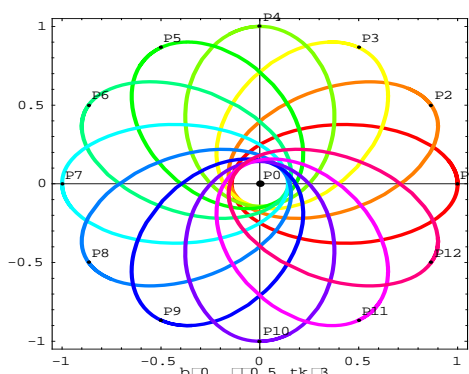


Рисунок 1

Пример 2. Для анимации движения, рассматриваемого в примере 1 была использована функция *AnimatedSymSol* [$m_0, m, f, a, b, c, n, tk, pn$] [2]. В случае $n=13$ приведем динамику движения всей системы точек с помощью конкретной функции

AnimatedSymmSol [2; 10] (при этом количество изображений задается параметром pn , ω – угловая скорость вращения, t – время, прошедшее с момента движения, tk – общее время движения). Ниже приводится 4 графика (моменты движения) для различных значений времени $t=0.33, t=0.67, t=1.27, t=1.67$ соответственно (рисунок 2).

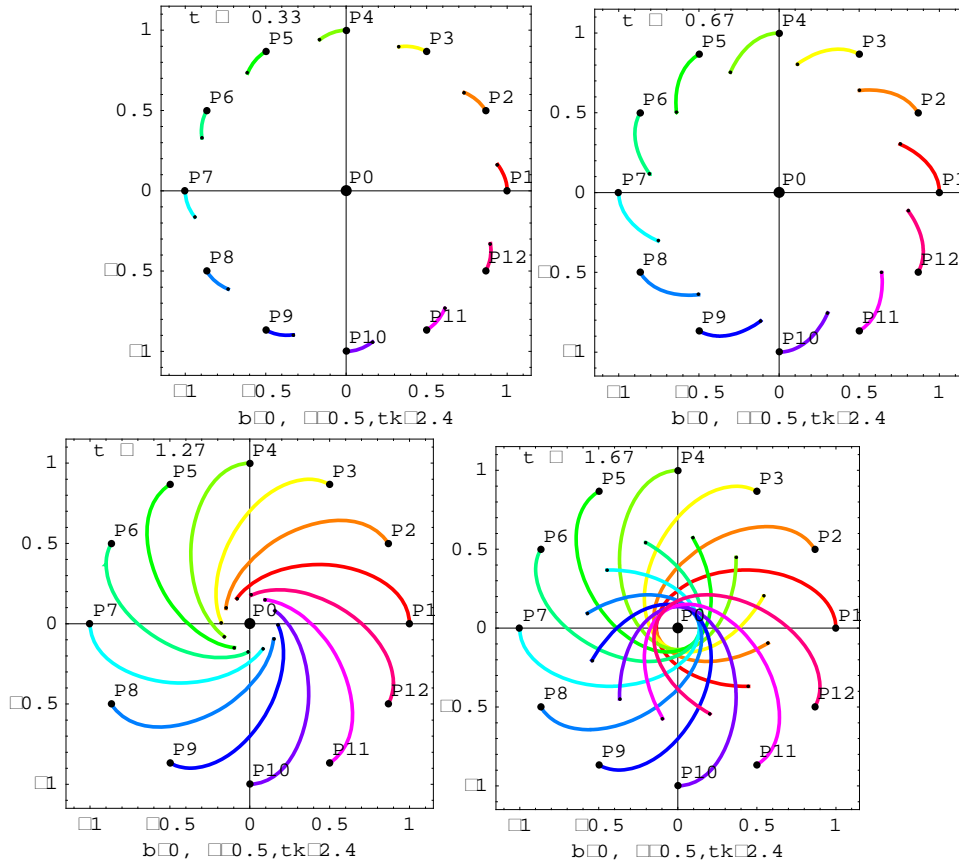


Рисунок 2

Пример 3. Для $n=13$ используя модуль *PointsOfEquilibrium* [2; 10] построим графики двух кривых, точки пересечения которых соответствуют точкам равновесия и построенный график даст возможность определить области, содержащие точки равновесия (рисунок 3).

