УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 3

Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных



Электронное учебное пособие
для студентов физических специальностей
учреждений высшего образования

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по физическим специальностям

2021

Кафедра
МАДУП

Авторы:

кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Марзан**
кандидат физико-математических наук, доцент **А.Н. Сендер**
кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Н. Сендер**

Рецензенты:

кафедра математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»,
доктор физико-математических наук, профессор
И.П. Мартынов

профессор кафедры теории функций Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор
В.Г. Кротов

Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2021. – Ч. 3: Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных. – 590 с.

Учебное пособие содержит курс лекций и практических занятий, вопросы и тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальных работ по разделу «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных».

Предназначено студентам физических специальностей учреждений высшего образования.

Знакомство с ЭУП

Электронное учебное пособие (далее – ЭУП) содержит курс лекций и практических занятий, задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальной работы, а также интерактивные тестовые задания для самоконтроля по разделу «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных» дисциплины «Математический анализ».

ЭУП не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с пособием необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети интернет. Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов.

После запуска ЭУП в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУП на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУП;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУП;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУП, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУП.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУП, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУП можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУП. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУП.

Весь текст ЭУП снабжен необходимыми гиперссылками, позволяющими реализовать интуитивно понятную навигацию с возможностью быстрого поиска требуемой информации.



Кафедра МАДУП

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 11
Примерный тематический план 12

Лекция 1 n-мерные евклидовы пространства 15
1.1 Понятие n-мерного евклидового пространства 15
1.2 Различные типы множеств n-мерного евклидового пространства 19
1.3 Последовательности точек n-мерного евклидового пространства 22
Вопросы и задания для самоконтроля 24

Практическое занятие 1. Множества в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Предельные точки множеств. Открытые и замкнутые множества 25
Задания для самостоятельного решения 33

Лекция 2 Предел и непрерывность функции многих переменных 39
2.1 Понятие функции многих переменных 39
2.2 Предел функции многих переменных 42
2.3 Непрерывность функции многих переменных 48
2.4 Равномерная непрерывность функций 50
2.5 Непрерывные отображения. Понятие области 52
Вопросы и задания для самоконтроля 53

Практическое занятие 2. Область определения и область значений функции многих переменных 54
Задания для самостоятельного решения 62

Практическое занятие 3. Предел и непрерывность функции многих переменных 65
Задания для самостоятельного решения 72

Лекция 3 Частные производные и дифференциал функции многих переменных 75
3.1 Частные производные функции многих переменных 75
3.2 Дифференцируемость функции многих переменных 79
3.3 О связи непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью . . 81
3.4 Достаточное условие дифференцируемости 83
3.5 Касательная плоскость и нормаль к поверхности 86
Вопросы и задания для самоконтроля 90

Лекция 4 Производные и дифференциалы сложных функций. Производные высших порядков . . . 91
4.1 Производные и дифференциалы сложных функций 91
4.2 Инвариантность формы первого дифференциала 95
4.3 Дифференциал функции и приближенные вычисления 96
4.4 Производные высших порядков. Теорема Шварца 97
4.5 Дифференциалы высших порядков функции многих переменных 101
Вопросы и задания для самоконтроля 103

Практическое занятие 4. Производные и дифференциалы функций многих переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 104
Задания для самостоятельного решения 117

Лекция 5 Производная по направлению. Градиент. Формула Тейлора – Маклорена для функции многих переменных 122
5.1 Производная по направлению. Градиент 122
5.2 Формула Тейлора – Маклорена 128
Вопросы и задания для самоконтроля 132

Практическое занятие 5. Производная по направлению. Формула Тейлора – Маклорена для функции двух переменных 133
Задания для самостоятельного решения 141

Лекция 6 Дифференцирование неявно заданных функций . . . 143
6.1 Понятие функции, заданной неявно. Частные производные неявно заданной функции . . . 143
6.2 Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений . . . 153
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 155

Практическое занятие 6. Дифференцирование функций, заданных неявно . . . 156
Задания для самостоятельного решения . . . 165

Лекция 7 Экстремум функции многих переменных . . . 167
7.1 Понятие экстремума функции многих переменных . . . 167
7.2 Необходимое условие локального экстремума . . . 168
7.3 Квадратичные формы . . . 170
7.4 Достаточное условие локального экстремума . . . 171
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 175

Практическое занятие 7. Экстремумы функции многих переменных . . . 176
Задания для самостоятельного решения . . . 184

Лекция 8 Условный экстремум функции многих переменных . . . 186
8.1 Условный экстремум. Сведение условного экстремума к безусловному . . . 186
8.2 Метод неопределенных множителей Лагранжа . . . 190
8.3 Достаточный признак условного экстремума . . . 191
8.4 Наибольшее и наименьшее значения функций многих переменных . . . 194
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 196

Практическое занятие 8. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функций многих переменных . . . 197
Задания для самостоятельного решения . . . 212

Варианты заданий для индивидуальной работы 1 . . . 214
Итоговый тест по разделу «Дифференциальное исчисление функций многих переменных» . . . 214

Лекция 9 Двойной интеграл, условия его существования и основные свойства . . . 215
9.1 Двойной интеграл . . . 215
9.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла . . . 216
9.1.2 Понятие двойного интеграла . . . 218
9.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла . . . 220
9.3 Основные свойства двойного интеграла . . . 222
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 223
Лекция 10 Вычисление двойного интеграла . . . 224
10.1 Сведение двойного интеграла к повторному . . . 224
10.2 Замена переменных в двойном интеграле . . . 236
10.3 Якобиан в полярных криволинейных координатах . . . 240
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 243
Практическое занятие 9. Вычисление двойных интегралов. . . . 244
Задания для самостоятельного решения . . . 262
Лекция 11 Геометрические и физические приложения двойного интеграла . . . 266
11.1 Геометрические приложения двойного интеграла . . . 266
11.2 Масса плоской неоднородной фигуры . . . 269
11.3 Статические моменты . . . 272
11.4 Координаты центра масс материальной пластинки . . . 274
11.5 Момент инерции материальной пластинки . . . 276
11.6 Площадь гладкой поверхности . . . 278
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 283
Практическое занятие 10. Геометрические приложения двойного интеграла . . . 284
Задания для самостоятельного решения . . . 307
Практическое занятие 11. Физические приложения двойного интеграла . . . 313
Задания для самостоятельного решения . . . 328

Лекция 12 Тройные интегралы . . . 332
12.1 Задача о массе материального кубируемого тела . . . 332
12.2 Понятие тройного интеграла . . . 333
12.3 Суммы Дарбу. Условия существования тройного интеграла . . . 334
12.4 Основные свойства тройных интегралов . . . 336
12.5 Способы вычисления тройных интегралов . . . 338
12.6 Замена переменных в тройном интеграле . . . 343
12.6.1 Цилиндрические координаты . . . 344
12.6.2 Сферические координаты . . . 345
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 350

Практическое занятие 12. Вычисление тройных интегралов и их геометрические приложения . . . 351
Задания для самостоятельного решения . . . 364

Практическое занятие 13. Физические приложения тройных интегралов . . . 368
Задания для самостоятельного решения . . . 384

Варианты заданий для индивидуальной работы 2 . . . 387
Итоговый тест по разделу «Двойные и тройные интегралы» . . . 387

Лекция 13 Криволинейные интегралы первого рода . . . 388
13.1 Задача о массе материальной кривой . . . 390
13.2 Понятие криволинейного интеграла первого рода . . . 390
13.3 Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода . . . 391
13.4 Основные свойства криволинейного интеграла первого рода . . . 396
13.5 Криволинейный интеграл первого рода по контуру . . . 399
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 400

Практическое занятие 14. Криволинейные интегралы первого рода и их приложения . . . 401
Задания для самостоятельного решения . . . 415

Лекция 14 Криволинейные интегралы второго рода . . . 417
14.1 Задача о работе плоского силового поля . . . 418
14.2 Понятие криволинейного интеграла второго рода . . . 419
14.3 Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода . . . 421
14.4 Основные свойства криволинейного интеграла второго рода . . . 426
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 426
Лекция 15 Криволинейный интеграл второго рода по контуру. Формула Грина . . . 427
15.1 Формула Грина . . . 428
15.2 Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур . . . 432
15.3 Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода . . . 433
15.4 Восстановление функции по ее полному дифференциалу . . . 438
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 441
Практическое занятие 15. Криволинейные интегралы второго рода и их приложения . . . 442
Задания для самостоятельного решения . . . 458
Лекция 16 Поверхностные интегралы первого рода . . . 462
16.1 Понятие поверхностного интеграла первого рода . . . 462
16.2 Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода . . . 463
16.3 Свойства поверхностного интеграла первого рода . . . 471
16.4 Приложения поверхностных интегралов первого рода . . . 473
16.4.1 Масса материальной поверхности . . . 473
16.4.2 Статические моменты материальной поверхности относительно координатных плоскостей . . . 474
16.4.3 Центры масс материальной поверхности . . . 475
16.4.4 Моменты инерции материальной поверхности относительно координатных плоскостей и осей . . . 477
Вопросы и задания для самоконтроля . . . 479

Практическое занятие 16. Поверхностные интегралы первого рода и их приложения 480
Задания для самостоятельного решения 494

Лекция 17 Поверхностные интегралы второго рода 498
17.1 Ориентация поверхности 498
17.2 Понятие поверхностного интеграла второго рода 500
17.3 Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода 502
17.4 Формула Стокса 506
17.5 Формула Остроградского – Гаусса 511
17.6 Вычисление объемов тел с помощью поверхностных интегралов второго рода 514
Вопросы и задания для самоконтроля 516

Лекция 18 Элементы теории поля 517
18.1 Основные понятия теории поля 517
18.2 Формулы Стокса и Остроградского – Гаусса в векторной форме 524
Вопросы и задания для самоконтроля 528

Практическое занятие 17. Поверхностные интегралы второго рода и их приложения 529
Задания для самостоятельного решения 537

Варианты заданий для индивидуальной работы 3 540
Итоговый тест по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы» 540

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету 541

Литература 543

Приложения 544
Предметный указатель 587
Указатель обозначений 590

Предисловие

Электронное учебное пособие (далее – ЭУП) является третьей частью следующей серии учебно-методических комплексов для студентов специальностей 1–31 04 08 «Компьютерная физика», 1–02 05 02 «Физика и информатика» по учебной дисциплине «Математический анализ»:

1. Математический анализ. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

2. Математический анализ. Часть 2. Интегральное исчисление функций одной переменной.

3. Математический анализ. Часть 3. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

4. Математический анализ. Часть 4. Числовые и функциональные ряды.

ЭУП разработано в соответствии с ОСВО 1–31 04 08–2013 специальности «Компьютерная физика» и ОСВО 1–02 05 02–2013 «Физика и информатика».

ЭУП обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУП содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее способными студентами.

Тесты, включенные в ЭУП, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач и основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и приобретению навыка решения задач.

ЭУП содержит обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	**n-мерные евклидовы пространства.** Понятие n-мерного евклидового пространства. Различные типы множеств n-мерного евклидового пространства. Последовательности точек n-мерного евклидового пространства.	2	2
2	**Предел и непрерывность функции многих переменных.** Понятие функции многих переменных. Множество уровня функции. Предел функции многих переменных. Непрерывность функции многих переменных. Равномерная непрерывность функций многих переменных. Теорема Кантора. Непрерывные отображения. Понятие области.	2	4
3	**Частные производные и дифференциал функции многих переменных.** Частные производные функции многих переменных. Дифференцируемость функции многих переменных и дифференциал. Связь непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью. Достаточное условие дифференцируемости. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	2	2
4	**Производные и дифференциалы сложных функций. Производные высших порядков.** Производные и дифференциалы сложных функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциал функции и приближенные вычисления. Производные высших порядков. Теорема Шварца. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Производная по направлению. Градиент. Формула Тейлора — Маклорена для функции многих переменных.	4	2
5	**Дифференцирование неявно заданных функций.** Понятие функции, заданной неявно. Частные производные неявно заданной функции. Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений.	2	2
6	**Экстремум функции многих переменных.** Понятие экстремума функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума. Квадратичные формы. Достаточное условие локального экстремума.	2	2

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
7	**Условный экстремум функции многих переменных.** Условный экстремум. Сведение условного экстремума к безусловному. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Достаточный признак условного экстремума. Нахождение наибольших и наименьших значений функций многих переменных.	2	2
8	**Двойной интеграл, условия его существования и основные свойства.** Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Понятие двойного интеграла. Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Криволинейные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан в полярных криволинейных координатах. Геометрические и физические приложения двойного интеграла	6	6
9	**Тройные интегралы.** Задача о массе материального кубируемого тела. Понятие тройного интеграла. Суммы Дарбу. Условия существования тройного интеграла. Основные свойства тройных интегралов. Способы вычисления тройных интегралов. Замена переменных в тройном интеграле, цилиндрические и сферические координаты. Геометрические и физические приложения тройного интеграла.	2	4
10	**Криволинейные интегралы первого рода.** Задача о массе материальной кривой. Понятие криволинейного интеграла первого рода. Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода. Основные свойства криволинейного интеграла первого рода. Криволинейный интеграл первого рода по контуру. Приложения криволинейных интегралов первого рода.	2	2
11	**Криволинейные интегралы второго рода.** Ориентированные кривые. Задача о работе плоского силового поля. Понятие криволинейного интеграла второго рода. Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода. Криволинейный интеграл второго рода по контуру. Формула Грина. Приложения криволинейных интегралов второго рода.	4	2

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
12	**Поверхностные интегралы первого рода.** Понятие поверхностного интеграла первого рода. Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода. Свойства поверхностного интеграла первого рода. Приложения поверхностных интегралов первого рода.	2	2
13	**Поверхностные интегралы второго рода.** Ориентация поверхности. Понятие поверхностного интеграла второго рода. Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода. Формула Стокса. Формула Остроградского — Гаусса. Приложения поверхностных интегралов второго рода. Скалярные и векторные поля. Градиент скалярного поля. Дивергенция и ротор векторного поля, циркуляция и поток векторного поля. Формулы Стокса и Остроградского – Гаусса в векторной форме.	4	2

ЛЕКЦИЯ 1
n-мерные евклидовы пространства

Многие вопросы естествознания приводят к рассмотрению такой зависимости между несколькими переменными величинами, при которой значения одной из переменных величин полностью определяются значениями остальных переменных.

Так, например, при рассмотрении каких-либо физических характеристик тела (например, его плотности γ или температуры T) приходится учитывать изменение этих характеристик при переходе от одной точки тела к другой. Поскольку каждая точка тела определяется тремя декартовыми координатами x, y и z, то рассматриваемые характеристики определяются значениями трех переменных x, y и z.

При рассмотрении физических процессов, меняющихся во времени, значения физических характеристик определяются значениями четырех переменных: трех координат x, y, z и времени t. Например, при изучении звуковых колебаний газа плотность ρ этого газа и его давление p определяются значениями четырех переменных x, y, z и t.

Для изучения такого рода зависимостей необходимо изучить понятие функции многих (нескольких) переменных и аппарат для исследования таких функций. Но прежде чем перейти к изучению функций многих переменных, познакомимся с некоторыми свойствами множеств, на которых эти функции будут заданы.

1.1 Понятие n-мерного евклидового пространства

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ множество всех упорядоченных совокупностей n ($n \in \mathbb{N}$) действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Суммой элементов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ множества $\mathbb{R}^n$ будем называть упорядоченную совокупность

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

а **произведением элемента** $x \in \mathbb{R}^n$ **на число** $\lambda \in \mathbb{R}$ будем называть упорядоченную совокупность

$$\lambda x = x\lambda = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Относительно введенных операций сложения элементов и умножения на число множество $\mathbb{R}^n$ становится векторным пространством и его элементы называют **векторами** (как элементы векторного пространства) или **точками**. Для вектора (точки) $x \in \mathbb{R}^n$ числа $x_1, \ldots, x_n$ называют **координатами вектора** (**координатами точки**).

Совокупность $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$ называют **нулевым вектором** или **нулем** множества $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. ***Скалярным произведением*** *векторов* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *называется число*

$$(x, y) = x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{1.1}$$

Число $\sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ называют **длиной или модулем вектора** x и обозначают $|x|$.

Число $\rho(x,y) = |x - y| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ называют **расстоянием между точками** $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Для любых* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *и любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие свойства:*

1) $|\alpha x| = |\alpha||x|$;
2) $(x, y) = (y, x)$;
3) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
4) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
5) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
6) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$.

◀Первые четыре свойства очевидны и вытекают непосредственно из определений.

Докажем пятое свойство. Сначала покажем, что для любых действительных чисел a_i и b_i, $i = \overline{1,n}$, справедливо **неравенство Коши – Буняковского**[1]:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{1.2}$$

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Рассмотрим для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ квадратный трехчлен относительно λ: $0 \leqslant (a + \lambda b, a + \lambda b) = |a|^2 + 2\lambda(a, b) + \lambda^2 |b|^2$, где (a, b) – скалярное произведение векторов a и b. Дискриминант квадратного трехчлена $D = 4(a, b)^2 - 4|a|^2 \cdot |b|^2$ должен быть неположительным, т. е. $(a, b) \leqslant |a| \cdot |b|$, откуда и следует неравенство (1.2).

Теперь докажем, что для любых x, $y \in \mathbb{R}^n$ $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, т. е. докажем, что

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}. \tag{1.3}$$

Преобразуем квадрат левой части неравенства (1.3) с использованием неравенства Коши – Буняковского (1.2).

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right) + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2. \tag{1.4}$$

[1] Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) – российский математик.

Из неравенства (1.4) следует справедливость пятого свойства.

Теперь докажем шестое свойство. Из свойства 5 следует, что $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. Действительно,

$$|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|,$$

поэтому $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. В силу «равноправия» x и y имеем также

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| = |x - y|. \blacktriangleright$$

Определение 1.2. *Множество $\mathbb{R}^n$, на котором введено скалярное произведение по формуле (1.1), называется* ***n-мерным евклидовым пространством*** *(или, более полно,* ***n-мерным векторным евклидовым пространством****).*

В случае $n = 1$ пространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с прямой $\mathbb{R}$. В случаях $n = 2$ и $n = 3$ соответствующее евклидово пространство для наглядности будет отождествляться с плоскостью или пространством, в которых выбрана некоторая прямоугольная система координат, причем координаты векторов считаются равными координатам точек в этой системе координат.

Для нумерации точек или векторов пространства $\mathbb{R}^n$ будем использовать верхние индексы, оставляя нижние индексы для обозначения порядкового номера координаты точки. Например, записывая точку $x^{(0)}$, мы будем подразумевать, что ее координаты имеют вид $\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, для точки $x^{(1)}$ – $\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$ и т. п.

Точки (векторы) в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ будем обозначать более привычным способом – (x, y) и (x, y, z) соответственно, используя для нумерации векторов нижний индекс.

1.2 Различные типы множеств n-мерного евклидового пространства

Определение 1.3. *Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$, то множество*

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) < r\}$$

называется ***открытым шаром*** *с центром в точке x радиуса r, а множество*

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x,y) \leqslant r\}$$

называется ***замкнутым шаром*** *с центром в точке x радиуса r.*

Определение 1.4. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***открытым****, если для любой точки $x \in A$ существует открытый шар с центром в этой точке, содержащейся в A.*

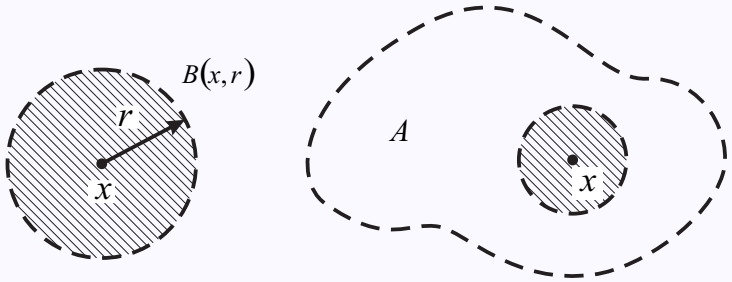


Рисунок 1.1 Шар $B(x,r)$ и открытое множество

Простейшими примерами открытых множеств являются интервал (a,b), $a < b$, числовой прямой $\mathbb{R}$, открытый шар $B(x,r)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Примером открытого множества в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является **n-мерный параллелепипед** с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$:

$$P(x;\delta_1,\ldots,\delta_n) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : x_i - \delta_i < y_i < x_i + \delta_i,\ \delta_i > 0,\ i = \overline{1,n}\right\}. \tag{1.5}$$

Если $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \delta$, то указанное выше множество называют **n-мерным кубом** с центром в точке x и обозначают $Q(x;\delta)$.

Если $n = 1$, то множество $Q(x;\delta)$ является интервалом с центром в точке x длины 2δ; если $n = 2$, то множество $Q(x;\delta_1,\delta_2)$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$ и $2\delta_2$); при $n = 3$ множество $Q(x;\delta_1,\delta_2,\delta_3)$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (их длины соответственно равны $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$).

Определение 1.5. ***Окрестностью*** *точки $x \in \mathbb{R}^n$ называется любое открытое множество, содержащее точку x.*

Если $G \subset \mathbb{R}^n$ – окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, то множество $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется ***проколотой*** *окрестностью этой точки.*

n-мерный параллелепипед с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ будем называть **прямоугольной окрестностью** точки x.

Очевидно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки. Окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать, как правило, $U_x, V_x, \ldots$; проколотые окрестности будем обозначать, как правило, $U_x^\circ, V_x^\circ, \ldots$.

Определение 1.6. *Точка называется* ***внутренней*** *для множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если существует окрестность этой точки, содержащаяся в A. Множество всех внутренних точек множества A называется его* ***внутренностью*** *и обозначается* $\mathrm{Int}A$.

Определение 1.7. *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется* ***предельной*** *для множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если в любой проколотой окрестности этой точки есть точки из A.*

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки x есть точки множества A, отличные от x. Подчеркнем, что *предельная точка x может не принадлежать множеству A.*

Множество всех предельных точек для A будем обозначать A'.

Точка множества, которая не является предельной для него, называется **изолированной** точкой множества.

Пример 1.1. Рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}$ множество $M = [a, b) \cup \{c\}$, где $c > b$, $a < b$. Множество предельных точек $M' = [a, b]$. Тогда c – изолированная точка множества M.

Определение 1.8. *Множество называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

Простейшим примером замкнутого множества является замкнутый шар $\overline{B}(x, r)$.

Определение 1.9. ***Замыканием*** *множества A называется множество $\overline{A} = A \cup A'$.*

Замыкание $\overline{A}$ является замкнутым множеством. В самом деле, если x – предельная точка для $\overline{A}$, то для любого $r > 0$ существует точка $y \in \overline{A} \cap B(x, r)$, $y \neq x$. Существует $h > 0$, для которого $B(y, h) \subset B(x, r)$. Если $y \notin A$, то $y \in A'$ и в шаре $B(x, h)$ есть точка из A. Итак, в любом шаре $B(x, r)$ есть точка из A, отличная от x. Это означает, что $x \in A$, поэтому $x \in \overline{A}$ и $\overline{A}$ замкнуто.

Определение 1.10. ***Границей*** *множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множество*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{CA}.$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются ***граничными*** *точками этого множества.*

Очевидно, что точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из CA. В частности, $\partial A \cap (\mathrm{Int} A) = \emptyset$ для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.11. *Непустое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***ограниченным****, если оно содержится в некотором шаре.*

1.3 Последовательности точек n-мерного евклидового пространства

В [1, лекция 5] давалось определение числовой последовательности как функции, определенной на множестве натуральных чисел. **Последовательностью точек** n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ будем также называть функцию $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ (обозначают $\{a^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ или $\{a^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1.12. *Если $\{a^{(m)}\}$ – некоторая последовательность, а $\{n_k\}$ – любая возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $\{a^{(n_k)}\}$ называется* ***подпоследовательностью последовательности*** *$\{a^{(m)}\}$.*

Определение 1.13. *Последовательность $\{a^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***сходящейся*** *к $a \in \mathbb{R}^n$ (краткая запись $\lim\limits_{m\to\infty} a^{(m)} = a$), если*

$$\forall U_a \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m > m_0 \quad a^{(m)} \in U_a.$$

Понятие предела последовательности $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей координат точки.

Теорема 1.1. *Для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ сходилась к точке $x \in \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

где $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

◀**Необходимость.** Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; тогда существует такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $m \in \mathbb{N}$ $m > m_0$ $x^{(m)} \in Q(x;\varepsilon)$, где $Q(x;\varepsilon)$ – n-мерный куб с центром в точке x. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и при $m > m_0$ справедливо неравенство $\left|x_i^{(m)} - x_i\right| < \varepsilon$, а это и означает, что

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Достаточность. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется такое $m_{i,\varepsilon} \in \mathbb{N}$, что

$$\left| x_i^{(m)} - x_i \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

при всех $m > m_{i,\varepsilon}$. Если обозначить $m_\varepsilon = \max\{m_{1,\varepsilon}, \ldots, m_{n,\varepsilon}\}$, то при всех $m > m_\varepsilon$ будет

$$\left| x^{(m)} - x \right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(m)} - x_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ ▶.

Последовательность точек $\{x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченной**, если множество ее значений, т. е. множество $\left\{x^{(m)} : 1, 2, \ldots\right\}$ ограничено в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Если последовательность $\{x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится, то она ограничена, так как каждая из координатных последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$ ($i = 1, \ldots, n$, i – фиксировано) в этом случае также сходится и, значит, ограничена.

В [1, лекция 6] была доказана теорема Больцано – Вейерштрасса из которой следовало, что из любой ограниченной последовательности точек из $\mathbb{R}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Аналогичная теорема может быть доказана (докажите самостоятельно) с использованием теоремы 1.1 для ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1.2 (Больцано – Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Вопросы и задания для самоконтроля

Дайте определения:

– n-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$;
– открытого и замкнутого шара;
– открытого множества;
– окрестности и проколотой окрестности точки n-мерного евклидового пространства;
– внутренней, предельной, изолированной точки подмножества n-мерного евклидового пространства;
– замкнутого множества, замыкания множества;
– границы множества;
– ограниченного множества;
– сходящейся последовательности точек n-мерного евклидового пространства.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Множества в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Предельные точки множеств. Открытые и замкнутые множества

При использовании аппарата функций многих переменных для решения прикладных задач часто приходится изображать в пространствах $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ множества точек, удовлетворяющих определенным условиям.

Задание 1. Изобразить в пространстве $\mathbb{R}^2$ множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x+3)^2+(y-4)^2 \leqslant 36$.

◀Так как $(x-a)^2+(y-b)^2$ – квадрат расстояния от точки (x,y) до точки (a,b), то заданному неравенству удовлетворяют координаты точек круга с центром в точке $(-3,4)$ и радиусом 6 (рисунок 1.2).▶

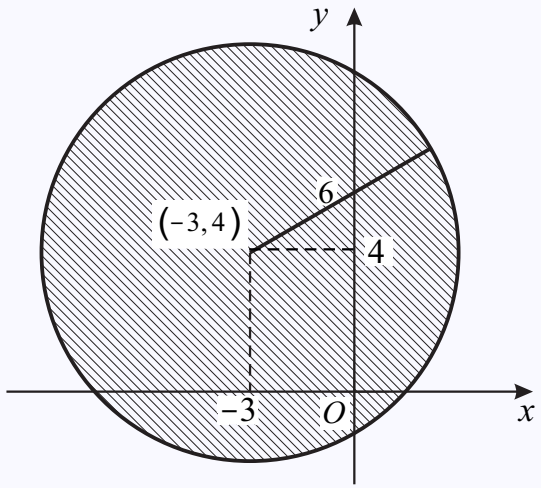


Рисунок 1.2

Задание 2. Изобразить в пространстве $\mathbb{R}^2$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y+2)^2 \leqslant 25, \\ x-2y-3 \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

◀Неравенство $(x-4)^2+(y+2)^2 \leqslant 25$ определяет круг с центром в точке $(4,-2)$ и радиусом 5. Неравенство $x-2y-3 \leqslant 0$ перепишем в виде $y \geqslant \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Ему удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ и выше этой прямой. Поэтому системе неравенств (1.7) удовлетворяют координаты точек кругового сегмента AMB (рисунок 1.3).

