УДК 539.12:530.145

Анастасия Михайловна Кузьмич[1], Владимир Анестиевич Плетюхов[2]
[1]студентка физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
Anastasia Kuzmich[1], Vladimir Pletyukhov[2]
[1]Student of the Faculty of Physics and Mathematics
at the Brest State A. S. Pushkin University
[2]Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: pletyukhov@yandex.by

ОПИСАНИЕ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ ПОСРЕДСТВОМ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрено 48-компонентное тензорное поле, которое может служить для геометризованного описания киральных дираковских частиц с внутренними степенями свободы. Дана квантовая формулировка теории на основе статистики Ферми – Дирака.

Ключевые слова: *тензорное поле, дираковские частицы, внутренние степени свободы.*

Description of Internal Degrees of Freedom of the Dirac's Particles by Means of Tensor Fields

The 48-component tensor field, which can be used for the geometrized description of the chiral Dirac particles with internal degrees of freedom, is considered. Its quantum formulation on the basis of Fermi –Dirac statistics is given.

Key words: *tensor field, Dirac particles, internal degrees of freedom.*

Введение

В современных теоретико-полевых моделях для описания изоспиновых степеней свободы дираковских частиц используются унитарные компактные группы внутренней симметрии, коммутирующие с группой Лоренца. Фактически в основе этого описания лежит распадающаяся в релятивистски-инвариантном смысле система уравнений Дирака. Вводимые таким образом внутренние квантовые числа имеют негеометрическое, т. е. принципиально иное по сравнению со спином, происхождение.

Однако существует точка зрения, что не только спин, но и все другие степени свободы фундаментальных частиц должны допускать пространственно-временную интерпретацию. Впервые предположение о том, что в качестве геометрической модели семейств фермионов может служить не распадающаяся по полной группе Лоренца система тензорных уравнений, получившая в литературе название «уравнение Дирака – Кэлера» [1], было высказано в работах [2; 3]. С теоретико-групповых позиций эта возможность обусловлена динамической неразличимостью уравнения Дирака – Кэлера (ДК) и системы четырех уравнений Дирака с некомпактной группой внутренней симметрии SU(2,2). В рамках вторично-квантованной модели реализация геометризованного подхода к описанию дираковских частиц посредством поля ДК предполагает квантование этого поля по «аномальной» статистике Ферми – Дирака.

В работе [4], а также [5; 6] была показана возможность такого квантования, обусловленная тем, что условие теоремы Паули о связи спина и статистики не распространяется на поля с некомпактными группами внутренней симметрии.

SU(6,6) – симметричное обобщение поля Дирака – Кэлера

Отдавая должное уравнению ДК, приходится тем не менее констатировать, что его способность служить в качестве модели для геометризованного описания всех известных внутренних степеней свободы фундаментальных частиц, например, кварков или лептонов, ограничена вследствие недостаточного числа компонент волновой функции, равного 16. Последовательная реализация и обобщение данного подхода в рамках 4-мерного пространства предполагает использование тензорных систем уравнений с аналогичными уравнению ДК алгебраическими, групповыми и квантовыми свойствами, но с бóльшим числом компонент волновой функции.

Рассмотрим одну из таких систем, предложенную в [8]. Она базируется на схеме зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus 2(1,1) \oplus \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Тензорная формулировка интересующей нас системы уравнений имеет вид

$$\partial_\lambda \varphi_{\lambda,\alpha\beta} + \frac{1}{3}\left(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho}\partial_\lambda \varphi_\varrho\right) + m\varphi_{\alpha\beta} = 0,$$
$$\partial_\lambda \varphi_{\alpha,\lambda\beta} - \frac{2}{3}\left(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho}\partial_\lambda \varphi_\varrho\right) - \delta_{\alpha\beta}\partial_\varrho \varphi_\varrho - i\varepsilon_{\alpha\eta\lambda\varrho}\partial_\eta \varphi_{\lambda,\varrho\beta} + m\varphi_{\lambda\alpha,\lambda\beta} = 0,$$
$$\partial_\alpha \varphi_{\lambda\alpha,\lambda\beta} + \partial_\alpha \varphi_{\alpha\beta} + m\varphi_\beta = 0,$$
$$\partial_\nu \varphi_{\mu\nu,\alpha\beta} + \partial_\mu \varphi_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{3}\big(\delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \varphi_{\eta\nu,\eta\beta} - \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \varphi_{\eta\nu,\eta\alpha} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\eta \varphi_{\eta\beta} - \delta_{\mu\beta}\partial_\eta \varphi_{\eta\alpha} +$$
$$i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\varrho}\partial_\eta \varphi_{\eta\varrho}\big) + m\varphi_{\mu,\alpha\beta} = 0 \tag{2}$$