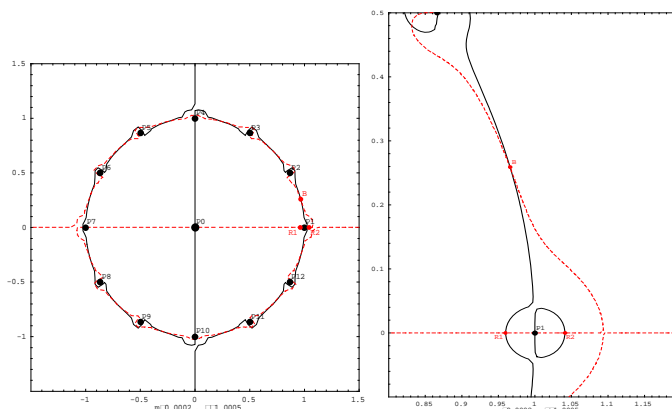


Рисунок 3

Рассмотрим следующий пример [2; 10; 11], иллюстрирующий очень «чуткую» зависимость характера устойчивости положения равновесия от расстояния от центрального тела до тел, находящихся в вершинах правильного 12-угольника.

Пример 4. Используя модуль `AnimatedZeroMassSol` для анимации движения тела с бесконечно малой массой в гравитационном поле создаваемом конфигурацией 13-ти тел P0-P12 (рисунок 3), убедимся в устойчивости биссекториального положения равновесия В (точка между телами P1 и P8).

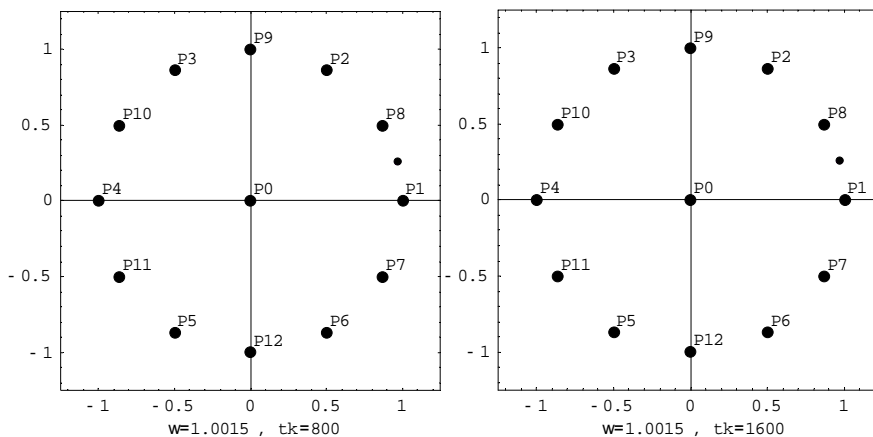


Рисунок 4 – Устойчивая биссекториальная точка В для $m_1=0.003$ и $\alpha=0.9999999$

Из полученных графиков (рисунок 4) видно, что при времени $t=1600$ точка P не покидает положение равновесия В. Это подтверждает аналитические выкладки о том, что положение равновесия В является устойчивым.

Пусть теперь значение $P0P1$ равно 0.9999. Оставим ту же массу $m_1=0.0003$. Исследуем характер устойчивости точки В в этом случае. Используя тот же модуль `AnimatedZeroMassSol`, убедимся в неустойчивости нерадиального положения равновесия В. Действительно, получаем (рисунок 5), что точка В покидает свое положение уже при $t=8$.