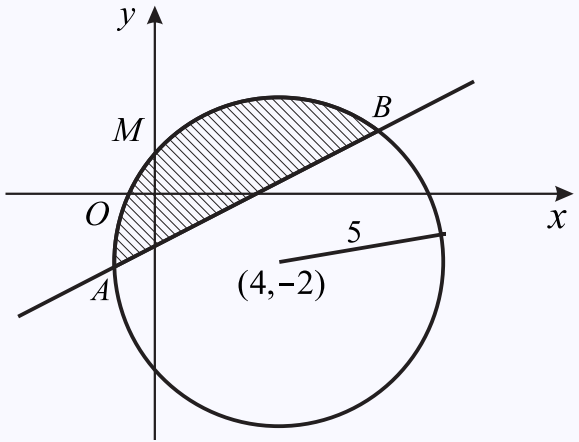


Рисунок 1.3

Чтобы найти координаты точек A и B, надо решить систему уравнений $\begin{cases} (x-4)^2+(y+2)^2 = 25, \\ x-2y-3 = 0. \end{cases}$

Решив эту систему, получим точки $(-1,-2)$, $(7,2)$.▶

Задание 3. Изобразить в пространстве $\mathbb{R}^2$ множество $(M \cap N) \setminus P$, при условии, что координаты точек множества M удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 49$, координаты точек множества N – неравенству $y \geqslant x^2$, а координаты точек множества P – уравнению $y = 2x$.

◀Множество $M \cap N$ ограничено окружностью $x^2 + y^2 = 49$ и параболой $y = x^2$. Из этого множества исключаются точки прямой $y = 2x$ (рисунок 1.4), так как по определению множество $(M \cap N) \setminus P$ есть совокупность точек, принадлежащих множеству $M \cap N$ и не принадлежащих множеству P. ▶

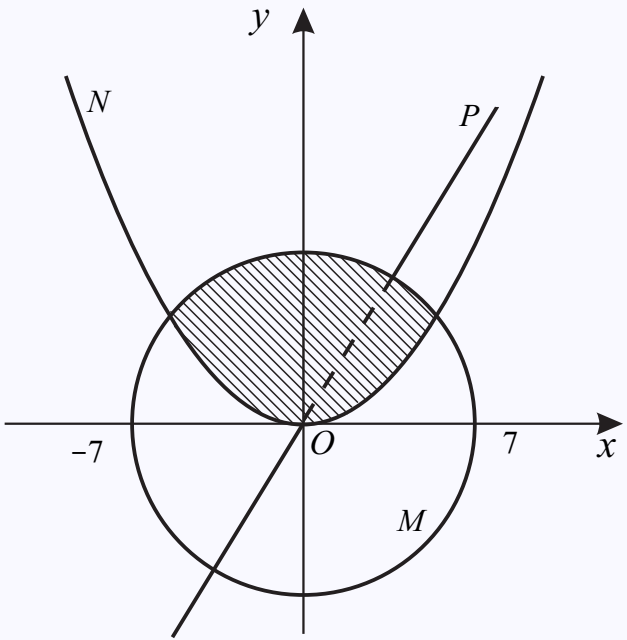


Рисунок 1.4

Задание 4. Задать множество точек круга с центром в точке $(2, 3)$ и радиусом 5 системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x). \end{cases} \tag{1.8}$$

◀Очевидно, что абсциссы точек круга изменяются от -3 до 7. Запишем уравнение окружности

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

в виде

$$y = 3 \pm \sqrt{21 + 4x - x^2}.$$

При заданном значении x, лежащем на отрезке $[-3, 7]$, значения y изменяются от $3 - \sqrt{21 + 4x - x^2}$ до $3 + \sqrt{21 + 4x - x^2}$. Таким образом, множество точек круга задается системой неравенств

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 7, \\ 3 - \sqrt{21 + 4x - x^2} \leqslant y \leqslant 3 + \sqrt{21 + 4x - x^2}. \end{cases}$$ ▶

Задание 5. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ задано системой неравенств

$$\begin{cases} y > x^2, \\ x^2 + y^2 < 20. \end{cases} \tag{1.9}$$

Задать его системой неравенств

$$\begin{cases} a < x < b, \\ \varphi(x) < y < \psi(x). \end{cases}$$

◀Сначала изобразим множество G. Неравенство $y > x^2$ задает множество точек, ограниченное параболой $y = x^2$ и лежащих выше нее, а неравенство $x^2 + y^2 < 20$ – множество точек, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 20$.

Система неравенств (1.9) задает множество, изображенное на рисунке 1.5. Чтобы найти координаты точек A и B, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

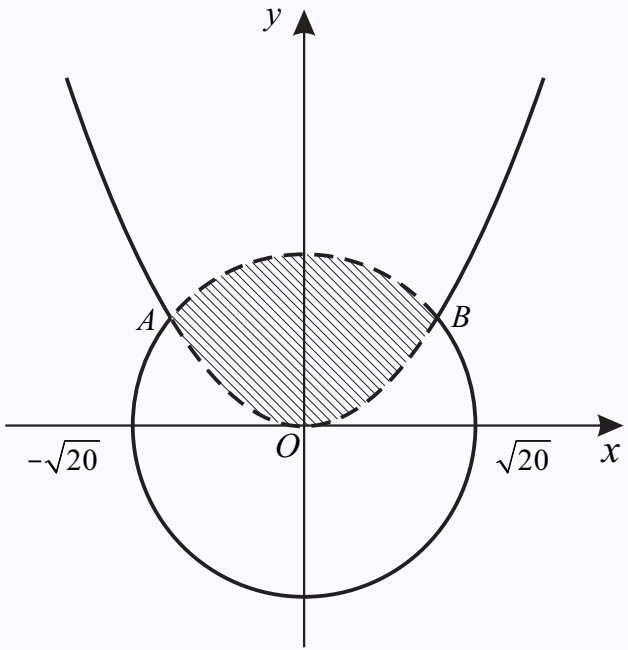


Рисунок 1.5

Из нее находим, что $A\,(-2, 4)$, $B\,(2, 4)$. Значит, x меняется от -2 до 2. Если задано x, то y изменяется от точки на параболе до точки на окружности (рисунок 1.5).

Ордината точки параболы равна x^2, а ордината точки окружности равна $\sqrt{20-x^2}$. Поэтому множество G задается системой неравенств

$$\begin{cases} -2 < x < 2, \\ x^2 < y < \sqrt{20-x^2}. \end{cases} \blacktriangleright$$

Задание 6. Задать системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \\ \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y) \end{cases} \tag{1.10}$$

множество в пространстве $\mathbb{R}^3$, ограниченное координатными плоскостями, плоскостями $x = 4$, $y = 6$ и плоскостью $3x + 12y - 8z - 24 = 0$.

$\blacktriangleleft$Сначала найдем фигуру, ограниченную на плоскости $z = 0$ линиями пересечения этой плоскости с плоскостями $x = 4$, $y = 6$, $3x + 12y - 8z - 24 = 0$. Полагая в уравнениях этих плоскостей $z = 0$, напишем уравнения прямых, лежащих в плоскости $x = 4$, $y = 6$, $3x + 12y - 24 = 0$. Мы получили трапецию, определяемую системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2 - \frac{1}{4}x \leqslant y \leqslant 6. \end{cases}$$

Пусть (x, y) – точка трапеции. На вертикальной прямой, проходящей через эту точку, пространственной области принадлежит отрезок, начинающийся на плоскости $z = 0$ и кончающийся на плоскости $3x + 12y - 8z - 24 = 0$. Поэтому множество задается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2 - \frac{1}{4}x \leqslant y \leqslant 6, \\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}y - 3. \end{cases} \blacktriangleright$$

Задание 7. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, обе координаты которых рациональны. Доказать, что любая пространства $\mathbb{R}^2$ является предельной для этого множества.

◀Выбираем любую окрестность точки (a, b), задаваемую неравенствами $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$. Найдется рациональное число r_1, отличное от числа a, и такое, что $|r_1 - a| < \delta$. Кроме того, найдется рациональное число r_2, такое, что $|r_2 - b| < \delta$. Точка (r_1, r_2) принадлежит множеству G, лежит в выбранной окрестности точки (a, b) и отличная от нее. Итак, в любой окрестности точки (a, b) есть отличные от (a, b) точки из G. Значит, (a, b) – предельная точка для множества G. ▶

Задание 8. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 25$. Доказать, что точка $(3, 4)$ является предельной для множества G.

◀Выберем любую окрестность точки $(3, 4)$, задаваемую неравенствами $|x - 3| < \delta$, $|y - 4| < \delta$, где $0 < \delta < 1$. Точка $\left(3 - \frac{\delta}{2}, 4 - \frac{\delta}{2}\right)$ принадлежит этой окрестности, причем

$$\left(3 - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{\delta}{2}\right)^2 < 3^2 + 4^2 = 25.$$

Значит, точка $\left(3 - \frac{\delta}{2}, 4 - \frac{\delta}{2}\right)$ принадлежит множеству G. Отсюда вытекает, что $(3, 4)$ – предельная точка для множества G. ▶

Задание 9. Доказать, что множество $G \subset \mathbb{R}^2$, координаты точек которого удовлетворяют неравенству $y \geqslant x^2$, замкнуто.

◀Чтобы доказать замкнутость множества G, достаточно показать, что любая точка (a, b), не принадлежащая множеству G, не может быть предельной для G. Пусть точка (a, b) не принадлежит G. Тогда справедливо неравенство $b < a^2$. Положим $\varepsilon = a^2 - b > 0$. Найдется такое $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, что из неравенства $|x - a| < \delta$ вытекает $|x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из неравенств $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$ вытекает, что

$$x^2 - y = (a^2 - b) + (b - y) + (x^2 - a^2) \geqslant (a^2 - b) - |b - y| - \left|x^2 - a^2\right| >$$

$$> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

Значит, все точки δ-окрестности точки (a, b) не принадлежат множеству G. Следовательно, (a, b) не является предельной точкой этого множества. Значит, множество G замкнуто.►

Задание 10. Найти граничные точки множества $G \subset \mathbb{R}^2$, заданного неравенством $x^2 + y^2 < 100$.

◄Данное множество состоит из точек, лежащих внутри окружности радиуса 10 с центром в начале координат (точки самой окружности не принадлежат множеству). Геометрически очевидно, что его границей является окружность $x^2 + y^2 = 100$. Докажем это утверждение аналитически. Легко проверить, что неравенства $x^2 + y^2 < 100$ и $x^2 + y^2 > 100$ задают открытые множества. Поэтому ни точки множества $x^2 + y^2 < 100$, ни точки множества $x^2 + y^2 > 100$ не являются граничными для множества G. Рассмотрим теперь точки окружности $x^2 + y^2 = 100$. Пусть точка (a, b) лежит на этой окружности. Возьмем любую окрестность точки (a, b). В ней есть как точки (x, y), для которых $|x| < |a|$, $|y| < |b|$, так и точки, для которых $|x| > |a|$, $|y| > |b|$. Для первых точек имеем $x^2 + y^2 < a^2 + b^2 = 100$, а для вторых $x^2 + y^2 > 100$. Значит, (a, b) – граничная точка для G. ►

Задания для самостоятельного решения

1. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

   1.1 $y \leqslant 2x + 4$;

   1.2 $y^2 \geqslant 6x$;

   1.3 $(x-4)^2 + (y+6)^2 \leqslant 25$;

   1.4 $x^2 + 6x + y^2 - 2y - 26 > 0$.

   1.5 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 9, \\ x^2 + y^2 < 16; \end{cases}$

   1.6 $\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 25, \\ y > 2x^2; \end{cases}$

   1.7 $x \leqslant y \leqslant x^2$.

2. Задать системой неравенств множество точек кругового сегмента, ограниченного окружностью

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

   и отрезком прямой $x - 2y + 1 = 0$.

3. Задать системой неравенств множество точек четырехугольника с вершинами $(-1, 2)$, $(3, 7)$, $(6, 4)$, $(0, -2)$.

4. Задать системой неравенств множество точек параллелограмма с вершинами $(-3, 1)$, $(2, 4)$, $(6, 2)$, $(1, -1)$.

5. Задать системой неравенств множество точек сегмента, отсекаемого от параболы $y = x^2 - 6$ прямой $y = 2x + 1$.

6. Задать системой неравенств множество точек плоскости, таких, что эти точки лежат выше прямой $x - 3y + 4 = 0$ и вне круга радиуса 10 с центром в точке $(2, -1)$.

7. Задать системой неравенств множество точек плоскости, таких, что расстояние от точки (x, y) до точки $(2, 3)$ меньше удвоенного расстояния от точки $(-3, 4)$ и больше расстояния от прямой $3x - 4y + 5 = 0$. Задать это множество системой неравенства вида

$$\begin{cases} a < x < b, \\ \varphi(x) < y < \psi(x). \end{cases}$$

8. Задать системой неравенств общую часть трех множеств: множества точек, лежащих на эллипсе

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

и внутри этого эллипса, множества точек треугольника с вершинами $(0, 5)$, $(-3, 6)$, $(3, 0)$ и множества точек, лежащих выше параболы $y = x^2$.

9. Круговое кольцо ограничено двумя окружностями с центром в точке $(2, 4)$ и радиусом 4 и 7 соответственно. Задать это кольцо системой неравенств.

10. Задать системой неравенств область, ограниченную дугами окружностей:

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0, \quad x^2 - 2x + y^2 + 4y - 35 = 0.$$

11. Четырехугольник с вершинами $(-1, 3)$, $(4, 8)$, $(5, 6)$, $(0, 1)$ разбить на части, каждая из которых задается системой неравенств вида

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y). \end{cases}$$

Разбить его же на части, каждая из которых задается системой неравенств вида (1.8).

12. Изобразить в пространстве $\mathbb{R}^3$ множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам или системам неравенств:

12.1 $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0; \end{cases}$

12.2 $xyz > 0$;

12.3 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$;

12.4 $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$;

12.5 $4 \leqslant x^2 + z^2 \leqslant 16$;

12.6 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 25, \\ x^2 + y^2 < 3; \end{cases}$

12.7 $\begin{cases} z - x^2 - y^2 > 0, \\ x^2 + y^2 - z > 9; \end{cases}$

12.8 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0, \\ x + y - 2z > 0; \end{cases}$

12.9 $(x + y)(x + z + 2) > 0$;

12.10 $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + z^2 - 4) > 0$;

12.11 $\begin{cases} z > x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16. \end{cases}$

13. Описать системой неравенств общую часть эллипсоида с полуосями 5, 4, 3, главные оси которого направлены по осям координат, и двуполостного гиперболоида, получаемого при вращении гиперболы $z^2 - x^2 = 4$ вокруг оси Oz.

14. Описать системой неравенств общую часть конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющей служит линия

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 3, \end{cases}$$

и шара радиусом 6 с центром в точке $(0, 1, -1)$.

15. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ состоит из всех точек, обе координаты которых – иррациональные числа. Доказать, что любая точка $\mathbb{R}^2$ является предельной для множества G.

16. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ состоит из всех точек, абсцисса которых рациональна, а ордината иррациональна. Доказать, что любая точка $\mathbb{R}^2$ является предельной для множества G.

17. Построить хотя бы одно множество, для которого предельными были бы точки $(3, 4)$ и $(-1, 2)$ и только эти точки.

18. Построить множество, предельными точками для которого являются все точки вида $(0, n)$, где n – целое число, и только такие точки.

19. Доказать, что объединение двух открытых множеств является открытым множеством.

20. Доказать, что пересечение двух замкнутых множеств является замкнутым множеством.

21. Доказать, что сумма двух замкнутых множеств является замкнутым множеством.

22. Доказать, что дополнение замкнутого множества открыто, а дополнение открытого множества замкнуто.

23. Доказать, что множество точек $\mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + y > 5, \\ x^2 + y^2 < 100, \end{cases}$$

открыто.

24. Доказать, что множество точек $\mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x^2 + y^2 > 25, \end{cases}$$

открыто.

25. Доказать, что множество точек $\mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} x + y \geqslant 5, \\ x^2 + y^2 \leqslant 100, \end{cases}$$

замкнуто.

26. Доказать замкнутость множества $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, где A задается неравенством $y \geqslant x^2$, B – неравенством $x^2 + y^2 \leqslant 49$, C– неравенством $x + y \geqslant 3$, D – неравенством $(x-4)^2 + (y-1)^2 \leqslant 81$.

27. Множество $G \subset \mathbb{R}^2$ задается системой неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 1, \\ x^2 + y^2 < 49. \end{cases}$$

Доказать, что оно не является ни открытым, ни замкнутым. Какие предельные точки не принадлежат этому множеству? Какие точки принадлежат множеству G, но не являются для него внутренними?

28. Множество состоит из точек плоскости, обе координаты которых рациональны. Доказать, что любая точка этой плоскости является граничной для этого множества.

29. Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек круга $x^2 + y^2 \leqslant 4$, имеющих рациональную абсциссу. Найти границу этого множества. Имеет ли это множество внутренние точки?

30. Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, таких, что $x^2 + y^2$ – рациональное число, меньшее 1. Имеет ли это множество внутренние точки? Найти границу этого множества.

31. Множество $G \subset \mathbb{R}^3$ состоит из таких точек, что координаты x, y, z рациональны, и $x^2 + y^2 + z^2 < 4$. Найти множество предельных точек для G.

32. Найти границу множества, задаваемого системой неравенств

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2+z^2<16, \\ (x-3)^2+(y-4)^2<4. \end{cases}$$

33. Построить множество, для которого предельными точками были точки $(1,4,-1)$, $(7,5,6)$, $(-3,0,8)$ и только эти точки.

34. Доказать, что множество, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2>25, \\ x+3y-2z>6, \end{cases}$$

открыто.

35. Доказать, что множество, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2\geqslant 25, \\ x+3y-2z\geqslant 6, \end{cases}$$

замкнуто.

ЛЕКЦИЯ 2
Предел и непрерывность функции многих переменных

2.1 Понятие функции многих переменных

В [1, лекция 3] нами рассмотрено понятие функции: если каждому элементу множества $x \in X$ соответствует по некоторому закону (правилу) f единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция** f со значениями $y = f(x)$ из множества Y $(f : X \to Y)$.

Определение 2.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ будем называть действительной* ***функцией многих переменных*** *или* ***функцией*** *n* ***действительных переменных.***

Как и прежде, в некоторых случаях функцию будем задавать с помощью «поточечного» правила

$$x \mapsto f(x),\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

или

$$y = f(x),\ x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

Множество X есть **область определения** функции $f : X \to \mathbb{R}$. Как и прежде, область определения мы будем обозначать $D(f)$ или просто D, когда ясно, о какой функции идет речь.

Если $A \subset X$, то множество $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ называется **образом** множества A, а $f(X)$ – **областью значений** функции. Как и прежде, область значений мы будем обозначать $E(f)$.

Напомним (см. [1, лекция 3]), что функции можно задавать разными способами (аналитически, графически или табличным способом). Задавая функцию аналитически формулой вида $y = f(x)$, как правило, дополнительно указывают область определения функции: $y = f(x),\ x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Если же функция задается только формулой $y = f(x)$, то под областью ее определения понимают множество $X \subset \mathbb{R}^n$, для всех элементов которого эта формула имеет смысл. В этом случае уместной является задача о нахождении допустимого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, являющегося областью определения функции.

Пример 2.1. Найти допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^3$, являющееся областью определения функции $f(x,y,z) = \frac{x+y-z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$.

◀Искомое множество определится из условия $4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, т. е. условия $x^2 + y^2 + z^2 < 4$. Это открытый шар с центром в начале координат радиуса 2. ▶

Определение 2.2. ***Графиком функции*** $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, *называют множество точек*

$$\{(x, f(x)) = (x_1, \ldots, x_n, f(x)) : \ x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Например, графиком функции двух переменных $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, является множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, принадлежащих параболоиду вращения, который изображен на рисунке (2.1).

График функции двух переменных, вообще говоря, представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Как правило, построение поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ оказывается довольно трудной задачей, и поверхность обладает меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. В случае графика функции трех и большего числа переменных говорить о наглядности вообще не приходится. В связи с этим оказывается удобным геометрически описывать функцию многих переменных с помощью так называемого *множества уровней функции.*

Определение 2.3. *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. *Множество точек* $x \in X$, *удовлетворяющих равенству* $f(x) = c$, *где* c – *некоторая постоянная, называется* ***множеством уровня функции*** f, *соответствующим данному значению* c.

В случае $n = 2$ множество уровня называют *линией уровня*, в случае $n = 3$ – *поверхностью уровня*, а при $n > 3$ – *гиперповерхностью уровня.*

Замечание 2.1. Термин «линии уровня» заимствован из картографии. В картографии линиями уровня называют линии, на которых высота точек земной поверхности над уровнем моря одинакова. По ним

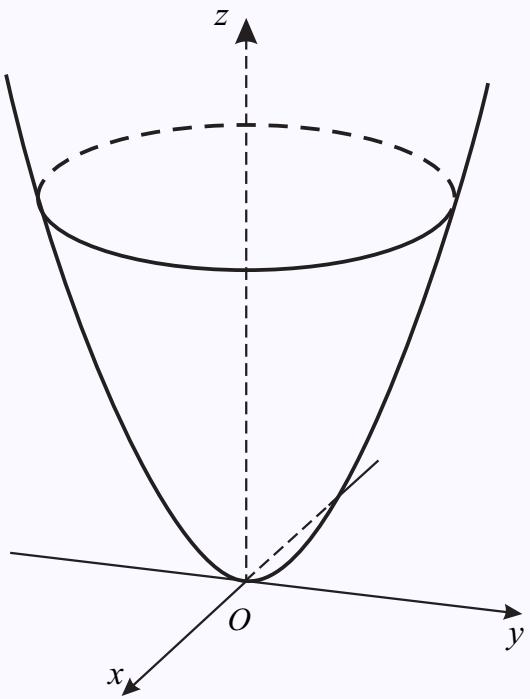


Рисунок 2.1

можно судить не только о высоте над уровнем моря определенной точки местности, но и о характере рельефа данной местности.

В физике для некоторых поверхностей и линий уровня используются специальные названия (поверхности постоянной температуры называются *изотермическими или изотермами*; поверхности постоянного давления называются *изобарическими или изобарами*; поверхности постоянного потенциала называются *эквипотенциальными*; поверхности постоянной энергии называются *изоэнергетическими*).

По взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией двух переменных.

Пример 2.2. Описать семейство линий уровня функции

$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

◀В соответствии с определением линии уровня, давая $z = xy$ различные числовые значения c, будем получать уравнения линий уровня.

При $c \neq 0$ получим семейство гипербол. Например, при $c = 1, 2, \ldots, n \ldots$ получаем семейство гипербол

$$xy = 1, \ xy = 2, \ldots, xy = n, \ldots,$$

расположенных в первой и третьей координатных четвертях.

При $c = -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$ получим семейство гипербол

$$xy = -1, \ xy = -2, \ldots, xy = -n, \ldots,$$

расположенных во второй и четвертой четвертях.

При $c = 0$ получаем уравнение $xy = 0$, определяющее две прямые $x = 0$ и $y = 0$. ▶

2.2 Предел функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, a – предельная точка X.

Определение 2.4. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом функции*** *f в точке a (или при $x \to a$), если для любой сходящейся к a последовательности точек $\{x^{(m)}\}$ множества X, отличных от точки a, предел числовой последовательности $\left\{f(x^{(m)})\right\}$ равен b:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b : \quad \forall x^{(m)} \in X \quad x^{(m)} \neq a \quad \lim_{m \to +\infty} x^{(m)} = a \qquad \lim_{m \to +\infty} f\left(x^{(m)}\right) = b.$$

Приведенное определение называют определением предела функции многих переменных «на языке последовательностей». Это определение можно сформулировать, используя терминологию окрестностей.

Определение 2.5. *Число $b \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом функции*** *f в точке a (или при $x \to a$), если для любой окрестности U_b точки b найдется такая проколотая окрестность U_a° точки a, что $f(X \cap U_a^\circ) \subset U_b$:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b : \quad \forall U_b \quad \exists U_a^\circ \quad \forall x \in X \cap U_a^\circ \quad f(x) \in U_b.$$

Определения 2.4 и 2.5 эквивалентны. Справедливость этого утверждения может быть доказана точно так же, как и эквивалентность определений «на языке последовательностей» и «на языке окрестностей» функции одной переменной. Если же в качестве окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ взять открытый шар с центром в точке a радиуса $\delta > 0$, то с учетом того, что для любых x, $a \in \mathbb{R}^n$ $\rho(x, a) = |x - a|$, можно сформулировать определение предела функции многих переменных «на языке $\varepsilon - \delta$», эквивалентное определениям 2.4 и 2.5.

Определение 2.6. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \ \ 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Замечание 2.2. Определения 2.4 и 2.5 применимы и в случаях, когда $b = +\infty$, $b = -\infty$ или $b = \infty$ (напомним, что $U_\infty = (-\infty, \Delta) \cup (\Delta, +\infty)$; $U_{-\infty} = (-\infty, \Delta)$; $U_{+\infty} = (\Delta, +\infty)$ $(\Delta > 0)$).

В определении 2.6 $b \in \mathbb{R}$ – конечное число. Если $b = +\infty$, то в определении 2.6 неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ нужно заменить на неравенство $f(x) > E$, если $b = -\infty$ – на неравенство $f(x) < -E$, если $b = \infty$ – на неравенство $|f(x)| > E$, $E > 0$.

Замечание 2.3. Определения 2.4 – 2.6 по форме записи ничем не отличаются от случая функций одной переменной. А значит, для функций многих переменных будут справедливы основные положения теории пределов, аналогичные соответствующей теории для функции одной переменной (аналогично доказывается теорема о единственности предела функции, вводится понятие бесконечно малых и бесконечно больших в точке для этих функций, а также свойства таких функций и т. п.).

Например, для функции многих переменных будет справедлив критерий о связи функции, имеющей предел, и бесконечно малой функции, аналогичный критерию для функции одной переменной.

Теорема 2.1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to a$.

Для функции двух переменных $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^2)$ можно использовать краткую запись для ее предела в виде $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$, где (x_0, y_0) – предельная точка D.