плюс аналогичные уравнения, получающиеся из (2) путем замен $\varphi_\beta \longrightarrow \psi_\beta$, $\varphi_{\lambda\beta} \longrightarrow \psi_{\lambda\beta}$, $\varphi_{\lambda,\mu\nu} \longrightarrow \psi_{\lambda,\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu,\lambda\beta} \longrightarrow \psi_{\mu\nu,\lambda\beta}$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \longrightarrow \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}$ (обозначим их, не выписывая, (3)). Все фигурирующие в (2), (3) тензоры сопоставляются неприводимым представлениям группы Лоренца:

$$\varphi_\beta, \psi_\beta \sim \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \varphi_{\mu\nu,\lambda\beta}, \psi_{\mu\nu,\lambda\beta} \sim (1,1);\ \varphi_{\lambda\beta} \sim (0,1), \psi_{\lambda\beta} \sim (1,0);$$
$$\varphi_{\lambda,\mu\nu} \sim \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \qquad \psi_{\lambda,\mu\nu} \sim \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

С точки зрения классической теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) полевая система (2), (3) описывает спины 0, 1, 2 и характеризуется удвоением состояний по значению внутренней четности.

Тензорная система (2), (3) может быть записана в стандартной для РВУ матрично-дифференциальной форме

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi = 0, \tag{4}$$

где волновая функция Ψ преобразуется по представлению (1), а матрицы Γ_μ размерности 48×48 удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака.

При подходящем выборе базиса в пространстве представления волновой функции матрицы Γ_μ и матрица η инвариантной билинейной формы $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^{+}\eta\Psi$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду

$$\Gamma_\mu = \mathrm{I}_{12} \otimes \gamma_\mu, \ \eta = \gamma_4 \otimes \mathrm{I}_3 \otimes \gamma_4, \quad (5)$$

где γ_μ – обычные дираковские матрицы размерности 4×4. Отсюда следует инвариантность свободного лагранжиана теории

$$L_0 = -\bar{\Psi}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi \quad (6)$$

относительно преобразований группы внутренней симметрии SU(6,6).

Генераторы $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ представления группы Лоренца (1) допускают в базисе (5) разложение

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \mathrm{I}_{12} \otimes \mathcal{J}^1_{\mu\nu} + \mathcal{J}^2_{\mu\nu} \otimes \mathrm{I}_4\,, \quad (7)$$

где $\mathcal{J}^1_{\mu\nu}$ и $\mathcal{J}^2_{\mu\nu}$ – генераторы представлений $[(0,\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},0)]$ и $[(\frac{1}{2},1) \oplus (1,\frac{1}{2})]$ соответственно. Поскольку операторы $\mathcal{J}^2_{\mu\nu}$ являются одновременно генераторами представления SL(3,C) группы SU(6,6) внутренней симметрии теории, то очевидно, что преобразования группы Лоренца образуют полупрямое произведение (не коммутируют) с преобразованиями группы внутренней симметрии.

Последнее обстоятельство является очень важным, поскольку предоставляет возможность двоякого разложения алгебры A_R группы полной инвариантности теории:

$$\mathrm{A}_R = \{\mathcal{J}_{\mu\nu}\}[\sim]\left(\{d_\mu\} \oplus \{U\}\right); \quad (8)$$

$$\mathrm{A}_R = \left(\{\check{\mathcal{J}}_{\mu\nu}\}[\sim]\{d_\mu\}\right) \oplus \{U\}. \quad (9)$$

Здесь $\check{\mathcal{J}}_{\mu\nu} = \mathrm{I}_{12} \otimes \mathcal{J}^1_{\mu\nu}$; $\{\mathcal{J}_{\mu\nu}\},\{d_\mu\},\{U\}$ – совокупность генераторов группы Лоренца, пространственно-временных трансляций и внутренней симметрии соответственно, символ $[\sim]$ означает полупрямую сумму.