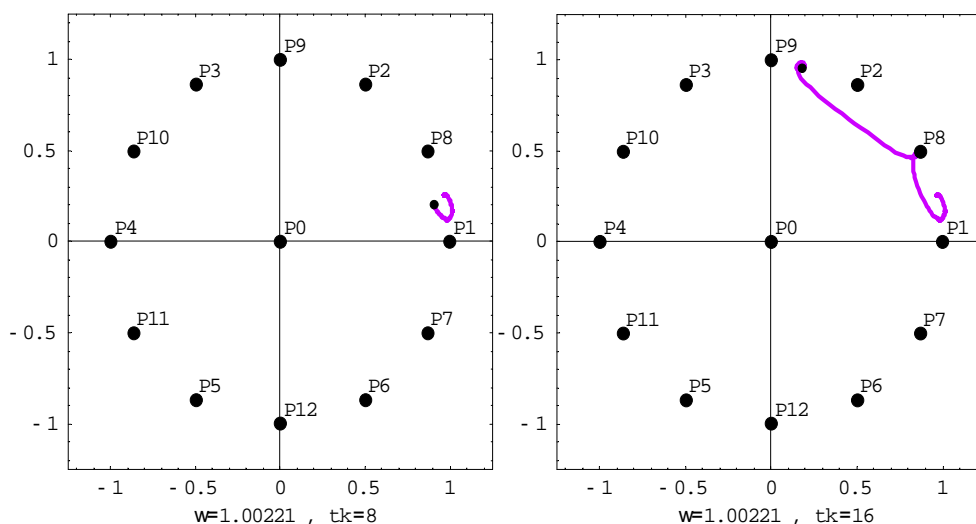


Рисунок 5 – Неустойчивая нерадиальная точка В для $m_1=0.003$ и $\alpha=0.9999$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ruskeepää, Heikki. *Mathematica Navigator: Mathematics, Statistics, and Graphics* / Heikki Ruskeepää. – Burlington, San Diego, London : Elsevier. – 3rd ed. – 2009. – 112 p.

2. Гадамский, Л. Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры *Mathematica* / Л. Гадамский, И.Р. Ковальчук, А.В. Чичурин. – М. : МАКС Пресс, 2007. – 112 с.
3. Wolfram, Stephen. The *Mathematica* Book, Fifth Edition / Stephen Wolfram. – Media, 2003. – 1488 p.
4. Прокопеня, А.Н. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 265 с.
5. Прокопеня, А.Н. Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений : интерактивный учеб. / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск : БГУ, 2005.
6. Wolfram, S. Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access : www.wolfram.com. – Date of access : 01.12.2010.
7. Гребеников, Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / Е.А. Гребеников // Матем. моделирование. – Т. 10. – 1998. – № 8. – С. 74–80.
8. Bank, D. Configurations polygonales en equilibre relative / D. Bank, B. Elmasout // C.R. Acad. Sci. Serie II b. – 2001. – Vol. 329. – P. 243–248.
9. Абалакин, В.К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин [и др.] ; под общ. ред. Г.Н. Дубошина. – М. : Наука, 1976. – 854 с.
10. Гребеников, Е.А. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел / Е.А. Гребеников [и др.] ; – М. : ВЦ РАН, 2006. – 44 с.
11. Гадамский, Л. Анимация графической информации в ограниченной задаче 14 тел с неполной симметрией / Л. Гадамский, А.В. Чичурин // Веснік Брэсцкага дзярж. ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 1 (32). – С. 17–28.

Chichurin A.V. The Use of Modern Systems of Computer Mathematics for the Study of the Restricted Problems of Cosmic Dynamics in the Educational Process

The article covers the use of the computer system mathematics at teaching the effective courses in the three specialty at the faculty of mathematics; the expediency of the choice of the *Mathematica* system is discussed; one of the applications with is connected to new restricted problems of cosmic dynamics. The examples of the effective use of visualization and animation capacities of the systems of computer mathematics are provided.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 03.01.2011