Если в качестве окрестности точки использовать прямоугольную окрестность, определение 2.6 в случае функции двух переменных удобно сформулировать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall (x,y) \in D \;\; \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta, \\ 0 < |y - y_0| < \delta \end{cases} \quad |f(x,y) - b| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Пример 2.3. Доказать, используя определение предела функции по Коши, что

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \frac{x+y}{x^2+1} = -1. \tag{2.2}$$

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении $\delta > 0$ оценим сверху

$$\left| \frac{x+y}{x^2+1} - (-1) \right| :$$

$$\left| \frac{x+y}{x^2+1} + 1 \right| = \frac{|x+y+x^2+1|}{x^2+1} \leqslant \frac{|x|\,|x+1| + |y+1|}{1}.$$

Введем ограничения для предельной точки $(-1,-1)$, взяв в качестве «радиуса» ее квадратной окрестности меньше половины расстояния между предельной точкой и прямой $x=0$. Например, $\begin{cases} |x+1|<\frac{1}{2}, \\ |y+1|<\frac{1}{2} \end{cases}$. С учетом указанного ограничения оценим сверху $|x|$:

$$|x+1|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{2}<|x|<\frac{3}{2}<2$. Искомая оценка примет вид:

$$\left|\frac{x+y}{x^2+1}-(-1)\right| \le |x|\,|x+1|+|y+1|<2\,|x+1|+|y+1|\,.$$

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} 2\,|x+1|<\frac{\varepsilon}{2}, \\ |y+1|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1|<\frac{\varepsilon}{4}, \\ |y+1|<\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}.$$

В качестве δ возьмем $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$. При таком выборе δ будет выполняться определение предела функции 2.1.▶

Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $f: X\to\mathbb{R}$ – функция n-переменных, $D\subset X$, a – предельная точка D. Если для некоторого $b\in\mathbb{R}$ и

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0 \;\; \forall x\in D\subset X \;\; 0<\rho(x,a)<\delta \quad \rho(f(x),b)<\varepsilon,$$

то число b называют **частичным пределом** функции f в точке a (или **пределом функции f по подмножеству** D). Несложно показать (покажите самостоятельно), что у функции f существует предел, равный $b\in\mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда любые частичные пределы функции будут существовать и равняться b. Указанное утверждение можно использовать для доказательства того, что для функции не существует предела в некоторой точке (если для функции в указанной точке можно найти два различных частичных предела, то функция в указанной точке предела не имеет).

Пример 2.4. Доказать, что не существует предела функции

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\ (x,y)\in X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\}$$

в точке $(0,0)$.

◀**1-й способ.** Рассмотрим частичные пределы функции по двум подмножествам области определения функции:

а) первое подмножество $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y=x,\ (x,y)\neq(0,0)\}$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$;

б) второе подмножество $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y=\sqrt{x},\ x>0\}$. В этом случае $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sqrt{x}}{x^2+x}=0$.

Так как частичные пределы разные, то функция в указанной точке предела не имеет.

Замечание 2.4. Далее при оформлении решения для прерывания математических вычислений, преобразований будем использовать запись «= [...] =», указывая в квадратных скобках логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших вычислений или преобразований, ссылки на отдельные теоремы, свойства и т.п.

2-й способ. Перейдем к полярным координатам.

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\end{array}\right]=\lim_{\substack{r\to+0\\\varphi\in[0;2\pi]}}\frac{r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi}{r^2}=\lim_{\substack{r\to+0\\\varphi\in[0;2\pi]}}\frac{\sin2\varphi}{2}.$$

Очевидно, что существуют такие значения $\varphi\in[0;2\pi]$, для которых частичные пределы будут различными. Например, если $\varphi=\frac{\pi}{4}$, то частичный предел равен $\frac{1}{2}$, но если $\varphi=0$, то частичный предел равен 0. Значит, указанный предел не существует.►

Замечание 2.5. Переход к полярным координатам с центром в точке $(x_0; y_0)$ часто облегчает вычисление предела $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$. В этом случае мы полагаем

$$x = x_0 + r\cos\varphi, \quad y = y_0 + r\sin\varphi$$

и переходим от функции $f = f(x;y)$ к функции $F(r;\varphi) = f(x_0 + r\cos\varphi; y_0 + r\sin\varphi)$. Равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = c$$

равносильно тому, что равномерно по φ выполняется соотношение $\lim\limits_{r\to 0} F(r;\varphi) = c$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, не зависящее от φ, что из $0 < r < \delta$ вытекает $|F(r,\varphi) - c| < \varepsilon$. Это имеет место, во всяком случае, если $F(r;\varphi)$ имеет вид:

$$F(r;\varphi) = c + r^\lambda \psi(r;\varphi),$$

где $\lambda > 0$, а функция $\psi(r;\varphi)$ ограничена в области $0 < r < \alpha$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Пример 2.5. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2} = I$.

◀Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$I = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\,(x+y)}{x^2 - xy + y^2} = \lim_{r\to+0} \frac{r^3 \frac{\sin 2\varphi}{2}\,(\sin\varphi + \cos\varphi)}{r^2\left(1 - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)} = 0. \blacktriangleright$$

Замечание 2.6. Для функций многих переменных техника вычисления пределов во многом аналогична технике вычисления пределов функций одной переменной. Покажем это на конкретных примерах.

Пример 2.6. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y} = I$.

◀Имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ (аналогично, как и для функции одной переменной, доказывается теорема о пределе суммы, произведения и частного, как следствие, устанавливается, что предел многочлена в любой точке $\mathbb{R}^2$ равен значению многочлена в этой точке; предел дробно-рациональной функции в любой точке области ее определения равен значению функции в этой точке).

Раскроем неопределенность, разложив числитель и знаменатель дроби на множители:

$$I = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{x(x-2y)+2(x-2y)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{(x-2y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x+2y}{x+2} = 1. \blacktriangleright$$

Пример 2.7. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (x+1)^{\frac{1}{x+x^2y}} = I.$

◀Имеем неопределенность (1^∞). Воспользуемся формулой

$$\lim_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}} u^v = e^{\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}} v(u-1)}.$$

$$I = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1}{x+x^2y}(x+1-1)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x}{x+x^2y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1}{1+xy}} = e. \blacktriangleright$$

2.3 Непрерывность функции многих переменных

Определение 2.7. *Функция* $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, *называется* ***непрерывной в точке*** $a \in X$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad |x-a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

В терминах окрестностей (2.3) можно переписать так:

$$\forall V_{f(a)} \quad \exists U_a \quad f(U_a \cap X) \subset V_{f(a)}. \tag{2.4}$$

Если $a \in X$ – предельная точка для X, то непрерывность f в точке a означает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если же a – изолированная точка для X, то условие непрерывности (2.4) выполняется автоматически для любой функции, определенной в этой точке.

Замечание 2.7. Любая элементарная функция n-переменных непрерывна в своей области определения (элементарной функцией называют функцию, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций элементарных функций одного переменного).

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.2 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Если функции* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $a \in X$, *то и функции*

$$f_1 \pm f_2, \ f_1 \cdot f_2, \ \frac{f_1}{f_2} \ (\textit{если } f_2(a) \neq 0)$$

непрерывны в точке a.

◀Справедливость заключений теоремы есть очевидное следствие из соответствующих теорем об арифметических операциях над пределами функций многих переменных, которые доказываются аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.▶

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция n переменных

$$x \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \ x \in X,$$

где x_i в свою очередь являются функциями m переменных, определенных на множестве $T \subset \mathbb{R}^m$:

$$t \mapsto x_i = \varphi_i(t) = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \quad (i = \overline{1, n}, \ (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in T),$$

причем для любой точки $t \in T$ $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in X$. Тогда на множестве T задана **сложная функция**

$$t \mapsto f \circ \varphi = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)).$$

Теорема 2.3 (о непрерывности сложной функции). *Пусть на множестве $T \subset \mathbb{R}^m$ определена сложная функция $t \mapsto f \circ \varphi = f(\varphi(t))$. Если функция $x \mapsto f(x)$, $x \in X$, непрерывна в точке $x^{(0)} \in X$, а функции $t \mapsto x_i = \varphi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ непрерывны в точке $t^{(0)} \in T$, причем $x_i^{(0)} = \varphi_i\left(t^{(0)}\right)$, $i = \overline{1,n}$, то сложная функция $f \circ \varphi$ непрерывна в точке $t^{(0)}$.*

Замечание 2.8. Справедливость заключения теоремы 2.3 есть очевидное следствие из теоремы о пределе сложной функции многих переменных, доказательство которой мы опускаем (оно во многом аналогично доказательству теоремы о пределе сложной функции одной переменной). Доказательства последующих теорем для непрерывных функций многих переменных также будут опущены (их доказательства также во многом аналогичны доказательствам соответствующих теорем для функций одной переменной).

Теорема 2.4 (об устойчивости знака непрерывной функции). *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, непрерывна в точке $a \in X$ и $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$. Тогда во всех точках некоторой окрестности точки a, принадлежащих области определения функции, выполняется неравенство $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.*

Определение 2.8. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, называется* ***непрерывной на множестве*** *X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Теорема 2.5 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена на этом множестве.*

Теорема 2.6 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она достигает на этом множестве своих точных граней.*

2.4 Равномерная непрерывность функций

Определение 2.9. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, называется* ***равномерно непрерывной*** *на множестве $D \subset X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in D \quad |x' - x''| < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Замечание 2.9. Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она будет и непрерывной на этом множестве. Для доказательства достаточно в определении 2.9 вместо x'' взять любую точку $a \in D$ и зафиксировать ее, а в качестве x' взять $x \in D$ (x – текущая точка в D). При таком выборе будем иметь определение непрерывности функции f в точке $a \in D$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Пример 2.8. Доказать по определению 2.9, что функция

$$f(x, y) = x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

будет равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

◀Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения $\delta > 0$ (из определения 2.9) для любых точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из $\mathbb{R}^2$ запишем оценки

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| \\ |y_1 - y_2| \end{array} \right. \leqslant \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + 2\,|x_1 - x_2|\,|y_1 - y_2| + |y_1 - y_2|^2} =$$

$$= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\,. \tag{2.5}$$

Потребуем, чтобы $\left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$. Тогда в качестве δ возьмем ε. Получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon > 0 \; \forall (x_1, y_1)\,, \; (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta = \varepsilon,$$

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Теорема 2.7 (теорема Кантора). *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, то она будет равномерно непрерывной на X.*

◀Доказательство теоремы 2.7 проводится аналогично доказательству теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции одной переменной, непрерывной на отрезке.▶

2.5 Непрерывные отображения. Понятие области

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Аналогично определению непрерывности действительной функции многих переменных (определение 2.7) можно рассмотреть понятие непрерывности отображения $f : X \to Y$ в точке $a \in X$.

Определение 2.10. *Отображение $f : X \to Y$ называется* ***непрерывным в точке*** *$a \in X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Отображение $f : X \to Y$ называют **непрерывным на множестве** X, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Определение 2.11. ***Путем*** *во множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в X. Образ $\gamma([\alpha, \beta])$ называется* ***следом пути****, а точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$, соответственно,* ***началом*** *и* ***концом*** *пути γ.*

В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

Определение 2.12. *Непустое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется* ***линейно связным****, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого принадлежит X.*

Определение 2.13. ***Областью*** *будем называть любое непустое открытое линейно связное множество.*

Если множество $D \subset \mathbb{R}^n$ является областью, то множество $\overline{D}$, полученное присоединением к D всех граничных точек этого множества, называется **замкнутой областью** .

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения:
– функции многих переменных, ее области определения, области значений, графика;
– линии уровня функции двух переменных, поверхности уровня функции трех переменных;
– предела функции многих переменных;
– непрерывной функции многих переменных в точке;
– равномерно непрерывной на множестве функции многих переменных.
2. Сформулируйте и докажите теоремы:
– о непрерывности сложной функции многих переменных;
– об устойчивости знака непрерывной функции.
3. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса о функции, непрерывной на ограниченном замкнутом множестве.
4. Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции на ограниченном замкнутом множестве.
5. Дайте определение линейно связного множества.
6. Дайте определение области. Какие из нижеследующих множеств являются областями:
6.1 множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$4 < x^2 + y^2 < 25;$$

6.2 множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 < x^2 + y^2 < 10, \\ -1 < y < 1; \end{cases}$$

6.3 множество $A \cup B$, где A состоит из точек (x, y), для которых $x^2 + y^2 < 100$, а B – из точек (x, y), для которых $(x-2)^2 + (y+3)^2 < 144$?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Область определения и область значений функции многих переменных

Задание 1. Найти допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции

$$f(x, y) = \frac{x + y}{2x - y}.$$

◀Выражение $\frac{x+y}{2x-y}$ теряет смысл лишь при тех значениях x и y, при которых знаменатель обращается в нуль. Отсюда областью определения нашей функции является вся плоскость, из которой исключены точки прямой $y = 2x$ (рисунок 2.2).▶

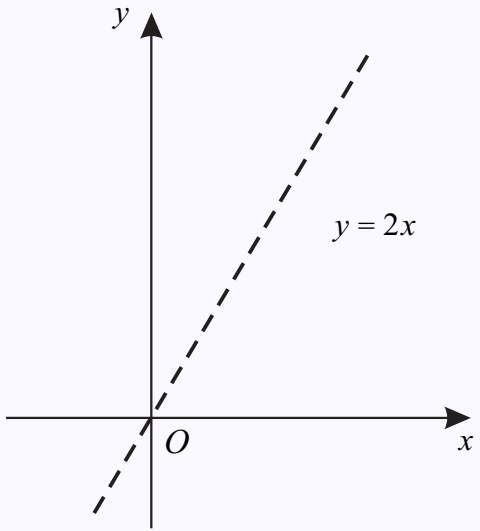


Рисунок 2.2

Задание 2. Найти допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции $f(x,y) = \sqrt{(x-1)(y+2)}$.

◀Решая неравенство $(x-1)(y+2) \geqslant 0$, находим, что либо $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ y+2 \geqslant 0, \end{cases}$ либо $\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ y+2 \leqslant 0. \end{cases}$

Решением первой системы является совокупность точек, описываемая системой неравенств $x \geqslant 1$, $y \geqslant -2$. Решением второй системы – $x \leqslant 1$, $y \leqslant -2$. Чтобы получить изображение области определения в пространстве $\mathbb{R}^2$, строим две прямые $x = 1$ и $y = -2$ (рисунок 2.3). Полученные решения показывают, что область определения состоит из двух квадрантов с общей вершиной в точке $(1, -2)$.▶

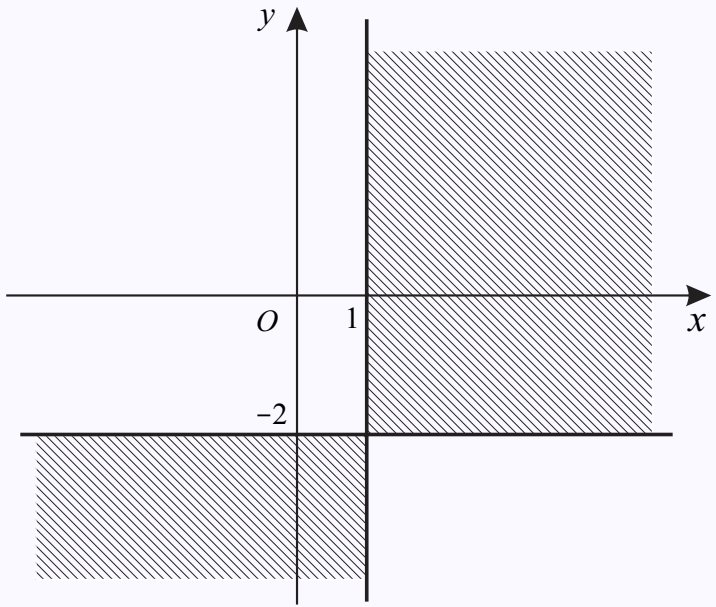


Рисунок 2.3

Задание 3. Найти допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции $f(x,y) = \ln \sin \pi(x^2+y^2)$.

◀Область определения функции совпадает со множеством решений неравенства

$$\sin \pi(x^2+y^2) > 0. \tag{2.6}$$

Решаем неравенство (2.6): $2\pi k < \pi(x^2+y^2) < \pi + 2\pi k$, где k – целые неотрицательные числа.

$$2k < x^2+y^2 < 1+2k.$$

Если $k=0$, то $0 < x^2+y^2 < 1$. При $k=1$ будет $(\sqrt{2})^2 < x^2+y^2 < (\sqrt{3})^2$, и так далее (рисунок 2.4).

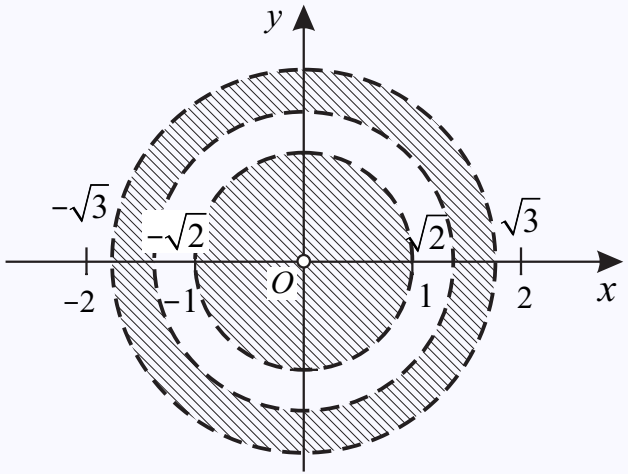


Рисунок 2.4

На положительной полуоси абсцисс в область определения функции входит множество $A = (0,1) \cup \cup (\sqrt{2},\sqrt{3}) \cup (2,\sqrt{5}) \cup (\sqrt{6},\sqrt{7}) \cup \ldots$ ►.

Задание 4. Найти допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^3$, являющееся областью определения функции

$$f(x,y,z) = \arccos\left(x^2+y^2+z^2-3\right) + \arcsin\sqrt{x^2+y^2-3}.$$

$$\blacktriangleleft \begin{cases} -1 \leqslant x^2+y^2+z^2-3 \leqslant 1, \\ 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2-3} \leqslant 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2^2, \\ \left(\sqrt{3}\right)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2^2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Первое неравенство системы (2.7) определяет шаровой слой с центром в точке $(0,0,0)$, границы которого есть: внешняя сфера $x^2+y^2+z^2=2^2$, внутренняя сфера $x^2+y^2+z^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Второе неравенство также определяет цилиндрический слой, образованный цилиндрическими поверхностями: внешняя: $x^2+y^2=2^2$, внутренняя: $x^2+y^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$. Общей частью указанных слоев будет кольцо, образованное вращением сегмента (рисунок 2.5) вокруг оси Oz. ►

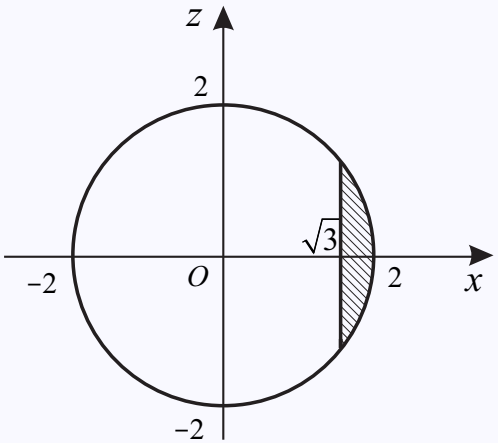


Рисунок 2.5

Задание 5. Найти множество значений функции

$$f(x,y)=\sqrt{2+x+y-x^2-2xy-y^2},\ (x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2.$$

◀Введем обозначение $z=x+y$. Тогда подкоренное выражение примет вид $u=-z^2+z+2$. Найдем множество значений функции u.

$$u'=-2z+1,\quad u'=0,\quad z=\frac{1}{2},\quad u\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{4}.$$

На луче $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ функция непрерывна и убывает. Тогда множество значений функций u есть луч $E(u)=\left[-\infty,\frac{9}{4}\right)$. Но арифметический корень имеет смысл, если $-z^2+z+2\geqslant 0$. Тогда

$$E(f)=\left[\sqrt{0},\sqrt{\frac{9}{4}}\right]=\left[0,\frac{3}{2}\right].\ \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти множество значений функции

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\ (x,y,z)\in X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y+z=6\right\}.$$

◀Область определения функции – это плоскость, которая проходит через точки $(6,0,0)$, $(0,6,0)$, $(0,0,6)$ (рисунок 2.6).

Расстояние от любой точки (x,y,z) указанной плоскости до точки $(0,0,0)$ будет $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Очевидно, что функция ρ, а значит и f, не ограничены сверху, кроме того, эти функции непрерывны на своих областях определения. Тогда

$$\sup_{(x,y,z)\in D(f)} f\,(x,y,z)=+\infty.$$

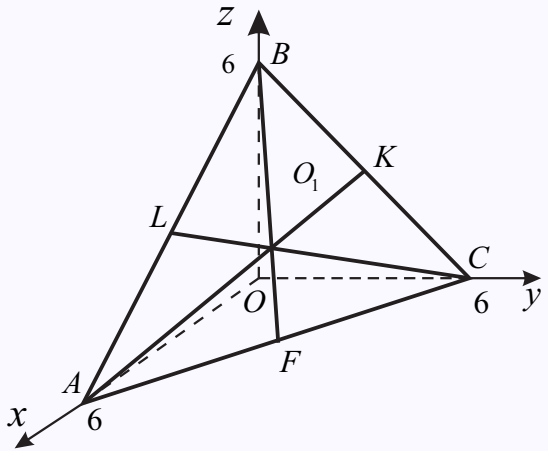


Рисунок 2.6

Точная нижняя грань достигается, она совпадает с длиной перпендикуляра, опущенного из точки $(0,0,0)$ на нашу плоскость. Этот перпендикуляр есть высота правильной пирамиды $OABC$. Основание высоты есть точка O_1 – пересечение медиан правильного треугольника ABC. Координаты точки O_1 есть $x = y = z = 2$. Покажем это. Например, отрезок BF точки O_1 будет $z = 2$. Также и остальные координаты точки O_1 будут равны 2.

$$f(2,2,2) = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12.$$

$E(f) = [12, +\infty)$. ►

Задание 7. Найти линию уровня функции

$$f(x,y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right),\ (x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2.$$

◀Линия уровня определяется уравнением

$$\ln\left(1-x^2-y^2\right)=\mathrm{c}, \tag{2.8}$$

где c – произвольная действительная константа. Исследуем уравнение (2.8):

$$1-x^2-y^2=e^c, x^2+y^2=1-e^c. \tag{2.9}$$

Если $c<0$, то уравнение (2.9) определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R^2=\sqrt{1-e^c}$. При $c=0$ имеем одну точку $O\,(0,0)$. Если $c>0$, то уравнение (2.9) решений не имеет, то есть линия уровня есть пустое множество.▶

Задание 8. Найти поверхность уровня функции

$$f(x,y,z)=\frac{2z}{x^2+y^2},\ (x,y,z)\in X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\neq 0\right\}.$$

◀Поверхность уровня определяется уравнением

$$\frac{2z}{x^2+y^2}=c. \tag{2.10}$$

Если $c>0$, то из (2.10) имеем

$$\begin{cases} z=\frac{c}{2}\left(x^2+y^2\right), \\ x^2+y^2\neq 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Система (2.11) определяет параболоид вращения, расположенный выше плоскости $z=0$ (на рисунке 2.7 он изображен в первом октанте).

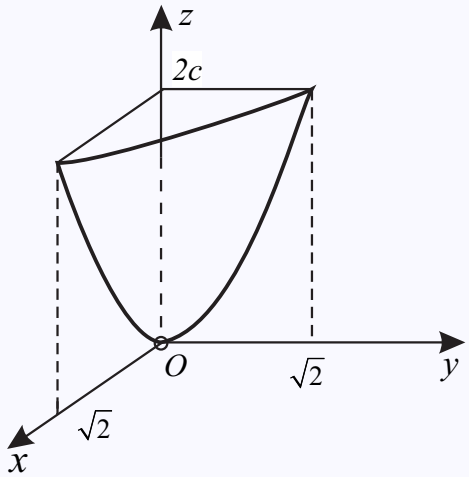


Рисунок 2.7

Если $c = 0$, то также из системы (2.11) имеем

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Система (2.12) определяет координатную плоскость $z = 0$ с выколотым началом координат.
При $c < 0$ также имеем параболоид вращения, расположенный ниже плоскости $z = 0$ (рисунок 2.8)

$$\begin{cases} z = \frac{c}{2}\left(x^2 + y^2\right), \\ x^2 + y^2 \neq 0. \end{cases}$$

На рисунке 2.8 поверхность изображена только в восьмом октанте декартовой прямоугольной системы координат.▶

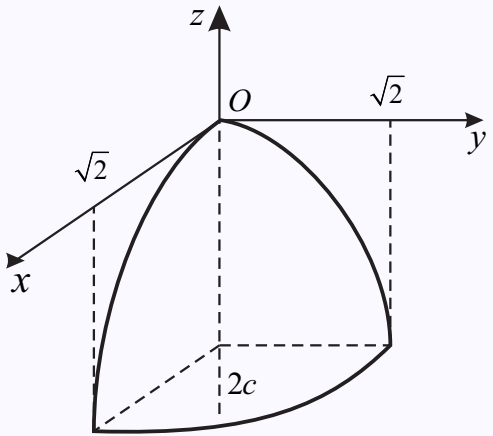


Рисунок 2.8

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите допустимые множества $X \subset \mathbb{R}^2$, являющиеся областями определения функций $z : X \to \mathbb{R}$. Сделайте соответствующие рисунки.

1.1 $z = \frac{1}{x+y}$;

1.2 $z = \frac{y}{x}$;

1.3 $z = xy$;

1.4 $z = \sqrt{x+y}$;

1.5 $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;

1.6 $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$;

1.7 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}$;

1.8 $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

1.9 $z = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$;

1.10 $z = \frac{x}{\sqrt{x-y}} + \frac{y}{\sqrt{x+y}}$;

1.11 $z = \arccos \frac{x^2+y^2}{9}$;

1.12 $z = \sqrt{y \sin x}$;

1.13 $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

1.14 $z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

1.15 $z = \ln(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1)$;

1.16 $z = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2+9}$;

1.17 $z = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$;

1.18 $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

2. Найдите допустимые множества $X \subset \mathbb{R}^3$, являющиеся областями определения функций $u : X \to \mathbb{R}$. Сделайте соответствующие рисунки.

2.1 $u = \ln(xyz)$;

2.2 $u = \sqrt{z(2-z)} + \ln(4-x^2) - 3y$;

2.3 $u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}$;

2.4 $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$;

2.5 $u = \ln \sqrt{e^{xy}(z-y^2)}$;

2.6 $u = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b} + \arcsin \frac{z}{c}$.

3. Выразить площадь треугольника как функцию его трех сторон. Указать область определения этой функции.

4. Выразить объем конуса как функцию его высоты и образующей. Указать область определения этой функции.

5. Квадратная доска состоит из 4 квадратных клеток, попеременно черных и белых; сторона каждой из них равна единице длины. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски, один из углов которого совпадает с черным углом доски. Площадь черной части этого прямоугольника является функцией от длин его сторон x и y. Запишите аналитическое выражение для этой функции.

6. Выразить объем конуса как функцию его полной поверхности S и l длины образующей.

7. Выразить площадь равнобочной трапеции как функцию от длин ее сторон.

8. Выразить объем конуса как функцию от угла осевого сечения конуса α и от радиуса r шара, вписанного в конус.

9. Выразить объем прямоугольного параллелепипеда как функцию от длины диагонали l_1, длины диагонали основания l_2 и угла φ между диагональю основания и одной из сторон.

10. Описать поверхности, являющиеся графиками функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$:

10.1 $z = x + y - 1$;
10.2 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
10.3 $z = x^2 + y^2$;
10.4 $z = x^2 - y^2$;
10.5 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
10.6 $z = xy$.

11. Найти семейства линий уровня для каждой из функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, и начертить их графики:

11.1 $z = x + y$;
11.2 $z = x^2 + y^2$;
11.3 $z = x^2 - y^2$;
11.4 $z = \frac{x}{y}$;
11.5 $z = \frac{1}{2x^2+3y^2}$;
11.6 $z = x^y$ $(x > 0)$;
11.7 $z = \frac{2-xy}{y^2}$.

12. Найти поверхности уровня функций $u : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^3$:

12.1 $u = x + y + z$;
12.2 $u = x^2 + y^2 + z^2$;
12.3 $u = x^2 + y^2 - z^2$;
12.4 $u = (z + y)^2 + x^2$;
12.5 $u = (z + y)^2 + x^2$;
12.6 $u = \frac{z}{x^2-y^2}$.