С точки зрения разложения (8) лагранжиан (6) описывает тензорное поле со спинами 0, 1, 2 и внутренней симметрией, преобразования которой образуют полупрямое произведение с преобразованиями группы Лоренца, тогда как согласно (9) речь идет об описании дираковского поля с «обычной» внутренней симметрией. (Поясним, что под «обычной» здесь понимается внутренняя симметрия, которой соответствуют степени свободы негеометрического (нелоренцевского) происхождения и преобразования которой коммутируют с преобразованиями группы Лоренца).

Квантовая формулировка теории и интерпретация внутренних степеней свободы

Описание дираковских частиц посредством тензорной системы (2), (3) предполагает возможность корректного вторичного квантования по статистике Ферми – Дирака. Как показано в [7], такое квантование реализуется посредством перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения

$$[a_{1s}(\mathrm{p}), a^{+}_{1s}(\mathrm{p}')]_{+} = [b_{1s}(\mathrm{p}), b^{+}_{1s}(\mathrm{p}')]_{+} = \delta_{ss'}\delta(p-\mathrm{p}'), \quad (10)$$

$$[a_{2s}(\mathrm{p}), a^{+}_{2s}(\mathrm{p}')]_{+} = [b_{2s}(\mathrm{p}), b^{+}_{2s}(\mathrm{p}')]_{+} = \delta_{ss'}\delta(p-\mathrm{p}'), \quad (11)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют различным собственным значениям дополнительного оператора $\hat{\Pi}$ ($\hat{\Pi}_0$ в системе покоя), входящего наряду с другими стандартными операторами в полный набор и имеющего в каноническом базисе вид

$$\hat{\Pi}_0 = \sigma_3 \otimes \mathrm{I}_{24}. \quad (12)$$

В работе [7] степень свободы, соответствующую оператору Π_0, мы назвали П-четностью, при этом ее физический смысл не обсуждался. Исследования, проведенные в работе [8], позволяют, на наш взгляд, установить физический смысл данного оператора и связанного с ним сохраняющегося заряда g.

Квантовое описание рассматриваемой полевой системы на основе перестановочных соотношений (10), (11) приводит к необходимости использования пространства состояний с индефинитной метрикой $\mathrm{H} = \mathrm{H}_+ \oplus \mathrm{H}_-$, где H_+ и H_- – подпространства с положительной и отрицательной нормами векторов состояний соответственно.

Для корректной вероятностной интерпретации теории необходимо, чтобы в ней отсутствовали переходы между состояниями из подпространств H_+ и H_-. Существование соответствующего правила запрета обусловлено в данном случае некомпактностью группы внутренней симметрии системы (2), (3), одним из генераторов которой является оператор $\widehat{\Pi}_0$. Инвариантность лагранжиана $L = L_0 + L_{int}$ относительно преобразований

$$\Psi \longrightarrow \Psi \exp\left(i\widehat{\Pi}_0\Theta\right) \tag{13}$$

приводит к дополнительному сохраняющемуся “заряду”

$$G \sim \sum_S (a_{1s}^+ a_{1s} + a_{2s}^+ a_{2s} - b_{1s}^+ b_{1s} - b_{2s}^+ b_{2s}). \tag{14}$$

Одночастичные состояния из подпространств H_+ и H_- характеризуются такими сохраняющимися квантовыми числами, как (e,g), (-e,g) для H_+ и (e,-g), (-e,-g) для H_-, где обозначение e относится к электрическому заряду, g – к дополнительному «заряду» частицы. Совместное действие законов сохранения для электрического и дополнительного зарядов квантового поля запрещает физически неприемлемые переходы между состояниями из H_+ и H_- для всех взаимодействий, не нарушающих внутреннюю симметрию системы (2), (3).

Обсудим теперь физический смысл оператора П-четности и соответствующего ему сохраняющегося заряда g.

С помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции систему (2), (3) можно привести к прямой сумме 24-компонентных подсистем, инвариантных по отношению к собственной группе Лоренца и сопряженных друг другу относительно операции пространственной инверсии

$$\mathrm{P} = \sigma_1 \otimes \mathrm{I}_{24}. \tag{15}$$

Явный вид указанного преобразования мы не даем из-за его громоздкости (размерность 48 x 48). Структура же (12) оператора $\widehat{\Pi}_0$ при этом не меняется.

Из сравнения (12), (15) следует, что внутренняя степень свободы, описываемая оператором $\widehat{\Pi}_0$, связана с такой геометрической операцией как P-инверсия, т. е., другими словами, может рассматриваться в качестве аналога понятия киральности в теории Дирака. Отличие от обычной дираковской киральности заключается в том, что последняя не является степенью свободы, в то время как П-киральность (заряд g) входит в полный набор величин, которые характеризуют одночастичные состояния геометрических фермионов, описываемых системой (2), (3).

При переопределении лоренцевских трансформационных свойств волновой функции в соответствии с разложением (9) степень свободы, сопоставляемая первоначально абсолютной величине спина, преобразуется в еще одну помимо киральности изоспиновую степень свободы, которой отвечает квантовое число, принимающее 6 значений. Эту степень свободы и связанную с ней внутреннюю симметрию можно интерпретировать как симметрию ароматов семейства фермионов (кварков, лептонов).

Заключение

Таким образом, система (2), (3) по своим свойствам вполне подходит в качестве математической модели для геометризованного (пространственно-временного) обоснования существования шести типов фундаментальных частиц материи – кварков и лептонов. Присущий этой системе удвоенный (по сравнению с минимально необходимым) набор состояний не противоречит данному заключению, поскольку один из этих классов состояний является ненаблюдаемым в силу правил запрета, возникающих при квантовании тензорной системы (2), (3) по статистике Ферми – Дирака.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.

2. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, nr 6. – P. 413–417.

3. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. –Vol. 119, nr 4. – P. 348–350.

4. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.

5. Сатиков, И. А. О квантовом описании поля Дирака – Кэлера / И. А. Сатиков, В. И. Стражев // Теор. и мат. физика. – 1987. – Т. 73, № 1. – С. 16–25.

6. Березин, А. В. Уравнение Дирака – Кэлера и квантовая теория дираковского поля с SU(2,2) – внутренней симметрией / А. В. Березин, И. А. Сатиков, В. И. Стражев. – Минск : ИФ АН БССР, 1998. – 35 с.

7. Плетюхов, В. А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Ядер. физика. – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.

8. Плетюхов, В. А. Матричная формулировка теории киральной частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 38–43.

REFERENCES

1. Strazhev, V. I. Uravnienije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.

2. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, nr 6. – P. 413–417.

3. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. –Vol. 119, nr 4. – P. 348–350.

4. Plietiukhov, V. A. O sviazi spina i statistiki v tieorii polia / V. A. Plietiukhov, V. I. Strazhev // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.

5. Satikov, I. A. O kvantovom opisanii polia Diraka – Keliera / I. A. Satikov, V. I. Strazhev // Tieoriet. i mat. fizika. – 1987. – T. 73, № 1. – S. 16–25.

6. Bieriezin, A. V. Uravnienije Diraka – Keliera i kvantovaja tieorija dirakovskogo polia s SU(2,2) – vnutrienniej simmietrijej / A. V. Bieriezin, I. A. Satikov, V. I. Strazhev. – Minsk : IF AN BSSR, 1998. – 35 s.

7. Plietiukhov, V. A. Tenzornyje uravnienija i dirakovskije chasticy s vnutriennimi stiepieniami svobody / V. A. Plietiukhov, V. I. Strazhev // Yad. fizika. – 1989. – T. 49. – S. 1505–1514.

8. Plietiukhov, V. A. Matrichnaja formulirovka tieorii kiral’noj chasticy so spinom 1 / V. A. Plietiukhov // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 2. – S. 38–43.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.02.2022