13. С течением времени в электрической цепи меняются электродвижущая сила и сопротивление. Описать с помощью понятия суперпозиции функций зависимость тока в цепи от времени.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Предел и непрерывность функции многих переменных

Задание 1. Пользуясь определением предела функции по Коши, доказать, что

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 2}} \frac{x-2y}{x^2+1} = -\frac{5}{2}.$$

◀Зададимся любым сколь угодно малым положительным $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении предела функции $\delta > 0$ оценим сверху

$$\left|\frac{x-2y}{x^2+1} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| = \left|\frac{2x-4y+5x^2+5+3-3}{2\left(x^2+1\right)}\right| =$$

$$= \left|\frac{8-4y+5x^2+2x-3}{2\left(x^2+1\right)}\right| < \left|4(2-y)+5(x+1)\left(x-\frac{3}{5}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\left|y-2\right| + 5\left|x+1\right|\left|x-\frac{3}{5}\right| = \alpha. \qquad (2.13)$$

Рассмотрим окрестность предельной точки сколь угодно малого радиуса. В нашем случае этот радиус должен быть меньше расстояния между точками $x=-1$ и $x=\frac{3}{5}$. Возьмем оценку $|x+1|<1$. Тогда

$$-1 < x+1 < 1;\ -2 < x < 0;\ -2,6 < x-\frac{3}{5} < -0,6;\ 0,6 < \left|x-\frac{3}{5}\right| < 2,6.$$

Продолжим оценку сверху α. $\alpha < 4\left|y-2\right| + 13\left|x+1\right|$. Потребуем: $4\left|y-2\right| < \frac{\varepsilon}{8}$ и $13\left|x+1\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x+1| < \frac{\varepsilon}{26}$. В качестве δ берем $\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{26}\right\}$. При таком выборе δ будет выполняться определение предела по Коши.▶

Задание 2. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ (x,y)\in X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\},$$

не имеет предела в точке $(0,0)$.

◀Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда функция f примет вид

$$f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=\cos 2\varphi. \tag{2.14}$$

Если бы существовал предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=c,$$

то для любого $\varepsilon>0$ нашлось бы такое $\delta>0$, что из неравенства $0<r<\delta$ вытекало бы $|f(x,y)-c|<\varepsilon$. Но функция (2.14) не зависит от r и в любой сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$ есть такие точки, где $f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=0$ (например, при $\varphi=\frac{\pi}{4}$), так и точки, где $f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=1$ (например, при $\varphi=0$). Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.▶

Задание 3. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

◀Полагаем $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. Тогда

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2}=r\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi.$$

Так как функция $\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi$ ограничена на $\mathbb{R}$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0} r\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi=0.\ ▶$$

Задание 4. Существует ли предел функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{если } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

когда $x\to 0$, $y\to 0$?

◀Если положить $x=at$, $y=bt$, то при любых a и $b\neq 0$ имеем:

$$\lim_{t\to 0} f(at,bt)=\lim_{t\to 0}\frac{a^2bt}{a^4t^2+b^2}=0.$$

Если же $b=0$, то $y=0$ и $f(x,y)=0$. Поэтому предел функции f, когда (x,y) стремится к точке $(0,0)$ по любой прямой, равен нулю.

В то же время мы имеем при любом $t>0$:

$$f\left(\sqrt{t},t\right)=\frac{t^2}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$ есть точки, где $f(x,y)=\frac{1}{2}$, поэтому нуль не может быть пределом функции f при $(x,y)\to(0,0)$. ▶

Задание 5. Вычислить предел:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}.$$

◀Говорят, что

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=c,$$

если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N>0$, что из $|x|>N$, $|y|>N$ вытекает неравенство $|f(x,y)-c|<\varepsilon$. Мы имеем:

$$\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2+\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Если $|x| > N$ и $|y| > N$, то

$$\left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{N}, \quad \left|\frac{y}{x^2+y^2}\right| < \left|\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{N}.$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} = 2. \blacktriangleright$$

Задание 6. Доказать, что функция

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}, \ (x,y) \in X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\},$$

не имеет предела, когда $x \to \infty$, $y \to \infty$.

$\blacktriangleleft$Положим сначала $x = t$, $y = t^4$. Тогда при $t \to \infty$ имеем: $x \to \infty$, $y \to \infty$ и

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t^4) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^4+t^8}{t^2+t^{16}} = 0.$$

С другой стороны, при $x = t^2$, $y = t$ имеем:

$$\lim_{t\to\infty} f(t^2,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^8+t^2}{t^4+t^4} = \infty.$$

Поскольку мы получили различные ответы, предела

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$$

не существует.$\blacktriangleright$

Задание 7. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} f(x,y)$, где

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & \text{если } x\neq y,\\ 4, & \text{если } x=y.\end{cases}$$

◀При $x=y=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем при $x\neq y$

$$f(x,y)=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y+1)}=\frac{x+y}{x-y+1}$$

и

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{x+y}{x-y+1}=4.$$

Поскольку по условию при $x=y$ также имеем $f(x,y)=4$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}(x,y)=4$. ▶

Задание 8. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f(x,y)$, где

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 3, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

◀При $x=0$, $y=3$ числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin(x^2y)}{x^2}$ обращаются в нуль. Положим $x^2y=\alpha$. Тогда при $x\to 0$ и $y\to 3$ будет $\alpha\to 0$, и потому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}y=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}y=1\cdot 3=3.$$

Если же $x=0$, то $f(x,y)=3$, и предел $f(x,y)$ при $y\to 3$ равен 3. ▶

Задание 9. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\frac{e^{x^2-y^2}}{1+\sin^4(x^2+3xy+y^2)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{2.15}$$

непрерывна на $\mathbb{R}^2$.

◀Функции $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ и $(x,y)\mapsto x^2+3xy+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, непрерывны на $\mathbb{R}^2$ как многочлены от x и y. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций вытекает, что $(x,y)\mapsto e^{x^2-y^2}$ и $(x,y)\mapsto 1+\sin^4(x^2+3xy+y^2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, также непрерывны на $\mathbb{R}^2$. При этом $1+\sin^4(x^2+3xy+y^2)\neq 0$ на $\mathbb{R}^2$, а потому и функция (2.15) непрерывна на $\mathbb{R}^2$. ▶

Задание 10. Доопределить функцию

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\ (x,y)\in X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\right\}, \tag{2.16}$$

при $x=0$, $y=0$ так, чтобы она была непрерывна в точке $(0,0)$.

◀Чтобы функция была непрерывна в точке $(0,0)$, надо, чтобы

$$f(0,0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

Чтобы найти предел, перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Получим:

$$f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=r^2(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi).$$

Ясно, что если $r\to 0$, то и $f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

Итак, чтобы функция (2.16) была непрерывной при $x=0$, $y=0$, надо положить $f(0,0)=0$. ▶

Задание 11. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}$.

$$\blacktriangleleft \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = (1^\infty) = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x}{x+x^2y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1}{1+xy}} = e. \blacktriangleright$$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\sqrt{4\left(x^4+y^4\right)+13\left(x^2+y^2\right)+8x^2y^2-7}-2\left(x^2+y^2\right)\right)$.

$$\blacktriangleleft \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\sqrt{4\left(x^4+y^4\right)+13\left(x^2+y^2\right)+8x^2y^2-7}-2\left(x^2+y^2\right)\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(2\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1+\frac{13\left(x^2+y^2\right)-7}{\left(2\left(x^2+y^2\right)\right)^2}}-1\right)\right) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{\sqrt{1+\frac{13(x^2+y^2)-7}{(2(x^2+y^2))^2}}-1}{\frac{1}{2(x^2+y^2)}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{13\left(x^2+y^2\right)-7}{(2(x^2+y^2))^2}}{\frac{1}{2(x^2+y^2)}} = \frac{13}{4}. \blacktriangleright$$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

$$\blacktriangleleft \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2}\ln\left(x^2+y^2\right) = (0\cdot\infty) = \left[\begin{array}{l} z = x^2+y^2, \\ z\to +0, \quad \text{если} \quad x\to 0, y\to 0 \end{array}\right] = \lim_{z\to+0} \sqrt{z}\ln z =$$

$$= (0\cdot\infty) = \lim_{z\to+0} \frac{\ln z}{\frac{1}{\sqrt{z}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{пр. Л}}{=} \lim_{z\to+0} \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{z\to+0} \frac{-2z^{\frac{3}{2}}}{z} = 0. \blacktriangleright$$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)^{x^2+y^2}$.

$$\blacktriangleleft \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)^{x^2+y^2} = \left(0^0\right) = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\ln\sin\left(x^2+y^2\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} z = x^2+y^2, \\ z \to +0 \end{array}\right] = \left[\lim_{z\to+0} z\ln\sin z = (0\cdot\infty) = \lim_{z\to+0} \frac{\ln\sin z}{\frac{1}{z}} = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{пр. Л}}{=} -\lim_{z\to+0}\cos z\cdot\lim_{z\to+0}\frac{z^2}{\sin z} = -1\cdot\lim_{z\to+0}\frac{z^2}{z} = 0\right] = e^0 = 1. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите следующие пределы:

1.1 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)$, где $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y}-1}, & \text{если } x^2y \neq 0, \\ 2, & \text{если } x^2y = 0; \end{cases}$

1.2 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

1.3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

1.4 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$;

1.5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$;

1.6 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

1.7 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

1.8 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$;

1.9 $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$;

1.10 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)$, где $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}, & x\neq y,\\ \frac{4}{3}, & x=y. \end{cases}$

2. Доказать, что функция $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ не имеет предела в точке $(0,0)$.

3. Существуют ли следующие пределы:

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x-y)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} x^y$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 0}} x^y$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\infty}} xy$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^y$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

4. Доказать, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ не существует.

5. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)^{x+y}, & \text{если} \quad x+y\neq 0,\\ 1, & \text{если} \quad x+y=0, \end{cases}$$

не имеет предела, когда $x\to\infty$, $y\to\infty$.

6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} 16-x^2-y^2, & \text{если} \quad x^2+y^2\leqslant 16,\\ 0, & \text{если} \quad x^2+y^2>16. \end{cases}$$

7. Исследовать функции $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, на непрерывность:

7.1 $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$,

7.2 $f(x,y) = \frac{2x-3}{x^2+y^2-4}$,

7.3 $f(x,y) = \frac{x-y^2}{x+y^2}$,

7.4 $f(x,y) = \frac{x-y}{x^3-y^3}$,

7.5 $f(x,y) = \ln(9-x^2-y^2)$,

7.6 $f(x,y) = \frac{3}{x^3+y^3}$,

7.7 $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$,

7.8 $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2-4)(y^2-4x)}$,

7.9 $f(x,y) = \sin\frac{1}{x+y}$,

7.10 $f(x,y) = \cos\frac{1}{x^2+y^2-9}$,

7.11 $f(x,y) = \frac{1}{xy}$,

7.12 $f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$,

7.13 $f(x,y) = \frac{x}{|y|}$.

8. Исследовать функции $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in X \subset \mathbb{R}^3$, на непрерывность:

8.1 $f(x,y,z) = \frac{1}{\sin\pi x+\sin\pi y+\sin\pi z}$,

8.2 $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{8-x^2-2y^2-4z^2}}$,

8.3 $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{xy-z}$,

8.4 $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2}$,

8.5 $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-16}$,

8.6 $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$,

8.7 $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

9. Является ли функция $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$, $(x,y) \in X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\}$, равномерно непрерывной в области ее определения?

10. Является ли функция $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, равномерно непрерывной в области ее определения?

11. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 3
Частные производные и дифференциал функции многих переменных

3.1 Частные производные функции многих переменных

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathrm{Int}X$; $f : X \to \mathbb{R}$; $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, где $\Delta x_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, причем $x^{(0)} + \Delta x \in X$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим e_i – базисный вектор пространства $\mathbb{R}^n$ (все координаты вектора равны нулю, кроме i-й координаты, равной единице).

Частным приращением функции f в точке $x^{(0)}$ по аргументу x_i называется разность

$$\Delta_{x_i} f\left(x^{(0)}\right) = f\left(x^{(0)} + \Delta x_i e_i\right) - f\left(x^{(0)}\right).$$

Полным приращением функции f в точке $x^{(0)}$ называется разность

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = f\left(x^{(0)} + \Delta x\right) - f\left(x^{(0)}\right).$$

Проиллюстрируем на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$ геометрический смысл частных приращений $\Delta_x f\,(P_0)$, $\Delta_y f\,(P_0)$ и полного приращения $\Delta f\,(P_0)$ в точке $P_0\,(x_0, y_0)$ (рисунок 3.1).

Точка $M_0\,(x_0, y_0, f\,(x_0, y_0))$ и кривые M_0B_1, M_0B_2, B_1B_3, B_2B_3 принадлежат графику функции f, частные приращения функции f по переменным x и y равны, соответственно, длине отрезка A_1B_1, т.е. $\Delta_x f\,(P_0) = |A_1B_1|$, и длине отрезка A_2B_2 $(\Delta_y f\,(P_0) = |A_2B_2|)$, а полное приращение функции f равно длине отрезка A_3B_3 $(\Delta f\,(P_0) = |A_3B_3|)$.

Для случая, когда изображенная на рисунке 3.1 поверхность будет расположена ниже плоскости $M_0A_2A_3A_1$, то частные и полное приращения функции f будут равны, соответственно, длинам указанных выше отрезков, взятых со знаком минус.

Определение 3.1. ***Частной производной*** *функции f в точке $x^{(0)}$ по аргументу x_i называется предел (если он существует и конечен)*

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f\left(x^{(0)}\right)}{\Delta x_i}. \tag{3.1}$$

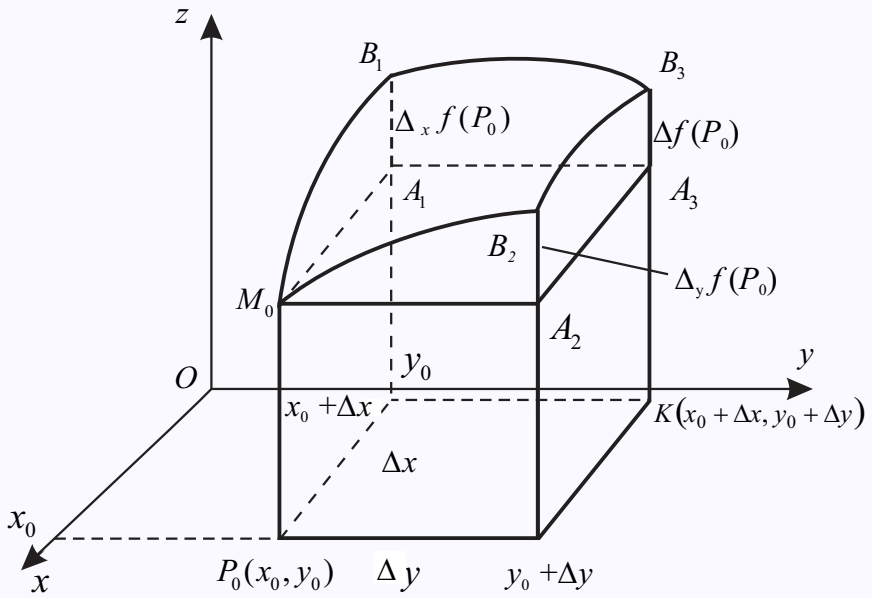


Рисунок 3.1

Обозначения частных производных: $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$, $f'_{x_i}\left(x^{(0)}\right)$.

Проиллюстрируем геометрический смысл частных производных на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ (рисунок 3.2).

Точка $M_0\left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right)$ принадлежит графику функции f (некоторой поверхности), графики функций $f_1 = f\left(x, y_0\right)$ (кривая AB) и $f_2 = f\left(x_0, y\right)$ (кривая CD) есть линии пересечения этой поверхности с плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, l_1 и l_2 – касательные к кривым AB и CD в точке M_0. Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной $f'_x\left(x_0, y_0\right) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной l_1 и $f'_y\left(x_0, y_0\right) = \operatorname{tg}\beta$, где β – угол между осью Oy и касательной l_2.

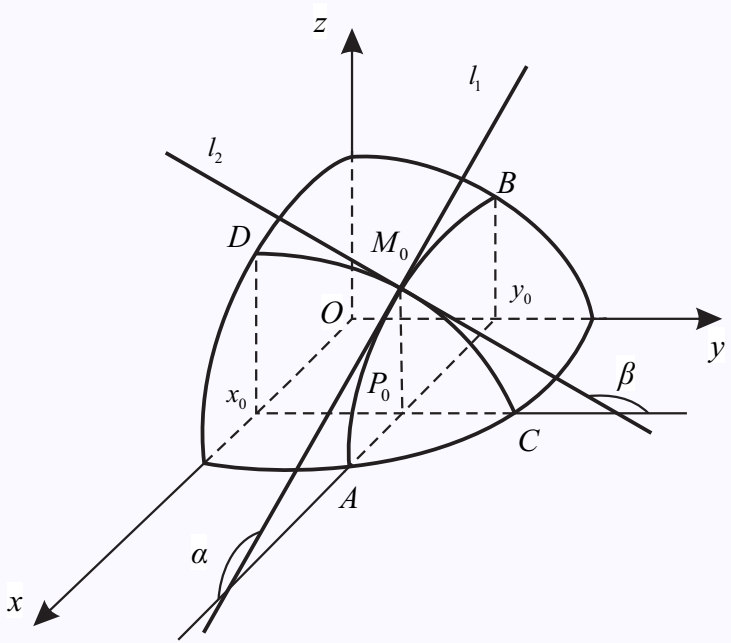


Рисунок 3.2

Физический смысл частных производных функции двух переменных состоит в том, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ есть скорость изменения функции в точке (x_0, y_0) в направлении оси Ox, а $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ – скорость изменения функции в точке (x_0, y_0) в направлении оси Oy.

Отметим, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$ представляет собой обыкновенную производную функции f по i-й переменной x_i в точке $x_i^{(0)}$ при фиксированных значениях остальных переменных $x_k = x_k^{(0)}$, $k \neq i$, понимаемую как обычная производная функции одной переменной. Поэтому вычисление частных производных производится по обычным правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 3.1. Найти частные производные функции

$$f(x,y)=\frac{x}{y},\ (x,y)\in X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\neq 0\right\},$$

в точке $(0,1)$, используя определение 3.1.

$$\blacktriangleleft\ f'_x(0,1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,1)-f(0,1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$

$$f'_y(0,1)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,1+\Delta y)-f(0,1)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0}{1+\Delta y}-0}{\Delta y}=0.\ \blacktriangleright$$

Пример 3.2. Найти частные производные функций $f: X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^2$, используя формулы для нахождения производных функций одной переменной:

а) $f(x,y)=3\cdot 2^{-4\sin^{20}\frac{1-y}{x}}$.

$$\blacktriangleleft\ f'_x(x,y)=3\cdot 2^{-4\sin^{20}\frac{1-y}{x}}\cdot\ln 2\cdot(-4)\cdot 20\sin^{19}\cdot\frac{1-y}{x}\cdot\cos\frac{1-y}{x}\cdot(1-y)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$f'_y(x,y)=3\cdot 2^{-4\sin^{20}\frac{1-y}{x}}\cdot\ln 2\cdot(-4)\cdot 20\sin^{19}\frac{1-y}{x}\cdot\cos\frac{1-y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot(-1).\ \blacktriangleright$$

б) $f(x,y)=\left(\arcsin\left(x^2\sqrt{y}\right)\right)^{\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}}$.

$$\blacktriangleleft\ f'_x(x,y)=\left(\arcsin\left(x^2\sqrt{y}\right)\right)^{\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}}\cdot\ln\left(\arcsin\left(x^2\sqrt{y}\right)\right)\cdot 3\operatorname{ctg}^2\frac{1}{x-4x^2}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x-4x^2}}\right)\frac{-(1-8x)}{(x-4x^2)^2}+\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}\left(\arcsin\left(x^2\sqrt{y}\right)\right)^{\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\sqrt{y}\right)^2}}\sqrt{y}\cdot 2x;$$

$$f'_y(x,y)=\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}\left(\arcsin\left(x^2\sqrt{y}\right)\right)^{\operatorname{ctg}^3\frac{1}{x-4x^2}-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\sqrt{y}\right)^2}}x^2\frac{1}{2\sqrt{y}}.\ \blacktriangleright$$

3.2 Дифференцируемость функции многих переменных

Пусть $x^{(0)} \subset \mathbb{R}^n$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, где $\Delta x_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, причем $x^{(0)} + \Delta x \in U_{x^{(0)}}$.

Определение 3.2. *Функция $f : U_{x^{(0)}} \to \mathbb{R}$ называется **дифференцируемой** в точке $x^{(0)}$, если полное ее приращение в точке $x^{(0)}$ представимо в виде*

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)\,|\Delta x|\,, \tag{3.2}$$

где A_i – некоторые действительные константы, не зависящие от Δx_i, $i = \overline{1,n}$, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to \mathbb{O}$, $\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Если функция f дифференцируема в каждой точке множества $M \subset X$, то она называется **дифференцируемой на множестве** M.

Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то первое слагаемое в правой части (3.2) называется **дифференциалом функции** f в точке $x^{(0)}$. Дифференциал обозначают

$$df\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i. \tag{3.3}$$

Если хотя бы одна из констант A_i $(i = \overline{1,n})$ не равна нулю, то дифференциал функции в точке есть **главная линейная** относительно приращений аргументов часть полного приращения дифференцируемой функции.

Пример 3.3. Доказать, используя определение, что функция

$$f(x, y) = x^2 y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

дифференцируема на $\mathbb{R}^2$. Найти полное приращение и дифференциал функции в точке $(1, 0)$.

◀Согласно определению 3.2, функция двух переменных $z = f(x, y),\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, будет дифференцируемой в точке $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}X$, если

$$\Delta f(x_0, y_0) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где A_1 и A_2 – некоторые действительные константы, не зависящие от Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Запишем полное приращение функции в любой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Delta f\,(x_0, y_0) = f\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\,(x_0, y_0) =$$

$$= (x_0 + \Delta x)^2\,(y_0 + \Delta y) - x_0^2 y_0 = \left(x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2\right)(y_0 + \Delta y) - x_0^2 y_0 =$$

$$= x_0^2\Delta y + 2x_0 y_0\Delta x + 2x_0\Delta x\Delta y + y_0\,(\Delta x)^2 + \Delta y\,(\Delta x)^2 =$$

$$= 2x_0 y_0\Delta x + x_0^2\Delta y + \left(\frac{2x_0\Delta x\Delta y + y_0\,(\Delta x)^2 + \Delta y\,(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y^2)}. \qquad (3.4)$$

Правая часть (3.4) имеет вид (3.2), где

$$A_1 = 2x_0 y_0,\ \ A_2 = x_0^2,\ \ \alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{2x_0\Delta x\Delta y + y_0\,(\Delta x)^2 + \Delta y\,(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

В самом деле, $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, так как

$$\left|\frac{2x_0\Delta x\Delta y + y_0\,(\Delta x)^2 + \Delta y\,(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \leqslant |x_0|\frac{2|\Delta x||\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + |y_0|\frac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + |\Delta y|\frac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant |x_0||\Delta y| + |y_0||\Delta x| + |\Delta y||\Delta x| \to 0 \text{ при } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0).$$

Дифференцируемость на $\mathbb{R}^2$ доказана.
Тогда дифференциал функции в точке (x_0, y_0) будет

$$df\,(x_0, y_0) = 2x_0y_0\Delta x + x_0^2\Delta y. \tag{3.5}$$

Если $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то

$$df\,(1, 0) = \Delta y. \tag{3.6}$$

Полное приращение функции f в точке $(1, 0)$ будет:

$$\Delta f\,(1, 0) = \Delta y + 2\Delta y\Delta x + (\Delta x)^2\,\Delta y\ \blacktriangleright\,.$$

3.3 О связи непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathrm{Int}X$; $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.1. *Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то она непрерывна и имеет частные производные в этой точке, причем*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)}\right) = A_i,$$

где A_i $(i = \overline{1, n})$ определяются (3.2).

◀Переходим к пределу в (3.2) при $\Delta x \to \mathbb{0}$. Получим:

$$\lim_{\Delta x \to \mathbb{0}} \Delta f\left(x^{(0)}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f\left(x^{(0)}\right).$$

Значит, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$.

Дальше разделим левую и правую части равенства (3.2) на Δx_i и перейдем к пределу при $\Delta x_i \to 0$ (считаем в (3.2) все приращения аргументов, за исключением Δx_i, равными нулю). Тогда

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = \Delta_{x_i} f\left(x^{(0)}\right).$$

Получим:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f\left(x^{(0)}\right)}{\Delta x_i} = A_i, \ (i = \overline{1,n}). \blacktriangleright$$

С учетом заключения теоремы 3.1, определения дифференциала функции в точке, а также с учетом очевидных равенств $\Delta x_i = dx_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ получим:

$$df\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\left(x^{(0)}\right) dx_i. \tag{3.7}$$

Пример 3.4. Найти дифференциал функции

$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{y}}, \ (x,y) \in X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x > 0, \ y > 0\right\}.$$

◀Находим частные производные функции.

$$f'_x(x,y) = y\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{y}{2x\sqrt{x}}; \ f'_y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2y\sqrt{y}}.$$

$$df(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{y}{2x\sqrt{x}}\right)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2y\sqrt{y}}\right)dy, \ \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}. \blacktriangleright$$

3.4 Достаточное условие дифференцируемости

Существование частных производных функции в точке еще не обеспечивает дифференцируемости этой функции в точке.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \mathrm{Int}X$; $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Если функция f имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, а в самой точке $x^{(0)}$ эти частные производные непрерывны, то функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$.*

◀Доказательство теоремы проведем для функции двух переменных.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$, $f : X \to \mathbb{R}$, $x^{(0)} = (x_0, y_0) \in \mathrm{Int}X$.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)).$$

Применяя теорему Лагранжа, получим:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \ \theta_1, \theta_2 \in (0, 1). \tag{3.8}$$

В силу непрерывности частных производных f'_x, f'_y в точке (x_0, y_0), с учетом критерия 2.1, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) \Leftrightarrow f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) \Leftrightarrow f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y),$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$

Таким образом,

$$\Delta f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0)+\alpha(\Delta x,\Delta y)\right)\Delta x+\left(f'_y(x_0,y_0)+\beta(\Delta x,\Delta y)\right)\Delta y=$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\,\Delta y= \tag{3.9}$$

$$=f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y+\left(\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Так как

$$\left|\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\,\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\alpha(\Delta x,\Delta y)|\,\frac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+|\beta(\Delta x,\Delta y)|\,\frac{|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant$$

$$\leqslant|\alpha(\Delta x,\Delta y)|+|\beta(\Delta x,\Delta y)|\to 0\text{ при }(\Delta x,\Delta y),$$

то $\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ – бесконечно малая при $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.▶

Замечание 3.1. Непрерывность частных производных функции в точке не есть необходимое условие ее дифференцируемости в этой точке. Покажем это на конкретном примере. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0,\ \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{3.10}$$

Найдем частные производные функции в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x}=0.$$

Аналогично и $f'_y(0,0)=0$.

Частная производная функции f в любой точке из $\mathbb{R}^2$, отличной от точки $(0,0)$, будет:

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$

$$+\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x=$$

$$=x\left(2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \tag{3.11}$$

Покажем, что для функции f'_x не существует предела при $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$. Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

$$\lim_{r\to+0}r\cos\varphi\left(2\sin\frac{1}{r}-\frac{\cos\frac{1}{r}}{r}\right)=\lim_{r\to+0}\left(2r\cos\varphi\cdot\sin\frac{1}{r}-\cos\varphi\cdot\cos\frac{1}{r}\right). \tag{3.12}$$

Видно, что $\lim\limits_{r\to+0}2r\cos\varphi\cdot\sin\frac{1}{r}=0$, но предела $\lim\limits_{r\to+0}\cos\varphi\cdot\cos\frac{1}{r}$ не существует, так как частичный предел при $\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ равен нулю, а при $\varphi=2\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ частичного предела не существует. Значит, не существует предела (3.12), то есть частная производная f'_x терпит разрыв в точке $(0,0)$.

С другой стороны,

$$\Delta f(0,0)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=$$

$$=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$

$$=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}. \tag{3.13}$$

Представление (3.13) доказывает дифференцируемость функции f в точке $(0,0)$, так как

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to(0,0)\text{ при }(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

как произведение бесконечно малой функции при $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ на функцию, ограниченную в проколотой окрестности точки $(0,0)$.

3.5 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$ – область; функция двух переменных $f:D\to\mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные в области D. В этом случае график функции f будем называть **гладкой поверхностью**.

Обозначим указанную выше поверхность через S.

Определение 3.3. ***Касательной плоскостью*** *к поверхности S в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0=f(x_0,y_0)$, $(x_0,y_0)\in D$, называется плоскость, определяемая уравнением*

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{3.14}$$

Нормалью к поверхности *S в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in S$ называется прямая, определяемая системой уравнений*

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{3.15}$$

Другими словами, нормалью к поверхности S в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))\in S$ называется прямая, для которой нормальный вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right)$ касательной плоскости к поверхности S в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ является направляющим.

Геометрически тот факт, что поверхность является гладкой, означает, что через любую ее точку можно провести касательную плоскость, и при переходе от одной точки поверхности к другой касательная плоскость меняется непрерывно, в том смысле, что нормальный вектор непрерывно зависит от точки на поверхности.

Изобразим в пространстве $\mathbb{R}^3$ поверхность S и касательную плоскость Π к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (рисунок 3.3). Плоскость Π обладает характерным для касательной плоскости свойством: расстояние от любой точки $M(x, y, f(x, y)) \in S$ до плоскости Π (до точки $T \in \Pi$) есть бесконечно малая величина более высокого порядка, чем $\rho = \rho(P_0, P)$, $\rho \to +0$, где P_0 и P, соответственно, проекции точек M_0 и M на плоскость $z = 0$ (рисунок 3.3).

◀Пусть $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, тогда $\rho = \rho(P_0, P) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. С учетом равенства (3.2) получим:

$$|MT| = \left| f(x, y) - \left(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right) \right| =$$

$$= |\alpha(\Delta x, \Delta y)| \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = o(\rho),$$

$\rho \to +0$. ▶

Замечание 3.2. Справедливо и обратное утверждение, то есть если плоскость Π задана уравнением

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0), \tag{3.16}$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, то справедливо равенство

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \ \rho \to +0, \tag{3.17}$$

или

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho) \tag{3.18}$$

(f дифференцируема в точке (x_0, y_0), $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$).

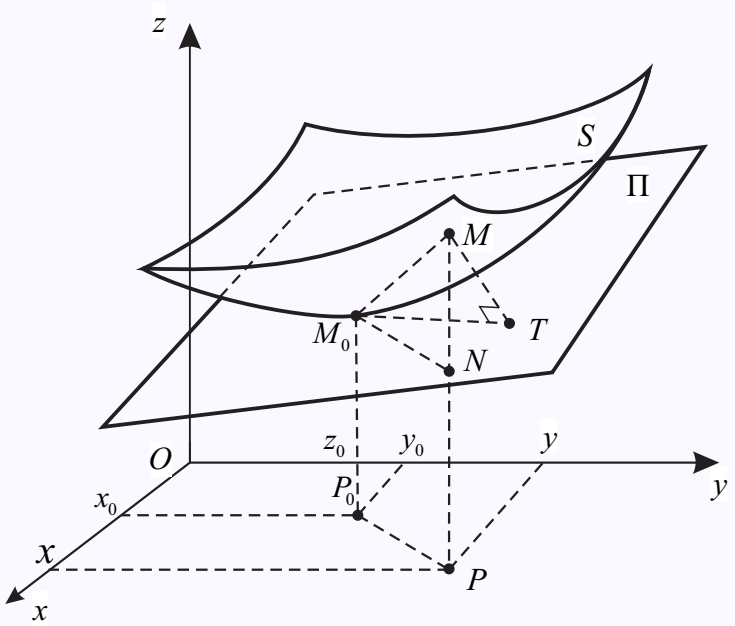


Рисунок 3.3

Представление (3.18) означает, что П есть касательная плоскость к поверхности S в точке с координатами $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Таким образом, справедлива теорема-критерий.

Теорема 3.3. *Для того чтобы поверхность S имела касательную плоскость в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, была дифференцируемой в точке $(x_0, y_0) \in D$.*

Пример 3.5. Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к поверхности – графику функции $z = xy$ в точках: а) $(0, 0, 0)$, б) $(2, 1, 2)$.

◀а) $z'_x = y\Big|_{y=0} = 0$, $z'_y = x\Big|_{x=0} = 0$.
Уравнение касательной плоскости:

$$z - 0 = 0\,(x - 0) + 0\,(y - 0)\,,\ z = 0.$$

Через точку $(0, 0)$ проходит ось Oz, которая и будет нормалью к касательной плоскости $z = 0$.
б) $z'_x = y\Big|_{y=1} = 1$, $z'_y = x\Big|_{x=2} = 2$.
Уравнение касательной плоскости:

$$z - 2 = x - 2 + 2\,(y - 1)\,,\ x + 2y - z - 2 = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.\ ▶$$

Замечание 3.3. Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$df\,(x_0, y_0) = f'_x\,(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y\,(x_0, y_0)\,\Delta y = f'_x\,(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y\,(x_0, y_0)\,(y - y_0)\,.$$

С другой стороны, $df\,(x_0, y_0) = z - z_0$.

Таким образом, дифференциал $df\,(x_0, y_0)$ функции f в точке (x_0, y_0) с геометрической точки зрения есть приращение аппликаты точки касательной плоскости к поверхности S в точке (x_0, y_0) при переходе от точки (x_0, y_0) к ее приращенной точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. На рисунке 3.3 $df\,(x_0, y_0) = NM$ ($MP = z$, $NP = z_0$).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения частного и полного приращения функции многих переменных.
2. В чем состоит геометрический смысл частного и полного приращений функции двух переменных?
3. Дайте определение частной производной функции многих переменных.
4. В чем состоит геометрический смысл частных производных функции двух переменных?
5. Дайте определения функции, дифференцируемой в точке, на множестве.
6. Дайте определение дифференциала функции многих переменных.
7. Сформулируйте теорему о связи непрерывности и существования частных производных с дифференцируемостью функции многих переменных.
8. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.
9. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, определяемой уравнением $z = f(x, y)$.
10. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции двух переменных в точке?

ЛЕКЦИЯ 4
Производные и дифференциалы сложных функций. Производные высших порядков

4.1 Производные и дифференциалы сложных функций

Пусть на области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана функция n переменных

$$x \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n),$$

где x_i в свою очередь являются функциями m переменных, определенными на области $T \subset \mathbb{R}^m$:

$$t \mapsto x_i(t) = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \quad (i = \overline{1,n},\ (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in T),$$

причем для любой точки $t \in T$ $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in D$.

Теорема 4.1. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x^{(0)} \in D$, а функции $t \mapsto x_i(t)$ имеют частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,m})$ в точке $t^{(0)} \in T$, причем для любой точки $t \in T$ $(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in D$ и $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, тогда сложная функция $t \mapsto u = f(x(t)),\ t \in T$, имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial u}{\partial t_k}$, причем*

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

◀Рассмотрим доказательство теоремы для случая, когда $D \subset \mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}$ – интервал числовой прямой. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(x, y, z) \in D$, а для функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ существуют производные в точке $t \in T$ и для любого $t \in T$ $(x(t), y(t), z(t)) \in D$. Покажем, что сложная функция $u = f(x(t), y(t), z(t))$ имеет производную в точке t, которая вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{4.1}$$

Точке t придаем любое приращение $\Delta t \neq 0$, но такое, чтобы $t + \Delta t \in T$. Указанное приращение порождает приращения функций x, y, z соответственно Δx, Δy, Δz. Так как функция f дифференцируема в точке (x, y, z), то

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \tag{4.2}$$

где $\alpha\,(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ бесконечно малая при $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$.

Разделив левую и правую части равенства (4.2) на $\Delta t \neq 0$, получим:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} \pm \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \tag{4.3}$$

(при $\Delta t > 0$ берется знак плюс, при $\Delta t < 0$ – знак минус).

Переходим к пределу в равенстве (4.3) при $\Delta t \to 0$. Так как функции x, y, z дифференцируемы в точке t, то они и непрерывны в этой точке, поэтому при $\Delta t \to 0$ будут Δx, Δy, $\Delta z \to 0$.

Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

так как

$$\lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}. \blacktriangleright$$

Замечание 4.1. Если в теореме 4.1 требование существования у функций x_i частных производных $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ в точке $t^{(0)} \in T$ заменить требованием дифференцируемости функций x_i в точке $t^{(0)}$, то сложная функция $u = f\,(x\,(t))$, $t \in T$, будет дифференцируемой в точке $t^{(0)} \in T$.

Например, если функции двух переменных $x = x\,(t, \tau)$, $y = y\,(t, \tau)$, $z = z\,(t, \tau)$ дифференцируемы в точке $(t, \tau) \in D \subset \mathbb{R}^2$ и выполняются остальные условия теоремы 4.1, то сложная функция

$u = f(x(t,\tau), y(t,\tau), z(t,\tau))$ дифференцируема в точке (t,τ) и для существующих частных производных функции справедливы формулы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau}. \tag{4.5}$$

◀При выводе формул (4.4) и (4.5) сначала фиксируем τ, а потом t и, учитывая (4.1), получаем требуемые формулы.

Для доказательства дифференцируемости функции записываем полные приращения функций f, x, y, z и в равенство для $\Delta f(x,y,z)$ подставляем представления для $\Delta x(t,\tau)$, $\Delta y(t,\tau)$, $\Delta z(t,\tau)$. ▶

Замечание 4.2. Если функция $u = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, дифференцируема в точке $(x,y) \in D$, а функция $y = y(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$, дифференцируема в точке $x \in I$, и для любой точки $x \in I$ $(x, y(x)) \in D$, то сложная функция $u = f(x, y(x))$, $x \in I$, дифференцируема в точке x и справедлива формула

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{4.6}$$

Справедливость указанных предложений следует из аналога теоремы 4.1 для функции двух переменных (учесть, что $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} = 1$).

Производная, определяемая формулой (4.6), называется **полной производной** функции u по x.

Пример 4.1. Пусть

$$f(x,y) = \arcsin(x-y),\ (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2,$$

$$x(t) = 3t,\quad y(t) = 4t^3,\ t \in I \subset \mathbb{R};\ (x(t), y(t)) \in X.$$

Найти промежуток I изменения переменной t, где существует $\frac{df}{dt}$. Записать формулу для этой производной.

◀Область определения функции f есть множество решений неравенства

$$|x-y| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leqslant 1, \\ x-y \geqslant -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant y+1, \\ x \geqslant y-1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Изобразим множество решений системы (4.7) на рисунке 4.1.

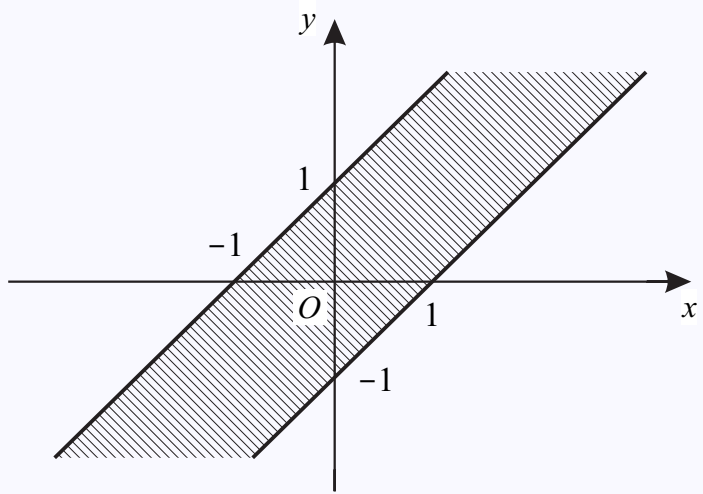


Рисунок 4.1

В систему (4.7) подставляем $x = 3t$, $y = 4t^3$.

$$\begin{cases} 3t \leqslant 4t^3+1, \\ 3t \geqslant 4t^3-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^3-3t+1 \geqslant 0, \\ 4t^3-3t-1 \leqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

На промежутке $I = (-1, 1)$ выполняется аналог теоремы 4.1 для функции двух переменных. Тогда существует

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left.\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\right|_{\substack{x=3t\\y=4t^3}} \cdot 3 + \left.\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\right|_{\substack{x=3t\\y=4t^3}} \cdot 12t^2 = \frac{3}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}\left(1-4t^2\right). \blacktriangleright$$

4.2 Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$. Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x^{(0)} \in D$, то существует полный дифференциал функции f в точке $x^{(0)}$, определяемый формулой

$$df\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^{(0)}\right) dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^{(0)}\right) dx_n. \tag{4.8}$$

Покажем, что формула (4.8) является универсальной в том смысле, что она сохраняет свою форму и в том случае, когда аргументы x_i $(i = \overline{1,n})$ сами являются функциями аргументов t_k $(k = \overline{1,m})$.

◀Доказательство проведем для функции двух переменных $u = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, где $x = x(t, v)$, $y = y(t, v)$, $(t, v) \in X \subset \mathbb{R}^2$, $(x(t, v), y(t, v)) \in D$. Сложная функция $u = f(x(t, v), y(t, v))$, $(t, v) \in X$, X – область, будет дифференцируемой в точке $(t, v) \in X$ (следует из замечания 4.1). Тогда дифференциал сложной функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial v}dv, \tag{4.9}$$

но

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{4.10}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) и (4.10) в (4.9), получим:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \blacktriangleright$$

Указанное свойство называется **инвариантной (неизменной)** формой первого дифференциала.

4.3 Дифференциал функции и приближенные вычисления

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$. Определим для функции двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, абсолютную погрешность Δz, зная абсолютные погрешности Δx и Δy аргументов x, y: $|\Delta x| \leqslant \Delta x$ и $|\Delta y| \leqslant \Delta y$.

Имеем $|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|$. Заменяя приращение функции ее дифференциалом, получим

$$|\Delta z| \approx \left|f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y\right|.$$

Отсюда выводим приближенную оценку:

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|. \tag{4.12}$$

Следовательно, за абсолютную погрешность функции z можно принять

$$\Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right||\Delta y|.$$

Пример 4.2. Гипотенуза прямоугольного треугольника $x = 122$ см, а острый угол $y = 30° \pm 1°$. С какой точностью можно найти противолежащий данному углу катет z этого треугольника?

◀Рассмотрим функцию двух переменных

$$z = x \sin y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos y$. Полагая $x = 120$, $\Delta x = 2$ и $y = \frac{\pi}{6}$, $\Delta y = \frac{\pi}{180}$, находим

$$z = 120 \sin \frac{\pi}{6} = 60\ \text{(см)}$$

и

$$\Delta z = \sin \frac{\pi}{6} \cdot 2 + 120 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 1 + 1,8 = 2,8\ \text{(см)}.$$

Следовательно, $z = 60$ см $\pm\, 2,8$см. Используя формулу (4.12), можно определить также предельную относительную погрешность функции: $\delta_z = \frac{\Delta z}{|z|}$.

В частности, положим $z = xy$ $(x \neq 0,\ \ y \neq 0)$. Тогда $\Delta z = |y|\,\Delta x + |x|\,\Delta y$ и, следовательно, $\delta_z = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$, или $\delta_z = \delta_x + \delta_y$, т. е. относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.▶

4.4 Производные высших порядков. Теорема Шварца

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x^{(0)} \in D$, и для любых $x \in D$ существуют $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \varphi(x)$ $(i = \overline{1, n})$.

Если существует $\varphi'_{x_k}\left(x^{(0)}\right)$, то $\varphi'_{x_k}\left(x^{(0)}\right)$ называется **частной производной второго порядка** функции f в точке $x^{(0)}$, причем при $k \neq i$ $\left(k, i = \overline{1, n}\right)$ эта производная называется **смешанной производной**.

Для производных второго порядка используют обозначения $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$ или $f''_{x_i x_k}\left(x^{(0)}\right)$ для $i \neq k$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(x^{(0)}\right)$ или $f''_{x_i^2}\left(x^{(0)}\right)$ для $i = k$.

Аналогично по индукции вводятся частные производные в точке любого порядка. Пусть задан набор натуральных чисел $\{i_l\}_{l=1}^m$, $1 \leqslant i_l \leqslant n$. Частная производная функции f в точке $x^{(0)}$ порядка m по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ определяется индуктивно

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-1}}}\right)\left(x^{(0)}\right),$$

при этом предполагается, что все предыдущие производные

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_l}},\ l = 1, \ldots, m-1,$$

существуют в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Определение 4.1. *Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется m раз ($m \in \mathbb{N}$) **дифференцируемой в точке** $x^{(0)} \in D$, если все ее частные производные до порядка $m-1$ дифференцируемы в точке $x^{(0)}$.*

Теорема 4.2 (достаточный признак дифференцируемости). *Если для функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке $x^{(0)} \in D$ существуют и непрерывны все ее частные производные до порядка m ($m \in \mathbb{N}$), то функция f будет m раз дифференцируемой в точке $x^{(0)}$.*

◄Справедливость заключения теоремы следует из определения 4.1 и теоремы 3.2.►

Следующий пример показывает, что частная производная, вообще говоря, зависит от порядка, в котором выполняется дифференцирование, то есть зависит от порядка индексов в наборе $\{i_l\}_{l=1}^m$.

Пример 4.3. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

имеет в точке $(0,0)$ смешанные частные производные второго порядка, но они не равны в этой точке.

◀Вначале найдем частные производные первого порядка функции f в точке (x,y), если $x^2+y^2\neq 0$:

$$f'_x(x,y)=\frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right)-xy\left(x^2-y^2\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^2-y^2\right)xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Находим (по определению) частные производные первого порядка функции f в точке $(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot O\left((\Delta x)^2-0^2\right)}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=0.$$

Аналогично $f'_y(0,0)=0$.

Дальше находим (по определению) смешанные частные производные второго порядка функции f в точке $(0,0)$:

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{-(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y}=-1;\ f''_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}}{\Delta x}=1.$$

$$-1=f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)=1.\ \blacktriangleright$$

При некоторых ограничениях, накладываемых на функцию f, все же можно утверждать, что частная производная не зависит от порядка дифференцирования.

Теорема 4.3 (Теорема Шварца). *Пусть для функции $f:D\to\mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки $x^{(0)}\in D$ существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, причем две последние производные непрерывны в точке $x^{(0)}$. Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\left(x^{(0)}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\left(x^{(0)}\right). \tag{4.13}$$

◀Доказательство рассмотрим для функции двух переменных $z = f(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$.

$$\Delta_x \left(\Delta_y f\left(x, y\right)\right) = \Delta_x \left(f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)\right) =$$

$$= f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y + \Delta y\right) + f\left(x, y\right) =$$

$$= \left(f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y + \Delta y\right)\right) - \left(f\left(x + \Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)\right). \tag{4.14}$$

К уменьшаемому и вычитаемому последней разности применим теорему Лагранжа (по x):

$$\Delta_x \left(\Delta_y f\left(x, y\right)\right) = \left(f'_x\left(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y\right) - f'_x\left(x + \theta_1 \Delta x, y\right)\right) \Delta x. \tag{4.15}$$

Дальше к разности в правой части равенства (4.15) также применим теорему Лагранжа (по y), получим:

$$\Delta_x \left(\Delta_y f\left(x, y\right)\right) = f''_{xy}\left(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y\right) \Delta x \Delta y. \tag{4.16}$$

С другой стороны, $\Delta_x \left(\Delta_y f\left(x, y\right)\right) =$

$$= \left(f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) - f\left(x + \Delta x, y\right)\right) - \left(f\left(x, y + \Delta y\right) - f\left(x, y\right)\right). \tag{4.17}$$

К соответствующим разностям в правой части (4.17) вначале применим теорему Лагранжа по y, а потом по x.

$$\Delta_x \left(\Delta_y f\left(x, y\right)\right) = \left(f'_y\left(x + \Delta x, y + \theta_3 \Delta y\right) - f'_y\left(x, y + \theta_3 \Delta y\right)\right) \Delta y =$$

$$= f''_{yx}\left(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y\right) \Delta y \Delta x. \tag{4.18}$$

Из (4.16) и (4.17) следует, что

$$f''_{xy}\left(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y\right) \Delta x \Delta y = f''_{yx}\left(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y\right) \Delta y \Delta x. \tag{4.19}$$

В последнем равенстве левую и правую части делим на $\Delta y \Delta x \neq 0$ и переходим к пределу при Δx, $\Delta y \to 0$, то есть $(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y)$ и $(x + \theta_4 \Delta x, y + \theta_3 \Delta y)$ стремятся к (x_0, y_0). В силу непрерывности смешанных частных производных в точке (x_0, y_0) получим справедливость заключения теоремы.▶

4.5 Дифференциалы высших порядков функции многих переменных

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. Предположим, что функция f имеет в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$ частные производные второго порядка, непрерывные в точке $x^{(0)}$. Тогда функция f будет два раза дифференцируемой в точке $x^{(0)}$. Дополнительно потребуем, чтобы $\Delta x_i = dx_i$ $(i = \overline{1,n})$ были независимыми от аргументов x_i в совокупности.

Определение 4.2. ***Вторым дифференциалом*** *функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке $x^{(0)}$ называется выражение, определяемое равенством*

$$d^2 f\left(x^{(0)}\right) = d\left(df\right)\Big|_{x=x^{(0)}}. \tag{4.20}$$

Преобразуем правую часть равенства (4.20)

$$d\left(df\left(x^{(0)}\right)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)\Bigg|_{x=x^{(0)}} = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)\Bigg|_{x=x^{(0)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(d\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i\Bigg|_{x=x^{(0)}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) dx_i dx_j. \tag{4.21}$$

При непрерывности частных производных запись (4.21) можно упростить. Например, для функции двух переменных:

$$d^2 f\left(x_0, y_0\right) = f''_{x^2}\left(x_0, y_0\right) dx^2 + 2f''_{xy}\left(x_0, y_0\right) dxdy + f''_{y^2}\left(x_0, y_0\right) dy^2. \tag{4.22}$$

Символически формулу (4.22) записывают в следующем виде:

$$d^2 f\left(x_0, y_0\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f\left(x_0, y_0\right). \tag{4.23}$$

При условии дифференцируемости m-раз ($m \in \mathbb{N}$) функции $f : D \to \mathbb{R}$ в точке $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$ и независимости аргументов x_i ($i = \overline{1,n}$) от dx_i в совокупности, по индукции получим:

$$d^m f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}} \left(x^{(0)}\right) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_m}. \tag{4.24}$$

В символическом (формальном) виде формула (4.24) примет вид

$$d^m f\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^m f\left(x^{(0)}\right). \tag{4.25}$$

Например, если $D \subset \mathbb{R}^2$, то для функции двух переменных $f : D \to \mathbb{R}$ (4.25) в точке $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}D$ примет вид

$$d^m f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^m f(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^{m-k}} (x_0, y_0)\, dx^k dy^{m-k}.$$

Пример 4.4. Найти $d^3 f$ для функции

$$f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\blacktriangleleft\ d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 \sin\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} C_n^k \frac{\partial^3 \sin\left(x^2+y^2\right)}{\partial x^k \partial y^{3-k}} dx^k dy^{3-k} = \left[\begin{array}{l} C_3^0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1, \quad C_3^2 = 3, \\ C_3^1 = 3, \quad C_3^3 = 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)'''_{y^3} = \left(2y\cos\left(x^2+y^2\right)\right)''_{y^2} = \left(2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4y^2 \sin\left(x^2+y^2\right)\right)'_y =\right.$$

$$= -4y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y^3\cos\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= -12y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y^3\cos\left(x^2+y^2\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3};$$

$$\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)^{(3)}_{x^3} = -12x\sin\left(x^2+y^2\right) - 8x^3\cos\left(x^2+y^2\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = -4x\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y^2x\cos\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = -4y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8x^2y\cos\left(x^2+y^2\right)\Big] =$$

$$= \left(-12y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y^3\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dy^3 + 3\left(-4x\sin\left(x^2+y^2\right) - 8y^2x\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy^2 +$$

$$+3\left(-4y\sin\left(x^2+y^2\right) - 8x^2y\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dx^2dy + \left(-12x\sin\left(x^2+y^2\right) - 8x^3\cos\left(x^2+y^2\right)\right)dx^3 =$$

$$= -8\cos\left(x^2+y^2\right)\left(y^3dy^3 + 3y^2xdy^2dx + 3yx^2dydx^2 + x^3dx^3\right) -$$

$$-12\sin\left(x^2+y^2\right)\left(ydy^3 + xdxdy^2 + ydx^2dy + xdx^3\right) =$$

$$= -8\cos\left(x^2+y^2\right)(ydy+xdx)^3 - 12\sin\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)\left(dx^2+dy^2\right). \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Докажите свойство инвариантности формы первого дифференциала.
2. Дайте определения частных и смешанных производных второго порядка функции многих переменных.
3. Сформулируйте теорему Шварца.
4. Дайте определение второго дифференциала функции многих переменных.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Производные и дифференциалы функций многих переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Задание 1. Прогиб u колеблющейся струны в точке, находящейся на расстоянии x от начала струны, в момент времени t является функцией переменных x и t: $u = u(x,t)$, $x > 0$, $t > 0$. Какой физический и геометрический смысл имеют частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$? Какой физический смысл имеет частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$?

◀В фиксированный момент времени $t = t_0$ колеблющаяся струна располагается по кривой $u = u(x, t_0)$. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $t = t_0$ дает угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке x. В фиксированной точке x_0 $u(x_0, t)$ показывает отклонение соответствующей точки струны от положения равновесия. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ равна мгновенной скорости движения точки струны с координатой x_0 в момент времени t. Частная же производная $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ равна ускорению этой точки.▶

Задание 2. Найти частные производные и полные дифференциалы первого порядка функции

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2,$$

в точке $(1,2)$.

◀Найдем сначала все частные производные и полные дифференциалы заданной функции в произвольной точке $(x,y) \in X$:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}, f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

$$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

Подставляя в полученные выражения $x = 1$ и $y = 2$, найдем

$$f'_x(1,2) = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}, \quad f'_y(1,2) = \frac{-1}{1+4} = -\frac{1}{5}, \quad df(1,2) = \frac{1}{5}(2dx - dy).$$

Здесь мы сначала нашли частные производные функции, а потом ее полный дифференциал. В некоторых случаях удобнее обратный порядок действий: сначала находят полный дифференциал, пользуясь правилами вычисления дифференциала суммы, произведения, частного и элементарных функций, а потом отделяют коэффициенты при dx и при dy. Коэффициент dx дает $\frac{\partial f}{\partial x}$, а коэффициент при dy дает $\frac{\partial f}{\partial y}$. ►

Задание 3. Найти частные производные первого порядка функции

$$z = \sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}, \ (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

◄Мы имеем $dz = d\sin u = \cos u du$, где $u = \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$.
Пользуясь правилом вычисления дифференциала дроби, получаем:

$$du = d\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} = \frac{(x^3+y^3)d(x^2+y^2) - (x^2+y^2)d(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)^2}.$$

Но $d(x^2+y^2) = 2xdx + 2ydy$, $d(x^3+y^3) = 3x^2dx + 3y^2dy$, и потому

$$dz = \cos u du =$$

$$= \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \cdot \frac{(x^3+y^3)(2xdx+2ydy) - (x^2+y^2)(3x^2dx+3y^2dy)}{(x^3+y^3)^2} =$$

$$= \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \cdot \frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - y^4)dy}{(x^3+y^3)^2}.$$

Отделяя друг от друга коэффициенты при dx и dy, получаем:

$$f'_x(x,y) = \frac{-x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^3+y^3)^2} \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2x^3y - 3x^2y^2 - y^4}{(x^3+y^3)^2} \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти точки, в которых не существуют частные производные функции

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

$$\blacktriangleleft f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Эти формулы теряют смысл при $x = 0$ и $y = 0$. Покажем, что в точке $(0,0)$ функция z не имеет частных производных.

В самом деле, $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+0^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$. Функция $\frac{|x|}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$. $\blacktriangleright$

Задание 5. Доказать, что функция $z = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0,\ y = 0, \end{cases}$ имеет частные производные на $\mathbb{R}^2$, но эти производные разрывны при $x = 0$, $y = 0$.

$\blacktriangleleft$При $x^2+y^2 \neq 0$:

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)x^2 - x^2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Значит, функция f имеет частные производные, если $(x,y) \neq (0,0)$. Если $x=0$ или $y=0$, то $f=0$. Поэтому $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Итак, функция f имеет частные производные на $\mathbb{R}^2$. Покажем, что они разрывны при $x=0$, $y=0$. В самом деле, $f'_x(x,x) = \frac{2x^4}{(x^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}$, и потому $\lim\limits_{x\to 0} f'_x(x,x) \neq f'_x(0,0)$. Точно так же

$$\lim_{y\to 0} f'_y(x,y) = 1 \neq f'_y(0,0).$$

Отметим, что функция f не дифференцируема в точке $(0,0)$. В самом деле,

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= f'_x(0,0)dx + f'_y(0,0)dy + \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Но функция $\varphi(\Delta x, \Delta y) = \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}$ не является бесконечно малой при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, так как $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0}} \varphi(\Delta x, \Delta y)$ не существует.▶

Задание 6. Доказать, что частные производные функции

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y}; & \text{если } xy \neq 0, \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ y^2 \sin\frac{1}{y}, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

разрывны при $x=0$, $y=0$, но эта функция дифференцируема в точке $(0,0)$.

$$\blacktriangleleft\ f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y}, & \text{если } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } y=0.\end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ не существует, частная производная разрывна при $x=0$. Точно так же частная производная $f'_y(x,y)$ разрывна при $y=0$. Но тогда в точке $(0,0)$ разрывны обе частные производные.

Теперь докажем, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$.

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}+\Delta y^2\sin\frac{1}{\Delta y}=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+$$

$$+\left(\frac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\Delta x}+\frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\Delta y}\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Так как

$$\left|\frac{(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\Delta x}+\frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sin\frac{1}{\Delta y}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|\to 0 \text{ при } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0),$$

то f дифференцируема в точке $(0,0)$.►

Задание 7. Найти частные производные второго порядка и полный дифференциал второго порядка для функции $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $(x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2$.

◄ $f'_x(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

$$f''_{x^2}(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{y^2}(x,y)=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f''_{yx}(x,y)=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^2f(x,y)=f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2=\frac{-2xydx^2+2(x^2-y^2)dxdy+2xydy^2}{(x^2+y^2)^2}.\ \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти смешанные частные производные функции

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-y^2\mathrm{arctg}\frac{x}{y}, & \text{если } x\neq 0 \text{ и } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ или } y=0.\end{cases}$$

◀Если $x\neq 0$, $y\neq 0$, то

$$f'_x(x,y)=2x\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^3}{x^2+y^2}=2x\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-y,$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}-2y\mathrm{arctg}\frac{x}{y}+\frac{xy^2}{x^2+y^2}=x-2y\mathrm{arctg}\frac{x}{y},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ f''_{yx}(x,y)=1-\frac{2y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Таким образом, если $x\neq 0$ и $y\neq 0$, то $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$. Пусть теперь $x=0$, $y\neq 0$. Так как $f(0,y)=0$, то

$$f'_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-y^2\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}{x}=\lim_{x\to 0}x\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-y^2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}{x}.$$

Так как $\left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right| < \frac{\pi}{2}$ при $x \to 0$ и $\operatorname{arctg}\frac{x}{y} \sim \frac{x}{y}$, то

$$f'_x(0,y) = -y^2\frac{1}{y} = -y.$$

Точно так же получаем, что $f'_y(x,0) = x$ и $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Но тогда имеем:

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y} = -1, \quad f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x} = 1.$$

Таким образом, $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$. Причина в том, что частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ разрывны в точке $(0,0)$. ►

Задание 9. Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\blacktriangleleft\ d\left(\ln(x^2+y^2)\right) = \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}.$$

При повторном дифференцировании надо иметь в виду, что dx и dy – постоянные величины, так как они являются дифференциалами независимых переменных x и y. Поэтому $d^2x = d^2y = 0$. Отсюда имеем:

$$d^2\left(\ln(x^2+y^2)\right) = d\left(\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)d(2xdx+2ydy) - (2xdx+2ydy)^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)(2dx^2+2dy^2) - (2xdx+2ydy)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)dx^2 - 8xydxdy + 2(x^2-y^2)dy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Так как $d^2f = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2$, то

$$f''_{x^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти для функции

$$z = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

полное приращение и полный дифференциал в точке $(1,2)$ при $\Delta x = 0,1$ и $\Delta y = 0,2$. Оценить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при замене приращения функции ее дифференциалом.

$$\blacktriangleleft \Delta z = 5(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) + 3(y+\Delta y)^2 + 5(x+\Delta x) +$$
$$+2(y+\Delta y) - 1 - 5x^2 + xy - 3y^2 - 5x - 2y + 1 = 10x\Delta x + 5\Delta x^2 -$$
$$-x\Delta y - y\Delta x - \Delta x\Delta y + 6y\Delta y + 3\Delta y^2 + 5\Delta x + 2\Delta y,$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (10x - y + 5)dx + (6y - x + 2)dy.$$

Подставляя в выражения Δz и dz значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = dx = 0,1$, $\Delta y = dy = 0,2$, получим:

$$\Delta z = 10 \cdot 1 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,1^2 - 1 \cdot 0,2 - 2 \cdot 0,1 - 0,1 \cdot 0,2 + 6 \cdot 2 \cdot 0,2 +$$
$$+3 \cdot 0,2^2 + 5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 4,05,$$
$$dz = (10 \cdot 1 - 2 + 5) \cdot 0,1 + (6 \cdot 2 - 1 + 2) \cdot 0,2 = 3,9.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta z - dz| = 4,05 - 3,9 = 0,15$.
Относительная погрешность $\left|\frac{\Delta z - dz}{\Delta z}\right| = \frac{0,15}{4,05} \approx 0,037$ ($\approx 3,7$ %). $\blacktriangleright$

Задание 11. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции

$$u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z},\ (x,y,z) \in X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \neq 0\right\}.$$

◀Дифференциал первого порядка

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz. \tag{4.26}$$

Находим частные производные первого порядка функции.

$$u'_x = \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}} \cdot \frac{y}{z} = \frac{yz}{z^2+x^2y^2};\quad u'_y = \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}} \cdot \frac{x}{z} = \frac{xz}{z^2+x^2y^2};$$

$$u'_z = \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^2}} \cdot \left(-\frac{xy}{z^2}\right) = -\frac{xy}{z^2+x^2y^2}.$$

Подставляем найденные частные производные в правую часть равенства (4.26):

$$du = \frac{yz}{z^2+x^2y^2}dx + \frac{xz}{z^2+x^2y^2}dy - \frac{xy}{z^2+x^2y^2}dz.$$

Дифференциал второго порядка

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(dz)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz. \tag{4.27}$$

Находим частные производные второго порядка функции:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = yz\frac{-2xy^2}{(z^2+x^2y^2)^2} = \frac{-2xzy^3}{(z^2+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xz\frac{-2yx^2}{(z^2+x^2y^2)^2} = \frac{-2yzx^3}{(z^2+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -xy\frac{-2z}{(z^2+x^2y^2)^2} = \frac{2xyz}{(z^2+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = z\frac{z^2+x^2y^2-y2yx^2}{(z^2+y^2x^2)^2} = \frac{z^3-zx^2y^2}{(z^2+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = y\frac{z^2+x^2y^2-2z^2}{(z^2+y^2x^2)^2} = \frac{x^2y^3-yz^2}{(z^2+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = x\frac{z^2+x^2y^2-2z^2}{(z^2+y^2x^2)^2} = \frac{x^3y^2-xz^2}{(z^2+x^2y^2)^2}.$$

Подставляем найденные частные производные второго порядка в правую часть равенства (4.27):

$$d^2u = \frac{-2xzy^3}{(z^2+x^2y^2)^2}(dx)^2 + \frac{-2yzx^3}{(z^2+x^2y^2)^2}(dy)^2 + \frac{2xyz}{(z^2+x^2y^2)^2}(dz)^2 +$$

$$+2\frac{z^3-zx^2y^2}{(z^2+x^2y^2)^2}dxdy + 2\frac{x^2y^3-yz^2}{(z^2+x^2y^2)^2}dxdz + 2\frac{x^3y^2-xz^2}{(z^2+x^2y^2)^2}dydz. \blacktriangleright$$

Задание 12. Продифференцировать сложную функцию $u = x^2y^3z,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, где $x = t,\ y = t^2,\ z = \sin t,\ t \in \mathbb{R}$.

◄Так как u является функцией одной независимой переменной t, то речь идет о вычислении обыкновенной производной $\frac{du}{dt}$. Выполняя действия в соответствии с формулой

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

получим:

$$\frac{du}{dt} = 2xy^3z \cdot 1 + 3x^2y^2z \cdot 2t + x^2y^3 \cos t.$$

Остается вместо x, y и z подставить их выражение через t:

$$\frac{du}{dt} = 2t \cdot t^6 \sin t + 3t^2t^4 \sin t \cdot 2t + t^2t^6 \cos t = t^7 \left(8 \sin t + t \cos t\right).$$

Подобные примеры можно решать и другим способом, основанным на инвариантности формы первого дифференциала.

1. Найдем полный дифференциал du по промежуточным переменным x, y и z:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 2xy^3zdx + 3x^2y^2zdy + x^2y^3dz.$$

2. Найдем дифференциалы dx, dy, dz по независимой переменной:

$$dx = dt, dy = 2tdt, dz = \cos tdt.$$

3. Подставляя эти дифференциалы в выражение для du, получим:

$$du = 2xy^3zdt + 3x^2y^2z2tdt + x^2y^3 \cos tdt =$$

$$= \left(2t^7 \sin t + 6t^7 \sin t + t^8 \cos t\right) dt = t^7(8 \sin t + t \cos t)dt.$$

Отсюда следует, что производная равна

$$\frac{du}{dt} = t^7 \left(8 \sin t + t \cos t\right). \blacktriangleright$$

Задание 13. Найти частные производные и полный дифференциал сложной функции $z = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, где $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$$\blacktriangleleft \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x \cos v - 2y \sin v = 2u \cos^2 v - 2u \sin^2 v = 2u \cos 2v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -2xu \sin v - 2yu \cos v =$$

$$= -2u^2 \sin v \cdot \cos v - 2u^2 \sin v \cdot \cos v = -2u^2 \sin 2v.$$

Полный дифференциал представится в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = 2u \cos 2v du - 2u^2 \sin 2v dv = 2u \left(\cos 2v du - u \sin 2v dv\right).$$

Можно решать эту задачу, начиная с вычисления полного дифференциала.

Так как

$$dz = 2x dx - 2y dy, dx = \cos v du - u \sin v dv, dy = \sin v du + u \cos v dv,$$

то

$$dz = 2u \cos v \left(\cos v du - u \sin v dv\right) - 2u \sin v \left(\sin v du + u \cos v dv\right) =$$

$$= 2u \left(\cos^2 u - \sin^2 v\right) du - 2u^2 \left(\cos v \cdot \sin v + \sin v \cdot \cos v\right) dv =$$

$$= 2u \cos 2v dv - 2u^2 \sin 2v dv.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u \cos 2v$, $\frac{\partial z}{\partial v} = -2u^2 \sin 2v$. $\blacktriangleright$

Задание 14. Найти частные производные и полный дифференциал функции

$$z = f\left(x^2y, x^y\right),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

◀Функцию можно представить в виде $z = f(u, v)$, где $u = x^2y$, $v = x^y$. Таким образом, z является функцией двух переменных u и v, а u и v являются функциями от двух переменных xи y. Для нахождения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ воспользуемся формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2xy + \frac{\partial z}{\partial v} y \cdot x^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x^2 + \frac{\partial z}{\partial v}x^y \ln x.$$

Полный дифференциал функции представится в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}\left(2xydx + x^2dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\right). \blacktriangleright$$

Задание 15. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ в точке $(2, 1, 3)$. Определить направляющие косинусы нормали.

◀Находим z'_x и z'_y в точке $(2, 1)$:

$$z'_x = 2x,\ A = z'_x(2, 1) = 4,\ z'_y = -2y,\ B = z'_y(2, 1) = -2.$$

Подставляя найденные значения и координаты данной точки в уравнение касательной плоскости и нормали соответственно, получим:

$$4(x - 2) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0 \text{ – уравнение касательной плоскости,}$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1} \text{ – уравнение нормали.}$$

Направляющие косинусы нормали:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{1+4^2+(-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{21}},\ \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{21}},\ \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{21}}. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Температура T точки остывающего стержня является функцией двух переменных – расстояния точки x от начала стержня и момента времени t. Указать физический смысл частных производных $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$.

2. Температура T воздуха в некоторой точке земной поверхности является функцией трех переменных: долготы точки λ, ее широты θ и момента времени t. Указать физический смысл частных производных $\frac{\partial T}{\partial \lambda}, \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial t}$.

3. Длина стороны a треугольника выражается через противолежащий угол и длины двух других сторон b, c по формуле $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$. Какой смысл имеют частные производные $\frac{\partial a}{\partial b}, \frac{\partial a}{\partial c}, \frac{\partial a}{\partial A}$?

4. Площадь треугольника выражается через длину стороны a и величины прилегающих к ней углов B, C по формуле

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}.$$

   Какой смысл имеют частные производные $\frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial B}, \frac{\partial S}{\partial C}$?

5. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $f : X \to \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^2$:

5.1 $f(x,y) = x^2y - xy^2 + 3$;

5.2 $f(x,y) = \frac{x}{y}e^{xy}$;

5.3 $f(x,y) = xy - \frac{y}{x}$;

5.4 $f(x,y) = \frac{2x+3y}{x-y}$;

5.5 $f(x,y) = (x^2+y^2)^3$;

5.6 $f(x,y) = (\sin x)^{\cos y}$;

5.7 $f(x,y) = x - 3\sin y$;

5.8 $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$;

5.9 $f(x,y) = \ln(x^2+y)$;

5.10 $f(x,y) = \arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5.11 $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

5.12 $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$;

5.13 $f(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^x$;

5.14 $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$;

5.15 $f(x,y) = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$;

5.16 $z = \ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

6. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $f : X \to \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^3$:

6.1 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

6.2 $f(x,y,z) = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

6.3 $f(x,y,z) = x^{y^z}$;

6.4 $f(x,y,z) = \frac{x^y z}{x+y+z}$.

7. Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$ Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

8. Пусть $x = r\cos\alpha\cdot\cos\beta$, $y = r\cos\alpha\cdot\sin\beta$, $z = r\sin\alpha$. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

9. Показать, что функция $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

10. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\ y=0,\end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$, имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

11. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{при } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{при } (x,y)=(0;0)\end{cases}$$

не дифференцируема в точке $(0,0)$.

12. Найти значение $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(1,2)$, если

$$f(x,y)=x^{x^y}+(\ln x)\cdot\left[\operatorname{arctg}^4(\operatorname{arctg}(\sin xy))-\ln^3(x+y)\right].$$

13. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0\end{cases}$$

обладает в окрестности точки $(0,0)$ частными производными, которые разрывны в точке $(0,0)$, тем не менее эта функция дифференцируема при $x=0$, $y=0$.

14. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{если } x^6+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

разрывна при $x=y=0$, но имеет частные производные в точке $(0,0)$.

15. Проверить, что для функции

$$f(x,y)=f\,(x,y)=\begin{cases}\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0,\end{cases}$$

$f''_{xy}\,(0,0)\neq f''_{yx}\,(0,0)$.

16. Вычислить в точке $(0,0,0)$ смешанные частные производные второго порядка функции

$$f(x,y,z)=(x+z)^2\operatorname{arctg}\frac{y-z}{x+z}-(y-z)^2\operatorname{arctg}\frac{x+z}{y-z},\ (x,y,z)\in X\subset\mathbb{R}^3.$$

17. В треугольнике измерена сторона $c=25,6$ (см) $\pm\,0,2$ (см) и прилегающие к ней углы $a=42^\circ 62'\pm 1'$ и $\beta=38^\circ 12'\pm 2'$. Найти остальные стороны треугольника, угол γ и площадь треугольника и оценить погрешность найденных величин.

18. Показать, что при вычислении периода T колебания маятника по формуле $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l– длина маятника, g – ускорение силы тяжести) относительная погрешность не превосходит полусуммы относительных погрешностей, допущенных при определении величин l и g (все погрешности предполагают достаточно малыми).

19. При измерении радиуса основания r и высоты h цилиндра были получены следующие результаты: $r=3$ м $\pm\,0,1$ м, $h=5$ м $\pm\,0,2$ м. С какой абсолютной и относительной погрешностью может быть вычислен объем цилиндра?

20. Центральный угол сектора $a = 60^\circ$ увеличился на $\Delta a = 1^\circ$. На сколько следует уменьшить первоначальный радиус сектора $R = 20$ (см), чтобы площадь сектора не изменилась?

21. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

21.1 $\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}$;

21.2 $\sin 59^\circ \mathrm{tg} 46^\circ$;

21.3 $0,97^{1,05}$;

21.4 $2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2$.

22. Найти $\frac{dz}{\partial t}$ и dz, где $z = x^2 + xy + y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

23. Найти $\frac{dz}{dt}$ и dz, где $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

24. Найти $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ и dz, где $z = x^2 y - xy^2$, $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$.

25. Найти $\frac{dz}{dt}$ и dz, где $z = e^{xy} \ln(x + y)$, $x = t^3, y = 1 - t^3$.

26. Найти $\frac{dz}{dx}$ и dz, где $z = \mathrm{arctg} \frac{x+1}{y}$, $y = e^{(1+x)^2}$.

27. Вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

28. Составить уравнения касательных плоскостей и нормалей к заданным поверхностям в указанных точках:

28.1 $z = xy$, $(1, 1, 1)$;

28.2 $xy^2 + z^3 = 12$, $(1, 2, 2)$;

28.3 $x^2 y^2 + 2x + z^3 = 16$, $(2, 1, 2)$;

28.4 $z = \sin \frac{y}{x}$, $(1, \pi, 0)$.

29. К полусфере $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$ провести касательную плоскость, перпендикулярную плоскостям $x - y - z = 2$ и $x - y - \frac{z}{2} = 2$.

30. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 5

Производная по направлению. Градиент. Формула Тейлора – Маклорена для функции многих переменных

5.1 Производная по направлению. Градиент

Частные производные функции многих переменных являются производными «в направлении координатных осей». Поставим вопрос об определении и вычислении производной в случае произвольного направления. Рассмотрим этот вопрос на примере функции трех переменных.

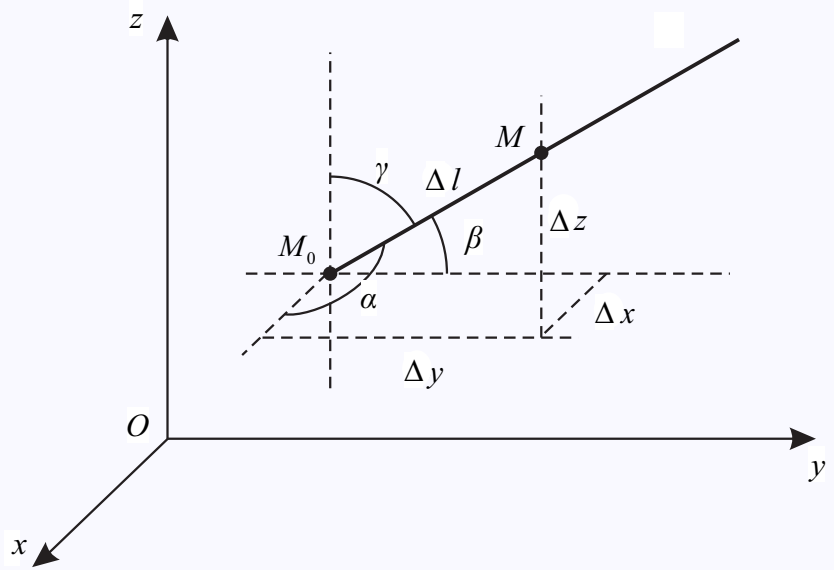


Рисунок 5.1

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$, $f : D \to \mathbb{R}$. Рассмотрим некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{Int}D$ и найдем скорость изменения функции f при движении точки M_0 в произвольном направлении вектора $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, имеющего начало в точке M_0 (рисунок 5.1), $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора l (косинусы углов, образованных вектором l с положительными направлениями осей координат Ox, Oy и Oz). При перемещении в направлении вектора l точки M_0 в точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \in U_{M_0} \subset D$ функция f получает приращение

$$\Delta_l f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0), \tag{5.1}$$

которое называется **приращением функции f в данном направлении l** (рисунок 5.1). Если

$$|M_0M| = \Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

есть величина перемещения точки M_0, то получаем

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha, \quad \Delta y = \Delta l \cos\beta, \quad \Delta z = \Delta l \cos\gamma, \tag{5.2}$$

следовательно,

$$\Delta_l f = f(x_0 + \Delta l\cos\alpha, y_0 + \Delta l\cos\beta, z_0 + \Delta l\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Определение 5.1. *Если существует* $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta l}$, *то его называют* ***производной по направлению вектора*** l *функции* f *в точке* M_0.

Производная по направлению l функции f в точке M_0 обозначается $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l f}{\Delta l}. \tag{5.3}$$

С точки зрения определения 5.1 производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ можно рассматривать как производные функции f в положительных направлениях осей координат Ox, Oy и Oz.

Производная по направлению вектора l характеризует скорость изменения функции в точке M_0 по этому направлению. Если $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) > 0$, то функция f возрастает в направлении вектора l, если $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) < 0$, то функция f убывает в направлении вектора l. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции f в направлении вектора l в точке M_0: чем больше $\left|\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)\right|$, тем быстрее изменяется функция f. В этом состоит **физический смысл производной по направлению**.

Выведем формулу для производной $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, считая функцию f дифференцируемой в точке M_0. Тогда полное приращение функции f в точке M_0 может быть представлено в виде

$$\Delta_l f = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\,\Delta z + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta l,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ – бесконечно малая при $\Delta l \to 0$.

Откуда в силу соотношения (5.2) получаем

$$\frac{\Delta_l f}{\Delta l} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma + \alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Переходя к пределу в последней формуле при $\Delta l \to 0$ и основываясь на (5.3), получим искомую формулу для производной функции в данном направлении:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{5.4}$$

В случае функции двух переменных $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ $\cos\beta = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$. Тогда формула (5.4) примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\sin\alpha.$$

Пример 5.1. Найти производную функции

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4yz,\ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

в точке $(0, 1, 2)$ в направлении от этой точки к точке $(2, 3, 3)$.

◀Находим вектор l и его направляющие косинусы:

$$l=(2,2,1),\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке $(0,1,2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2)=2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2)=2y-4z,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)=-4y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2)=-6,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2)=-4.$$

Следовательно, по формуле (5.4) имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(0,1,2)=0\cdot\frac{2}{3}-6\cdot\frac{2}{3}-4\cdot\frac{1}{3}=-\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial l}(0,1,2)<0$, то функция в данном направлении убывает.▶

Понятие производной по направлению легко переносится на случай функции любого числа n переменных ($n\geqslant 2$).

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$, $x^{(0)}\in \mathrm{Int}D$ и $f:D\to\mathbb{R}$; $l\in\mathbb{R}^n$, $|l|=1$.

Определение 5.2. ***Производной по направлению*** l *функции* f *в точке* $x^{(0)}$ *называется предел*

$$\frac{\partial f}{\partial l}\left(x^{(0)}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x^{(0)}+tl\right)-f\left(x^{(0)}\right)}{t}.$$

Очевидно, что определение 5.1 есть определение 5.2 для функции трех переменных $f=f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, и

$$l=\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}\right).$$

В случае, если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n, \tag{5.5}$$

где $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n$ – направляющие косинусы вектора l.

Определение 5.3. *Если функция f имеет в точке $x^{(0)}$ все частные производные первого порядка, то вектор*

$$\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^{(0)}\right)\right) \tag{5.6}$$

называется ***градиентом функции*** *f в точке $x^{(0)}$.*

Установим зависимость между производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$ и векторной характеристикой grad f.

Покажем, что производная по направлению, заданная формулой (5.5), равна проекции вектора grad f на это направление. Правая часть равенства (5.5) представляет собой скалярное произведение единичного вектора l и вектора grad f

$$\frac{\partial f}{\partial l}\left(x^{(0)}\right) = \left(l, \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial l}\left(x^{(0)}\right) = \left|\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right|\cos\varphi, \tag{5.7}$$

где φ – угол между вектором grad $f\left(x^{(0)}\right)$ и направлением l (рисунок 5.2).

Соотношение (5.7) позволяет определить направление наибыстрейшего возрастания функции в данной точке: правая часть равенства (5.7) принимает наибольшее положительное значение, когда вектор l направлен так же, как и grad $f\left(x^{(0)}\right)$. Следовательно, направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в данной точке. Модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания функции f в данной точке, поскольку максимальное значение проекции вектора равно его модулю. В этом состоит **физический смысл градиента**.

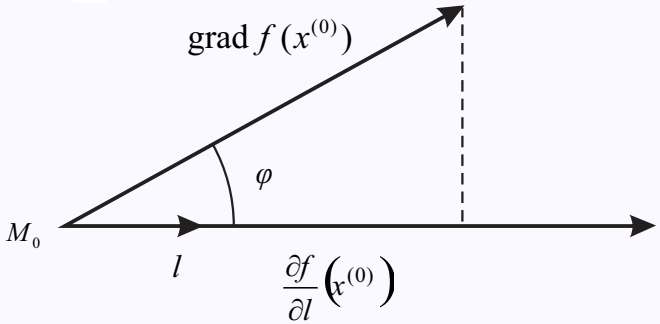


Рисунок 5.2

Пример 5.2. Найти наибольшую скорость возрастания функции

$$f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},\ (x,y,z)\in X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0\right\}$$

в точке $(-1,1,-1)$.

◀Найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ и их значения в точке $(-1,1,-1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1,-1)=2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1,-1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}(-1,1,-1)=-2,$$

$$\operatorname{grad} f(-1,1,-1)=(2,0,-2).$$

Наибольшая скорость возрастания функции равна

$$\frac{\partial f}{\partial l}(-1,1,-1) = |\text{grad } f(-1,1,-1)| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$$

Отметим, что функция f будет убывать с наибольшей скоростью $2\sqrt{2}$, если точка $(-1,1,-1)$ движется в направлении $\text{grad } f(-1,1,-1) = (-2,0,2)$ (антиградиентное направление).▶

5.2 Формула Тейлора – Маклорена

В [1] было показано, что если функция одной переменной $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ $(n+1)$ раз $(n \in \mathbb{N})$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 \in \text{Int}D$, то для любого x из указанной окрестности будет справедлива формула Тейлора – Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \tag{5.8}$$

где $R_n(x)$ – остаточный член в формуле Тейлора – Маклорена, который, например, в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{5.9}$$

Если учесть, что k-й $(k \in \mathbb{N})$ дифференциал функции f в точке x_0 определяется по формуле

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,dx^k, \tag{5.10}$$

а $x - x_0 = \Delta x = dx$, то формула (5.8) примет вид

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x), \tag{5.11}$$

где $0 < \theta < 1$.

Теперь рассмотрим формулу Тейлора – Маклорена для функции многих переменных.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности $U_{x^{(0)}}$, то для любого $x \in U_{x^{(0)}}$ справедлива формула Тейлора – Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$\Delta f\left(x^{(0)}\right) = df\left(x^{(0)}\right) + \frac{1}{2!}d^2 f\left(x^{(0)}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f\left(x^{(0)}\right) + R_n(x), \tag{5.12}$$

где остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x^*), \tag{5.13}$$

где x^* – некоторая точка из окрестности $U_{x^{(0)}}$.

◀Доказательство рассмотрим для функции двух переменных

$$z = f(x,y), \ (x,y) \in U_{(x_0,y_0)} \subset \mathbb{R}^2,$$

удовлетворяющей условиям теоремы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Возьмем в окрестности $U_{(x_0,y_0)}$ любую точку (x,y), где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$.

Соединим точки (x,y) и (x_0,y_0) отрезком прямой, которая представляется в параметрической форме системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \end{cases} \tag{5.14}$$

где $t \in [0,1]$.

Функция f на указанном отрезке является сложной функцией

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad t \in [0,1].$$

Запишем для функции F формулу Тейлора – Маклорена

$$\Delta F(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} d^k F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta(t - t_0)), \quad \theta \in (0,1), \tag{5.15}$$

для $t_0 = 0$ и используем равенство $F(1) - F(0) = f(x,y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0)$.

Дифференциалы в формуле (5.15) являются дифференциалами сложной функции $z = f(x,y)$, где x и y – линейные функции (в этом случае сохраняется неизменной форма высших дифференциалов (покажите самостоятельно)).

А тогда

$$d^k F\Big|_{t_0=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^k f(M_0) \tag{5.16}$$

и

$$d^{n+1} F\big|_{t_0+\theta(t-t_0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \tag{5.17}$$

В формулах (5.16) и (5.17) dx и dy находятся из формул системы (5.14) при $dt = \Delta t = 1 - 0$. Тогда в формулах (5.16) и (5.17)

$$dx = dt\Delta x = \Delta x, \ dy = dt\Delta y = \Delta y. \tag{5.18}$$

Подставляя $d^k F\Big|_{t_0}$ и $d^{n+1} F\Big|_{t_0+\theta(t-t_0)}$ из формул (5.16) и (5.17) в формулу (5.13) и учитывая равенства (5.18), получим формулу Тейлора – Маклорена для рассматриваемого случая.►

Пример 5.3. Разложить по формуле Тейлора – Маклорена функцию

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

в окрестности точки $(1,2)$.

◀Запишем формулу (5.12) для нашего случая:

$$f(x,y) = f(1,2) + df(1,2) + \frac{1}{2!}d^2 f(1,2) + \frac{1}{3!}d^3 f(1,2), \tag{5.19}$$

$$\Delta x = x - 1 = dx, \Delta y = y - 2 = dy.$$

Так как частные производные выше третьего порядка равны нулю, то правая часть (5.19) будет содержать только 4 члена.

Находим: $f(1,2) = (x^3 - 2y^3 + 3xy)\Big|_{(1,2)} = -9;$

$$df(1,2) = f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) =$$

$$= \left(3x^2 + 3y\right)\Big|_{(1,2)}(x-1) + \left(-6y^2 + 3x\right)\Big|_{(1,2)}(y-2) = 9(x-1) - 21(y-2);$$

$$\frac{1}{2!}d^2 f(1,2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(1,2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(6x\Big|_{x=1}(x-1)^2 + 2\cdot 3(x-1)(y-2) + (-12y)\Big|_{y=2}(y-2)^2\right) =$$

$$= 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2;$$

$$\frac{1}{3!}d^3 f(1,2) = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(1,2) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,2)(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,2)(x-1)^2(y-2) +\right.$$

$$+3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,2)(x-1)(y-2)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2)(y-2)^3\Big)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(6(x-1)^3+3\cdot 0\cdot(x-1)^2(y-2)+3\cdot 0\cdot(x-1)(y-2)^2+(-12)(y-2)^3\right)=$$

$$=(x-1)^3-2(y-2)^3.$$

Подставляем найденные значения слагаемых в правую часть равенства (5.19) и получаем искомый ответ:

$$x^3-2y^3+3xy=-9+9(x-1)-21(y-2)+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-$$
$$-12(y-2)^2+(x-1)^3-2(y-2)^3.\ \blacktriangleright$$

Теорема 5.2 (формула Тейлора – Маклорена с остаточным членом в форме Пеано). *Если функция* $f: D\to\mathbb{R}$ $(D\subset\mathbb{R}^m)$ $(n-1)$ *раз* $(n\in\mathbb{N})$ *дифференцируема в некоторой окрестности* $U_{x^{(0)}}\subset D$, *а в самой точке* $x^{(0)}$ *функция* f n *раз дифференцируема, то для любого* $x\in U_{x^{(0)}}$ *справедлива формула*

$$f(x)=f\left(x^{(0)}\right)+df\left(x^{(0)}\right)+\frac{1}{2!}d^2f\left(x^{(0)}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf\left(x^{(0)}\right)+o\left(\left|x-x^{(0)}\right|^n\right). \tag{5.20}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение производной по направлению вектора l функции f в точке $x^{(0)}$.
2. В чем состоит физический смысл производной функции по направлению?
3. Дайте определение градиента функции в точке. В чем состоит его физический смысл?
4. Запишите формулу Тейлора – Маклорена функции многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Производная по направлению. Формула Тейлора – Маклорена для функции двух переменных

Задание 1. Найти производную функции

$$f(x,y)=\ln(x+y),\ (x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2,$$

в точке $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)$ по направлению вектора, образующего угол $\frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси абсцисс.

◀Воспользуемся формулой производной по направлению функции двух переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора l.

По условию $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$, и потому $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдем значения частных производных в точке $\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)$,

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{x+y},\ f'_y(x,y)=\frac{1}{x+y}.$$

Они оказались равными в любой точке (x,y). В частности,

$$f'_x\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)=f'_y\left(\frac{9}{4},\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{\frac{9}{4}+\frac{9}{2}}=\frac{4}{27}.$$

Подставляя в формулу производной по направлению найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{4}{27}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{27}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{27}.\ ▶$$

Задание 2. Найти направление и величину наибыстрейшего возрастания функции

$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + xyz + \frac{z^2}{2},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

в точке $(1,1,-2)$.

$$\blacktriangleleft\ f'_x = 2(x+y)\cdot(x+y)'_x + yz = 2(x+y) + yz,\ f'_x(1,1,-2) = 2,$$
$$f'_y = 2(x+y)(x+y)'_y + xz = 2(x+y) + xz,\ f'_y(1,1,-2) = 2,$$
$$f'_z = xy + z,\ f'_z(1,1,-2) = -1.$$

Направление наибыстрейшего роста функции f в точке $(1,1,-2)$ задает вектор градиента функции в данной точке:

$$\text{grad } f(1,1,-2) = \big(f'_x(1,1,-2), f'_y(1,1,-2), f'_z(1,1,-2)\big) = (2,2,-1).$$

Вычислим величину наибыстрейшего роста функции:

$$|\text{grad } f(1,1,-2)| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = 3.\ \blacktriangleright$$

Задание 3. Записать формулу Тейлора – Маклорена для функции

$$f(x,y) = x^y,\ (x,y) \in U_{(1,1)} \subset \mathbb{R}^2,$$

в окрестности точки $(1,1)$ при $n = 3$.

◀В данном случае формула Тейлора – Маклорена принимает следующий вид:

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{df(1,1)}{1!} + \frac{d^2f(1,1)}{2!} + \frac{d^3f(1,1)}{3!} + R_3(x,y). \qquad (5.21)$$

Найдем все частные производные функции f до 3-го порядка включительно:

$$f'_x = yx^{y-1},\ f'_y = x^y \ln x,$$

$$f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x,\ f''_{y^2} = x^y (\ln x)^2,$$

$$f'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},\ f'''_{x^2y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x,$$

$$f'''_{xy^2} = 2x^{y-1}\ln x + yx^{y-1}(\ln x)^2,\ f'''_{y^3} = x^y (\ln x)^3.$$

Вычислим значения функции и ее частных производных в точке $(1,1)$:

$$f(1,1) = 1,\ f'_x(1,1) = 1,\ f'_y(1,1) = 0,$$

$$f''_{x^2}(1,1) = 0,\ f''_{xy}(1,1) = 1,\ f''_{y^2}(1,1) = 0,$$

$$f'''_{x^3}(1,1) = 0,\ f'''_{x^2y}(1,1) = 1,\ f'''_{xy^2}(1,1) = 0,\ f'''_{y^3}(1,1) = 0.$$

Составим дифференциалы функции, участвующие в формуле (5.21):

$$df(1,1) = f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y = \Delta x,$$

$$d^2 f(1,1) = f''_{x^2}(1,1)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(1,1)\Delta y^2 = 2\Delta x\Delta y,$$

$$d^3 f(1,1) = f'''_{x^3}(1,1)\Delta x^3 + 3f'''_{x^2y}(1,1)\Delta x^2\Delta y + 3f'''_{xy^2}(1,1)\Delta x\Delta y^2 +$$

$$+ f'''_{y^3}(1,1)\Delta y^3 = 3\Delta x^2\Delta y.$$

Подставляя в (5.21), получим:

$$x^y = 1 + \Delta x + \Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\Delta x^2\Delta y + R_3(x,y).$$

При достаточно малых значениях Δx и Δy эта формула может быть использована для приближенного вычисления значений функции в окрестности точки $(1;1)$. Если, например, надо найти приближенно значение функции в точке $(1,1;1,02)$, то, полагая $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,02$, получим

$$(1,1)^{1,02} \approx 1 + 0,1 + 0,002 + 0,0001 = 1,1021. \blacktriangleright$$

Задание 4. Разложить по формуле Тейлора – Маклорена функцию

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 + 3xy,\ (x,y) \in U_{(1,2)} \subset \mathbb{R}^2,$$

в окрестности точки $(1,2)$.

◀Воспользуемся тем, что если функция f $(n+1)$-раз дифференцируема в окрестности $U_{(x_0,y_0)}$ точки (x_0,y_0) радиуса $\delta > 0$, то справедлива формула Тейлора – Маклорена для любой точки $(x,y) \in U_{(x_0,y_0)}$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial y}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^k f(x_0,y_0) + R_n(x+y), \tag{5.22}$$

где

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)),$$

где $0 < \theta < 1$.

Если функция f есть многочлен степени n $(n \in \mathbb{N})$, то все частные производные функции f порядка выше n будут равны нулю. В этом случае $R_n(x,y) = 0$. Наша функция f есть многочлен третьей степени, поэтому все частные производные функции выше третьего порядка равны нулю.

$$f(1,2) = (x^3 - 2y^3 + 3xy)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 1 - 16 + 6 = -9,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = (3x^2+3y)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3+6 = 9,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = (-6y^2+3x)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -24+3 = -21,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) = 6x\,|_{x=1} = 6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2) = -12y\,|_{y=2} = -24,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,2) = 3,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,2) = 6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2) = -12,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,2) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,2) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(1,2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,2) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(1,2) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(1,2) = 0.$$

Представляем найденные значения частных производных в формулу (5.22).

$$f(x,y) = -9+9(x-1)-21(y-2)+\frac{1}{2}(6(x-1)^2+6(x-1)(y-2)-$$

$$-24(y-2)^2)+\frac{1}{6}(6(x-1)^3-12(y-2)^3) = -9+9(x-1)-21(y-2)+$$

$$+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-12(y-2)^2+(x-1)^3-2(y-2)^3.\ \blacktriangleright$$

Задание 5. Разложить функцию

$$f(x,y) = x\sqrt{1+y},\ (x,y) \in U_{(0,0)},$$

в окрестности точки $(0,0)$ по формуле Тейлора – Маклорена с остаточным членом в форме Пеано до $o\left(x^2+y^2\right)$. Записать также остаточный член второго порядка в форме Лагранжа.

$$\blacktriangleleft\ f(0,0) = 0,\ f'_x = \sqrt{1+y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1,\ f'_y = x\frac{1}{2\sqrt{y+1}}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0.$$

$$f''_{x^2}=0,\ f''_{y^2}=x\frac{1}{2}\left((y+1)^{-\frac{1}{2}}\right)'\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{1}{4}x(y+1)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1+y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

$$f''_{xy}=\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\frac{1}{2},$$

причем $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)=\frac{1}{2}$.

В общем случае наше искомое разложение примет вид

$$f(x,y)=f(0,0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)f(0,0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^2 f(0,0)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right)^3 f(\theta x,\theta y),$$

где $0<\theta<1$.

В нашем случае формула Тейлора – Маклорена с остаточным членом в форме Пеано будет иметь вид:

$$f(x,y)=x+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}xy=x+\frac{1}{2}xy+o\left(x^2+y^2\right).$$

Остаточный член в форме Лагранжа

$$R_2(x,y)=\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\theta x,\theta y)x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\theta x,\theta y)x^2y+\right.$$

$$\left.+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\theta x,\theta y)xy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\theta x,\theta y)y^3\right). \qquad (5.23)$$

Находим частные производные (вначале в общем виде, а потом в точке $(\theta x,\theta y)$).

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)=-\frac{1}{4}(y+1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = -\frac{1}{4}x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(y+1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x(y+1)^{-\frac{5}{2}}.$$

$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}\left(-\frac{3}{4}(1+\theta y)^{-\frac{3}{2}}xy^2 + \frac{3}{8}\theta x(1+\theta y)^{-\frac{5}{2}}y^3\right) = -\frac{xy^2}{16}(2+\theta y)(1+\theta y). \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти приближенное значение $f\left(\frac{91}{360}\pi, \frac{61}{360}\pi\right)$, где

$$f(x,y) = \sin(2x-y),$$

с помощью формулы Тейлора – Маклорена с остаточным членом $R_1(x,y)$ в форме Лагранжа.

◀Возьмем точку $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$. Тогда $\Delta x = \Delta y = \frac{\pi}{360}$. В общем виде формула Тейлора – Маклорена имеет вид

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + R_1(x,y),$$

где

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f\left(\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x, \frac{\pi}{6}+\theta\Delta y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x, \frac{\pi}{6}+\theta\Delta y\right)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x, \frac{\pi}{6}+\theta\Delta y\right)\Delta x\Delta y + \right.$$

$$\left. + f''_{y^2}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x, \frac{\pi}{6}+\theta\Delta y\right)(\Delta y)^2\right), \ 0<\theta<1.$$

Дальше находим частные производные в соответствующих точках.

$$f'_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos(2x-y)\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ y=\frac{\pi}{6}}} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1,$$

$$f'_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right) = -\cos(2x-y)\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ y=\frac{\pi}{6}}} = -0,5,$$

$$f''_{x^2} = -4\sin(2x-y)\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x\\ y=\frac{\pi}{6}+\theta\Delta y}} = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\Delta x-\theta\Delta y\right) =$$

$$= -4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right),$$

$$f''_{y^2} = -\sin(2x-y)\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x\\ y=\frac{\pi}{6}+\theta\Delta y}} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right),$$

$$f''_{xy} = 2\sin(2x-y)\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}+\theta\Delta x\\ y=\frac{\pi}{6}+\theta\Delta y}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right).$$

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(-4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^2 + 4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^2 -\right.$$

$$\left. -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right)\left(\frac{\pi}{360}\right)^2\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\frac{\pi}{360}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{360}\right)^2.$$

$$|R_1(x,y)| \le \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{360}\right)^2 = 0,000038\ldots < 10^{-4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) = \sin(2\cdot 45^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025404\ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{360} = 1\cdot\frac{\pi}{360} = 0,008726646\ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{360} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{360} = 0,004363323\ldots.$$

Тогда

$$f\left(\frac{91}{360}\pi,\frac{61}{360}\pi\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) + df\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right) = 0,8704$$

с точностью до 10^{-4}. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $f(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, в точке $(1,2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол $\alpha = 60°$.

2. Показать, что производные по любому направлению функции

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

в точке $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ равны нулю.

3. Найти точки, в которых производные функции

$$f(x,y) = x^2y - 2y^2 + 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

по любому направлению равны нулю.

4. Найти производную функции

$$f(x,y) = x^2y - 2y^2 + 1,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

в точке $(3,2)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат. Возрастает или убывает функция в этом направлении?

5. Найти производную функции $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, в точке $(1,2)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

6. Разложить функцию

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in U_{(0,0)} \subset \mathbb{R}^2,$$

по формуле Тейлора – Маклорена в окрестности точки $(0,0)$ до членов третьего порядка включительно.

7. Разложить функцию $f(x,y)=\sin x\cdot\sin y,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, по формуле Тейлора – Маклорена по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$, ограничиваясь членами второго порядка включительно.

8. Пусть $f: X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}^2$. Разложить функцию f по формуле Тейлора – Маклорена, ограничиваясь членами второго порядка включительно, в окрестности точки (x_0,y_0):

   8.1 $f(x,y)=\frac{1}{x-y}$, $(2,1)$;

   8.2 $f(x,y)=\sqrt{x+y}$, $(1,1)$;

   8.3 $f(x,y)=\ln(x-2y)$, $(4,1)$;

   8.4 $f(x,y)=e^{x+y}$, $(0,0)$;

   8.5 $f(x,y)=\arccos\frac{x}{y}$, $(1,1)$.

9. Разложить функцию $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, по формуле Тейлора – Маклорена в окрестности точки $(1,1,1)$.

ЛЕКЦИЯ 6
Дифференцирование неявно заданных функций

6.1 Понятие функции, заданной неявно. Частные производные неявно заданной функции

В математике и ее приложениях приходится сталкиваться с такими задачами, когда переменная u, являющаяся по смыслу задачи функцией аргументов $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, задается посредством функционального уравнения

$$F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{6.1}$$

В этом случае говорят, что u как функция аргументов x_i **задана неявно**.

Так, например, функция

$$u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\},$$

может быть неявно задана посредством функционального уравнения

$$u^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{6.2}$$

При этом возникают следующие вопросы:

1. При каких условиях функциональное уравнение (6.1) однозначно разрешимо относительно переменной u, то есть однозначно определяет явную функцию $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

2. При каких условиях функция φ непрерывна, имеет частные производные и дифференцируема?

Например, уравнение (6.2) определяет в единичном круге бесконечно много явных функций.

Так, функции $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а также любая функция $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, определенная для некоторых точек (x, y) из круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, и $u = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ для остальных точек этого круга будет функцией, заданной неявно с помощью уравнения (6.2).

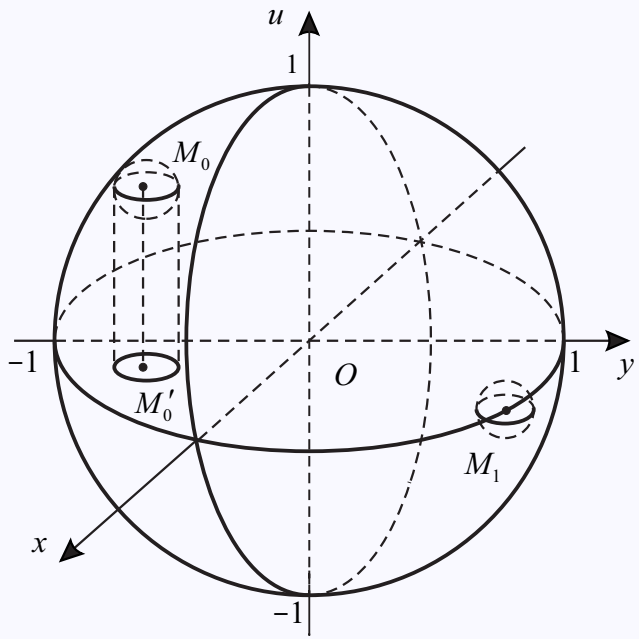


Рисунок 6.1

С геометрической точки зрения уравнение (6.2) определяет в $\mathbb{R}^3$ сферу радиуса $R = 1$ с центром в начале координат. Возьмем на этой сфере точку $M_0\,(u_0, x_0, y_0)$, где $u_0 > 0$. Часть поверхности сферы в окрестности U_{M_0} достаточно малого радиуса $\delta > 0$ однозначно проектируется на плоскость $u = 0$ (рисунок 6.1).

Аналитически это означает, что если рассматривать функцию

$$F\,(u, x, y) = u^2 + x^2 + y^2 - 1$$

только в указанной окрестности U_{M_0}, то уравнение (6.2) однозначно разрешимо относительно u. Тогда это уравнение определяет единственную явную функцию

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (u > 0)\,.$$

Если же взять точку $M_1\,(0, x, y)$, принадлежащую сфере, то для любой окрестности U_{M_1} часть указанной сферы неоднозначно проектируется на плоскость $u = 0$, то есть уравнение (6.2) не является однозначно разрешимым относительно u.

Заметим при этом, что $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u$ и $\frac{\partial F}{\partial u}\,(M_0) \neq 0$, но $\frac{\partial F}{\partial u}\,(M_1) = 0$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$. Через (u, x) будем обозначать $(u, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если функция $F : G \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $\left(u_0, x^{(0)}\right) \in G$, причем $F\left(u_0, x^{(0)}\right) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}\left(u_0, x^{(0)}\right) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_{x^{(0)}}$, что:*

1) для любого $x \in U_{x^{(0)}}$ найдется единственное число $u = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $F(u, x) = 0$;

2) функция $u = \varphi(x)$, $x \in U_{x^{(0)}}$, дифференцируема на $U_{x^{(0)}}$ и ее частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad (i = \overline{1, n}).$$

◀Доказательство теоремы проведем для случая неявно заданной функции двух переменных.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$, $M_0\,(u_0, x_0, y_0) \in G$. Функция $F : G \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности U_{M_0}, причем $F(M_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) \neq 0$. Покажем, что существует такая окрестность точки $M_0'(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, что:

1)для любой точки $(x, y) \in U_{M_0'}$ найдется единственное число $u = \varphi(x, y)$, удовлетворяющее условию

$$F\,(u, x, y) = 0; \tag{6.3}$$

2) функция φ дифференцируема на $U_{M_0'}$, а ее частные производные в точках этой окрестности будут вычисляться по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_u'};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_u'}. \tag{6.4}$$

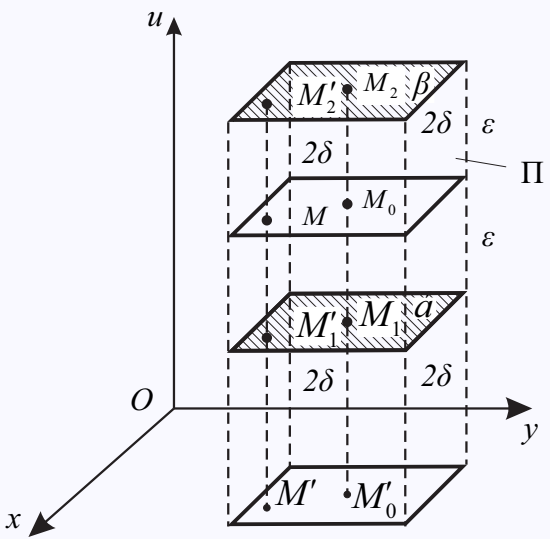


Рисунок 6.2

Чтобы сделать доказательство более наглядным, будем сопровождать его геометрической иллюстрацией (рисунок 6.2).

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (6.3) определяет в пространстве $\mathbb{R}^3$ некоторую поверхность S, причем, в силу условия $F(M_0) = 0$, точка M_0 лежит на этой поверхности.

Ради определенности будем считать, что частная производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ положительна в точке M_0. Тогда из непрерывности указанной производной в точке M_0 и из теоремы об устойчивости знака непрерывной функции вытекает, что найдется такая окрестность точки M_0, всюду в пределах которой $\frac{\partial F}{\partial u}$ положительна. Эту окрестность можем взять в виде открытого шара Ω достаточно малого радиуса с центром в точке M_0. Фиксируем далее положительное число ε настолько малым, чтобы каждая из точек $M_1(u_0-\varepsilon, x_0, y_0)$ и $M_2(u_0+\varepsilon, x_0, y_0)$ лежала внутри шара Ω (для этого достаточно взять ε меньшим радиуса шара Ω).

Рассмотрим функцию F как функцию одной переменной: $u \mapsto F(u, x_0, y_0)$ на отрезке $[u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon]$. С геометрической точки зрения это означает, что мы рассматриваем функцию F трех переменных вдоль отрезка M_1M_2 (рисунок 6.2). Так как производная $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x_0, y_0)$ положительна на отрезке $[u_0-\varepsilon, u_0+\varepsilon]$, то функция F как функция одной переменной u возрастает на этом отрезке. Но тогда, поскольку эта функция равна нулю в середине указанного отрезка (т. е. при $u=u_0$), то $F(u, x_0, y_0)$ имеет отрицательное значение на левом конце и положительное значение на правом конце указанного отрезка, т. е. $F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$.

Далее рассмотрим функции двух переменных x и y: $(x,y) \mapsto F(u_0-\varepsilon, x, y)$ и $(x,y) \mapsto F(u_0+\varepsilon, x, y)$, т. е., выражаясь геометрическим языком, рассмотрим функцию F на двух плоскостях, параллельных координатной плоскости Oxy, первая из которых проходит через точку M_1, а вторая – через точку M_2. Поскольку $F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$ и функция F непрерывна всюду в шаре Ω, то по теореме об устойчивости знака непрерывной функции на указанных плоскостях найдутся такие окрестности точек M_1 и M_2, в пределах которых функция F сохраняет те же знаки, что и в точках M_1 и M_2. Эти окрестности можно взять в виде открытых квадратов с центрами в точках M_1 и M_2 и с достаточно малой стороной 2δ (на рисунке 6.2 указанные квадраты заштрихованы). Аналитически тот факт, что функция F сохраняет постоянный знак на указанных квадратах, выражается неравенствами

$$\begin{cases} F(u_0-\varepsilon, x, y) < 0, \\ F(u_0+\varepsilon, x, y) > 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta. \tag{6.5}$$

Выбор стороны указанных квадратов подчиним еще одному условию: возьмем δ столь малым, чтобы оба указанных квадрата лежали внутри шара Ω (это заведомо можно сделать, так как центры квадратов

M_1 и M_2 являются внутренними точками шара Ω). При таком выборе δ любая точка (u, x, y), координаты которой удовлетворяют неравенствам

$$|x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta, \ |u - u_0| < \varepsilon, \tag{6.6}$$

будет лежать внутри шара Ω. С геометрической точки зрения неравенства (6.6) определяют открытый прямоугольный параллелепипед с центром в точке M_0 и со сторонами, параллельными осям координат u, x, y и, соответственно, равными 2ε, 2δ, 2δ. Этот параллелепипед мы будем обозначать символом Π. Так как параллелепипед Π лежит внутри шара Ω, то всюду в параллелепипеде Π, включая открытые квадраты, лежащие в его основаниях, производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ положительна. Кроме того, в силу неравенств (6.5), функция F принимает отрицательные значения на нижнем основании и положительные – на верхнем основании Π.

Докажем теперь, что уравнение (6.3) однозначно разрешимо относительно u, если функцию F рассматривать на внутренних точках параллелепипеда Π. Разъясним, что требуется доказать. Пусть $M'(x, y)$ – любая точка пространства $\mathbb{R}^2$, координаты которой удовлетворяют неравенствам

$$|x - x_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta. \tag{6.7}$$

Иначе говоря, пусть $M'(x, y)$ – любая точка плоскости Oxy, лежащая внутри квадрата с центром в точке $M'_0(x_0, y_0)$ и со сторонами, равными 2δ. Требуется доказать, что для координат x, y точки M' найдется, и притом единственное число u из интервала $u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon$, такое, что $F(u, x, y) = 0$ (с геометрической точки зрения это означает, что любая прямая, параллельная оси u и пересекающая параллелепипед Π, пересекает поверхность S внутри параллелепипеда Π в одной и только одной точке).

Зафиксировав значения x и y, удовлетворяющие неравенствам (6.7), рассмотрим функцию F переменной u на отрезке $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$, т. е. рассмотрим функцию F на отрезке M'_1, M'_2, где M'_1 и M'_2 – точки пересечения прямой, проходящей через точку $M'(x, y)$ и параллельной оси Ou, с основаниями параллелепипеда Π. Так как производная $\frac{\partial F}{\partial u}$ положительна на отрезке $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$, то функция F переменной u возрастает на этом отрезке. Но тогда из условий $F(M'_1) < 0$, $F(M'_2) > 0$ вытекает, что внутри отрезка най-

дется единственное значение u, такое, что $F(u,x,y)=0$ (или, выражаясь геометрически, внутри отрезка $M_1'M_2'$ найдется единственная точка M, лежащая на поверхности S).

Таким образом, каждой точке $M'(x,y)$ из окрестности (6.7) ставится в соответствие единственное число из интервала $u_0-\varepsilon<u<u_0+\varepsilon$, для которого $F(u,x,y)=0$. Мы доказали, что в окрестности (6.7) существует единственная функция $u=\varphi(x,y)$, удовлетворяющая условию $|u-u_0|<\varepsilon$ и являющаяся решением уравнения (6.3).

Докажем теперь, что функция φ непрерывна в любой точке $M'(x,y)$ окрестности (6.7). Так как для любой точки указанной окрестности выполнены те же условия, что и для точки $M_0'(x_0,y_0)$, то достаточно доказать непрерывность функции φ лишь в точке M_0'. Покажем, что для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых x и y, удовлетворяющих неравенствам (6.7), справедливо неравенство $|u-u_0|<\varepsilon$, где $u=\varphi(x,y)$, $u_0=\varphi(x_0,y_0)$. Если взять в качестве ε то число, которое было выбрано выше, то существование δ обеспечивается неравенствами (6.6). Тем самым непрерывность функции φ установлена.

Докажем, что функция φ дифференцируема в любой точке окрестности (6.7). Для этого достаточно показать ее дифференцируемость в точке $M_0'(x_0,y_0)$. Вычислим полное приращение Δu функции $u=\varphi(x,y)$ в точке M_0', соответствующее приращениям аргументов Δx и Δy. Поскольку

$$F(u_0,x_0,y_0)=0 \text{ и } F(u_0+\Delta u,x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=0,$$

то полное приращение ΔF функции F в точке $M_0(u_0,x_0,y_0)$, соответствующее приращениям аргументов Δu, Δx, Δy, равно нулю. Но в силу условия дифференцируемости функции F в точке M_0 это полное приращение имеет вид

$$\Delta F=\left(\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)+\gamma\right)\Delta u+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)+\alpha\right)\Delta x+\left(\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)+\beta\right)\Delta y,$$

где α, β, $\gamma\to 0$ при $\begin{cases}\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0,\\ \Delta u\to 0.\end{cases}$

Итак, мы получаем:

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma\right)\Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \beta\right)\Delta y. \tag{6.8}$$

Из непрерывности функции φ в окрестности (6.7) следует, что если $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0, \end{cases}$, то и $\Delta u \to 0$. Таким образом, можно утверждать, что из условия $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ следует, что α, β, $\gamma \to 0$.

По условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) \neq 0$. Поскольку $\gamma \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0, \end{cases}$ то при достаточно малых Δx и Δy выражение $\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma$ не обращается в нуль. Разделим обе части (6.8) на указанное выражение, в результате чего получим:

$$\Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma}\right)\Delta y. \tag{6.9}$$

Так как

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)},$$

то

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)} + \mu, \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0) + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)} + \nu, \tag{6.10}$$

где μ и $\nu \to 0$ при $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0. \end{cases}$

Сопоставляя (6.9) и (6.10), окончательно получим:

$$\Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}\right)\Delta y + \mu\Delta x + \nu\Delta y. \tag{6.11}$$

Равенство (6.11) доказывает дифференцируемость функции φ в точке $M_0'(x_0, y_0)$.

Из дифференцируемости функции φ следует существование ее частных производных, формулы которых получаем из равенства (6.11):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0') = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}{\frac{\partial F}{\partial u}(M_0)}. \blacktriangleright \tag{6.12}$$

Замечание 6.1. Для обеспечения существования частных производных второго порядка у неявно заданной функции φ необходимо усилить требования, наложенные на функцию F в теореме 6.1: приходится дополнительно требовать, чтобы функция F была два раза дифференцируемой в рассматриваемой точке. В этих предположениях остановимся на вычислении частных производных второго порядка.

Предположим, что нам дана дифференцируемая в некоторой окрестности точки $M_0(u_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ функция Φ:

$$(u, x, y) \mapsto \Phi(u, x, y), \quad (u, x, y) \in U_{M_0},$$

причем аргумент u сам является дифференцируемой функцией двух других аргументов x и y. Тогда функцию Φ можно рассматривать как сложную функцию двух аргументов x и y. Частные производные этой сложной функции по x и y будем называть **полными частными производными** функции Φ по x и y и обозначать символами $\frac{D\Phi}{Dx}$ и $\frac{D\Phi}{Dy}$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем следующие формулы для указанных полных частных производных:

$$\frac{D\Phi}{Dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{D\Phi}{Dy} = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Теперь вычислим частные производные второго порядка неявно заданной функции, например $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Принимая во внимание, что каждая из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ зависит от трех аргументов u, x, y, первый из которых сам является функцией x и y, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{D\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\right)}{Dy} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial u}\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{Dy} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{D\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)}{Dy}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2}.$$

Используя формулу $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$, окончательно будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^3}.$$

Аналогично вычисляются частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Также аналогичным методом могут быть вычислены и частные производные третьего и последующих порядков (при условии, что функция F дифференцируема в заданной точке соответствующее число раз).

6.2 Неявные функции, определяемые системой функциональных уравнений

Выше нами рассмотрен вопрос о существовании и дифференцируемости неявной функции, определяемой посредством одного функционального уравнения. Далее мы рассмотрим аналогичный вопрос для совокупности m ($m \in \mathbb{N}$) неявных функций, определяемых посредством системы функциональных уравнений.

Пусть $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Будем далее использовать обозначение:

$$(u, x) = (u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{m+n}.$$

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$, функции $F_k : G \to \mathbb{R}$ ($k = \overline{1, m}$) имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $\left(u^{(0)}, x^{(0)}\right)) \in G$. Предположим, что m функций

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x), \\ \ldots\ldots \\ u_m = \varphi_m(x) \end{cases} \tag{6.13}$$

ищутся как решение системы m функциональных уравнений

$$\begin{cases} F_1(u, x) = 0, \\ \ldots\ldots \\ F_m(u, x) = 0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Изучим вопрос о разрешимости системы функциональных уравнений (6.14) относительно $u_1, \ldots, u_m$. Под термином «решение системы (6.14)» в дальнейшем будем понимать совокупность m функций (6.13) таких, что при подстановке этих функций в систему (6.14) все уравнения этой системы обращаются в тождества.

Определение 6.1. *Определитель*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

называют ***определителем Якоби*** *(или* ***якобианом****) функций* $F_1, \ldots, F_m$ *по переменным* $u_1, \ldots, u_m$ *и обозначают символом* $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)}$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть область* $G \subset \mathbb{R}^{m+n}$, *функции* $F_k : G \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ *имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки* $\left(u^{(0)}, x^{(0)}\right) \in G$, *причем* $F_k\left(u^{(0)}, x^{(0)}\right) = 0$ $(k = \overline{1,m})$, *а якобиан* $\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)} \neq 0$, *то:*

1) *для любого* $x \in U_{x^{(0)}}$ *найдется единственный набор* m *чисел* $u_1 = \varphi_1(x), \ldots, u_m = \varphi_m(x)$, *удовлетворяющий условию* (6.14);

2) *функции* $u_k = \varphi_k(x)$ $(k = \overline{1,m})$, $x \in U_{x^{(0)}}$, *дифференцируемы на* $U_{x^{(0)}}$.

◀Доказательство теоремы 6.2 проводится методом математической индукции (при $m = 1$ теорема 6.2 переходит в доказанную теорему 6.1, так как в этом случае якобиан (6.15) обращается в частную производную $\frac{\partial F_1}{\partial u_1}$ (см. [2, с. 556])).▶

Вычислим частные производные функций (6.13) в предположении выполнения условий теоремы 6.2. Подставим функции (6.13) в систему уравнений (6.14), решением которой они являются, и продифференцируем полученные тождества по x_i $(i = \overline{1,n})$. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial x_i} = 0. \end{cases} \tag{6.16}$$

Равенства (6.16) представляют собой линейную систему уравнений относительно m неизвестных

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_i}.$$

Определитель этой системы якобиан (6.15) отличен от нуля в окрестности точки $\left(u^{(0)}, x^{(0)}\right)$. Следовательно, система (6.16) имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_{k-1},x_i,u_{k+1},\ldots,u_m)}}{\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)}}.$$

Выражения для частных производных второго и последующих порядков можно получить посредством дифференцирования этих формул (существование этих производных обеспечивается дополнительными ограничениями на функции F_k $(k = \overline{1,m})$).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие функции, заданной неявно. Дайте понятие функции, заданной неявно системой функциональных уравнений.
2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции, заданной неявно.
3. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции, заданной неявно системой функциональных уравнений.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Дифференцирование функций, заданных неявно

Задание 1. Из уравнения $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ явно выразить y через x. Сколько функций на отрезке $[0, a\sqrt{2}]$ определяет это уравнение? Сколько непрерывных функций определяется этим уравнением?

◀Положим $y^2 = z$. Получим квадратное уравнение $(x^2+z)^2 = 2a^2x^2 - 2a^2z$, или

$$z^2 + 2(x^2+a^2)z + x^4 - 2a^2x^2 = 0,$$

$$y^2 = z = -x^2 - a^2 \pm \sqrt{(x^2+a^2)^2 - x^4 + 2a^2x^2} = -x^2 - a^2 \pm a\sqrt{a^2+4x^2}.$$

Так как $y^2 \geqslant 0$, то перед корнем выбираем знак «плюс». Таким образом,

$$y = \pm\sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}. \tag{6.17}$$

Подкоренное выражение не отрицательно, если $x^2 \leqslant 2a^2$. Равенство (6.17) определяет бесконечно много различных функций на отрезке $[0, a\sqrt{2}]$. Например, можно положить

$$y = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ -\sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}, & \text{если } a < x \leqslant a\sqrt{2}, \end{cases}$$

или

$$y = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}, & \text{если } x \text{ – рационально}, \\ -\sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}, & \text{если } x \text{ – иррационально}, \end{cases}$$

и т. д.

Однако если наложить добавочное требование непрерывности, то получим две различные функции на отрезке $[0, a\sqrt{2}]$: $y_1 = \sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}$ и $y_2 = -\sqrt{-x^2 - a^2 + a\sqrt{a^2+4x^2}}$. ►

Задание 2. Найти первую и вторую производные функции $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, заданной неявно уравнением $xe^y + ye^x = 2$, и найти их значение при $x = 0$.

◀Продифференцируем равенство $xe^y + ye^x = 2$ два раза по x, рассматривая его как тождество относительно x:

а) $e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x = 0$;

б) $e^y y' + e^y y' + xe^y y' y' + xe^y y'' + y''e^x + y'e^x + y'e^x + ye^x = 0$.

Получим из а):

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}. \tag{6.18}$$

Из б):

$$y'' = -\frac{2e^y y' + 2e^x y' + xe^y y'^2 + ye^x}{xe^y + e^x}. \tag{6.19}$$

Если в (6.19) вместо y' подставить его выражение (6.18), то получим выражение y'' только через x и y. Чтобы найти $y'(0)$ и $y''(0)$, поступим следующим образом.

Подставим в данное уравнение значение $x = 0$ и найдем соответствующее значение y:

$$0 \cdot e^y + ye^0 = 2, \ y(0) = 2.$$

Подставляя $x = 0$ и $y = 2$ в (6.18), найдем искомое значение $y'(0)$:

$$y'(0) = -\frac{e^2 + 2e^0}{0 \cdot e^2 + e^0} = -e^2 - 2.$$

Подставляя $x = 0$, $y = 2$ и $y' = -e^2 - 2$ в (6.19), найдем искомое значение $y''(0)$:

$$y''(0) = -\left(2e^2(-e^2 - 2) + 2(-e^2 - 2) + 2\right) = 2e^4 + 6e^2 + 2. \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти частные производные неявной функции

$$z = z(x, y),\ (x, y) \in X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y^2\right\},$$

заданной уравнением

$$x^2y - y^2z + zx = 0. \tag{6.20}$$

◀1. Неявное задание функции легко преобразуется к явному

$$z = \frac{x^2y}{y^2 - x},$$

и вопрос о существовании и дифференцируемости функции становится ясным без проверки условий теоремы 6.1. Частные производные могут быть вычислены по обычному правилу дифференцирования дроби:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y^2 - x)2xy - x^2y(-1)}{(y^2 - x)^2} = \frac{xy(2y^2 - x)}{(y^2 - x)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(y^2 - x)x^2 - x^2y2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{x^2(x + y^2)}{(y^2 - x)^2}.$$

2. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ можно найти по формулам дифференцирования неявной функции. Пусть $F(x, y, z) = x^2y - y^2z + zx$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xy + z}{-y^2 + x} = \frac{2xy + z}{y^2 - x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2 - 2yz}{-y^2 + x} = \frac{x^2 - 2yz}{y^2 - x}.$$

3. Можно, наконец, найти частные производные непосредственным дифференцированием равентсва (6.20) по x и по y.

Дифференцируя по x, считаем y постоянной, а z функцией от x и y:

$$2xy - y^2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy + z}{y^2 - x}.$$

При дифференцировании по y считаем x постоянной:

$$x^2 - 2yz - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 2yz}{y^2 - x}.$$

Ответы в решениях 2) и 3) совпадают. Если в них подставить значение

$$z = \frac{x^2 y}{y^2 - x},$$

то получим совпадение и с решением 1) (предлагаем убедиться в этом самостоятельно).►

Задание 4. Найти частные производные первого и второго порядка неявной функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, заданной уравнением:

$$z^2 x - x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0 \tag{6.21}$$

в точке $(0, 1)$.

◀Находим значение функции z в точке $(0,1)$:

$$z\cdot 0-0\cdot 1+1\cdot z-2\cdot 0-1=0,\ z=1.$$

Будем дифференцировать по x и по y равенство (6.21), рассматривая его как тождество (т. е. понимая под z неявную функцию двух переменных, определенную этим уравнением).

Дифференцируем (6.21) по x:

$$z^2+2z\cdot z'_x\cdot x-2xy+y^2\cdot z'_x+2=0. \tag{6.22}$$

Теперь дифференцируем равенство (6.22) по x:

$$2z\cdot z'_x+2\cdot z'^{\,2}_x\cdot x+2z\cdot z''_{x^2}\cdot x+2z\cdot z'_x-2y+y^2z''_{x^2}=0. \tag{6.23}$$

Дифференцируем равенство (6.21) по y:

$$2zx\cdot z'_y-x^2+2yz+y^2\cdot z'_y-1=0. \tag{6.24}$$

Дифференцируем равенство (6.24) по y:

$$2xz'^{\,2}_y+2zxz''_{y^2}+2z+2yz'_y+2yz'_y+y^2z''_{y^2}=0. \tag{6.25}$$

Дифференцируем равенство (6.22) по y:

$$2z\cdot z'_y+2z'_yz'_x\cdot x+2z\cdot z''_{xy}x-2x+2yz'_x+y^2z''_{xy}=0. \tag{6.26}$$

Подставляя в (6.22) значения $x=0$, $y=z=1$, получим:

$$1+2\cdot 1\cdot z'_x\cdot 0-2\cdot 0\cdot y+1\cdot z'_x+2=0,$$

откуда $z'_x=-3$.

Подставляя в (6.23) значения $x = 0$, $y = z = 1$, $z'_x = -3$, получим:

$$2 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 \cdot 0 + 2 \cdot z''_{x^2} \cdot 0 + 2(-3) - 2 + z''_{x^2} = 0, \quad z''_{x^2} = 14.$$

Подставляя в (6.24) значения $x = 0$, $y = z = 1$, найдем z'_y:

$$2 \cdot 0 \cdot z'_y - 0 + 2 + z'_y - 1 = 0, \ z'_y = -1.$$

Подставляя в (6.25) значения $x = 0$, $y = z = 1$, $z'_y = -1$, найдем z''_{y^2}:

$$z \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot z''_{y^2} + 2 + 4 \cdot (-1) + z''_{y^2} = 0, \ z''_{y^2} = 2.$$

Наконец, подставляя в (6.26) значения$x = 0$, $y = z = 1$, $z'_x = -3$, $z'_y = -1$, получим искомое значение производной

$$2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot 0 + 2z''_{xy} \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2(-3) + z''_{xy} = 0, \ z''_{xy} = 8. \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти полный дифференциал неявной функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

◀Рассматривая это уравнение как тождество, берем полный дифференциал от левой и правой частей. Получим:

$$3z^2dz + 6xydx + 3x^2dy + zdx + xdz + 2yz^2dy + 2y^2zdz + dy - 2dx = 0,$$

или

$$(6xy + z - 2)dx + (3x^2 + 2yz^2 + 1)dy + (3z^2 + x + 2y^2z)dz = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно dz, будем иметь

$$dz = \frac{2 - 6xy - z}{3z^2 + x + 2y^2z}dx - \frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}dy.$$

Дроби, стоящие при dx и dy, являются частными производными, соответственно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. ►

Задание 6. Найти полные дифференциалы первого и второго порядка неявной функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{8} = 1.$$

◀Находим сначала полный дифференциал первого порядка, действуя как и в предыдущем задании:

$$xdx + \frac{y}{3}dy + \frac{z}{4}dz = 0.$$

Отсюда

$$dz = -\frac{4x}{z}dx - \frac{4y}{3z}dy. \tag{6.27}$$

Находим снова полный дифференциал от левой и правой частей, имея в виду, что dx и dy – постоянные, а dz – полный дифференциал функции. Имеем:

$$d^2z = -4\frac{zdx - xdz}{z^2}dx - \frac{4}{3}\frac{zdy - ydz}{z^2}dy$$

или

$$d^2z = -4\left(\frac{1}{z}dx^2 - \frac{x}{z^2}dxdz + \frac{1}{3z}dy^2 - \frac{y}{3z^2}dydz\right). \tag{6.28}$$

Чтобы получить выражение d^2z только через x, y, z, dx и dy, достаточно в (6.28) подставить значение dz из (6.27). Предлагаем выполнить это самостоятельно.▶

Задание 7. Функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, определены системой уравнений

$$\begin{cases} xy + uv = 1, \\ xv - yu = 3. \end{cases}$$

Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка, если при $x = 1$ и $y = -1$ функции u и v принимают значения $u = 1$, $v = 2$.

◄ Дифференцируем данную систему дважды:

$$\begin{cases} ydx + xdy + udv + vdu = 0, \\ xdv + vdx - ydu - udy = 0, \end{cases} \tag{6.29}$$

$$\begin{cases} 2dxdy + 2dudv + ud^2v + vd^2u = 0, \\ 2dxdv - 2dudy + xd^2v - yd^2u = 0. \end{cases} \tag{6.30}$$

Подставляя в (6.29) значения $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$ и $v = 2$, получим:

$$\begin{cases} -dx + dy + dv + 2du = 0, \\ 2dx - dy + dv + du = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} du = 3dx - 2dy, \\ dv = -5dx + 3dy. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2, \ \frac{\partial v}{\partial x} = -5, \ \frac{\partial v}{\partial y} = 3.$$

Подставляя в (6.30) значения $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$, $v = 2$, а также полученные выражения для du и dv, будем иметь:

$$d^2v + 2d^2u = -2dxdy - 2(3dx - 2dy)(3dy - 5dx),$$
$$d^2v + d^2u = 2dy(3dx - 2dy) - 2dx(3dy - 5dx).$$

Отсюда

$$d^2u = 4(5dx^2 - 10dxdy + 4dy^2),$$
$$d^2v = 10(-dx^2 + 4dxdy - 2dy^2).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 20, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -20, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -10, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 20, \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -20. \ ►$$

Задание 8. Найти частные производные первого порядка функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, заданной неявно уравнением

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2, \tag{6.31}$$

предварительно найдя ее первый дифференциал.

◀Обозначим

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz.$$

Тогда

$$dF = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(xyz) = 2xdx + 2ydy + 2zdz - yzdx - xzdy - xydz.$$

С другой стороны $F(x, y, z) = 0$, поэтому $dF = 0$. Получили уравнение

$$2xdx + 2ydy + 2zdz - yzdx - xzdy - xydz = 0. \tag{6.32}$$

Решаем уравнение (6.32) относительно dz. Получим

$$dz = \frac{2x - yz}{xy - 2z}dx + \frac{2y - xz}{xy - 2z}dy. \tag{6.33}$$

Знаем, что

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{6.34}$$

Из (6.33) и (6.34) следует, что $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-xz}{xy-2z}$ и $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x-yz}{xy-2z}$.

Можно было указанные частные производные найти по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x - yz}{2z - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y - xz}{2z - xy}. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти первые и вторые производные функций $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, заданных неявно уравнениями:

   1.1 $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$;

   1.2 $e^y + axe^{-y} - 2bx = 0$;

   1.3 $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

   1.4 $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$;

   1.5 $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

2. Найти частные производные и полные дифференциалы функций $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, заданных неявно уравнениями:

   2.1 $z + 3xz = 2xy$;

   2.2 $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$;

   2.3 $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$;

   2.4 $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$;

   2.5 $z\ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$;

   2.6 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;

   2.7 $z^3 - 3xyz = a^3$;

   2.8 $\frac{x}{z} = \ln\frac{x}{y}$.

3. Найти y' и y'' для функции $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, определяемой уравнением $x^y = y^x$.

4. Найти y', y'' и y''' для функции $y = y(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, определяемой уравнением $x^2 + xy + y^2 = 0$.

5. Найти d^2z в точке $(1, 0)$ для функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, определяемой уравнением $xz^5 + y^3z - x^3 = 0$, если $z(1, 0) = 1$.

6. Найти d^2z в точке $(1, 2)$ для функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, определяемой уравнением $x - yz + e^z = 0$, если $z(1, 2) = 0$.

7. Функция $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, определена уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Найти d^2z в точке $(1, 1, 1)$.

8. Функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$, $x \in \mathbb{R}$, определяются системой уравнений

$$\begin{cases} 8x^2 - z^3 - 3y^4 = 0, \\ x^3 - z^2 + 5y = -3, \end{cases}$$

причем $y(1) = 0$, $z(1) = 2$. Найти $y'(1)$, $y''(1)$, $z'(1)$ и $z''(1)$.

9. Функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, определены системой уравнений

$$\begin{cases} xu + yv = 4, \\ yu - v = 0. \end{cases}$$

Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка, если $u(1, -1) = 2$, $v(1, -1) = -2$.

10. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 7
Экстремум функции многих переменных

7.1 Понятие экстремума функции многих переменных

Определение 7.1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$. *Точка* $x^{(0)}$ *называется* ***точкой локального максимума****, если*

$$\exists U_{x^{(0)}} \subset D \ \forall x \in U_{x^{(0)}} \ f(x) \leqslant f(x^{(0)}),$$

локального минимума*, если*

$$\exists U_{x^{(0)}} \subset D \ \forall x \in U_{x^{(0)}} \ f(x) \geqslant f(x^{(0)}),$$

строгого локального максимума*, если*

$$\exists U_{x^{(0)}} \subset D \ \forall x \in U^{\circ}_{x^{(0)}} \ f(x) < f(x^{(0)}),$$

строгого локального минимума*, если*

$$\exists U_{x^{(0)}} \subset D \ \forall x \in U^{\circ}_{x^{(0)}} \ f(x) > f(x^{(0)}).$$

Общее название для всех видов точек максимума и минимума – **точки экстремума**.

Значение функции в точке локального максимума (минимума) называют **локальным максимумом (минимумом)**, в точке строгого локального максимума (минимума) – **строгим локальным максимумом (минимумом)**. Общее название для всех видов максимума и минимума – **экстремумы**.

Пример 7.1. Очевидно (рисунок 7.1), что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & \text{если } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - 1, & \text{если } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

имеет локальный строгий максимум в точке $(0,0)$ и $f\,(0,0) = 1$. В точках окружности $x^2+y^2 = 1$ функция f принимает наименьшее значение $f\,(x,y) = 0$.

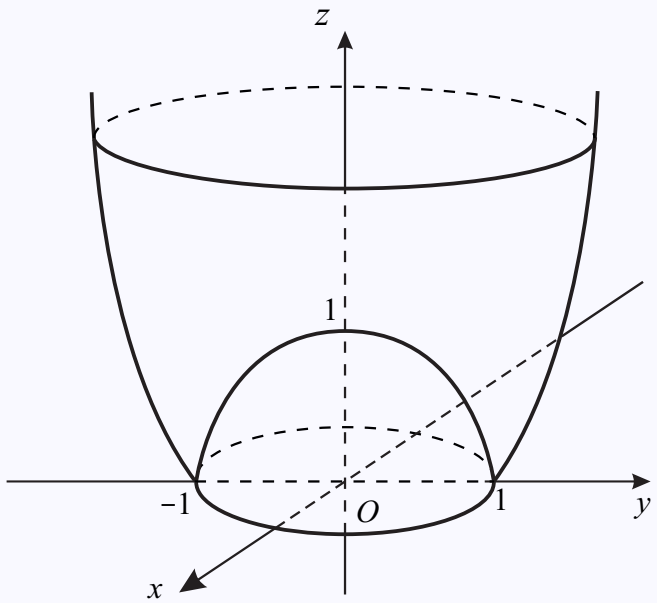


Рисунок 7.1

7.2 Необходимое условие локального экстремума

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 7.1. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$ локальный экстремум и частные производные первого порядка по всем переменным x_i $(i = \overline{1,n})$, то все эти частные производные в точке $x^{(0)}$ равны нулю.*

◀Возьмем произвольную переменную x_i функции f, а все остальные переменные зафиксируем, положив их, соответственно, равными $x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. В этом случае будем иметь функцию одной переменной x_i:

$$\mu(x_i) = f\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right), \ x_i \in \mathrm{Int} I, \ I \subset \mathbb{R}.$$

Производная функции μ в точке $x_i^{(0)}$ совпадает с частной производной $f'_{x_i}\left(x^{(0)}\right)$, но $\mu'\left(x_i^{(0)}\right) = 0$ (необходимое условие экстремума функции одной переменной), то есть $f'_{x_i}\left(x^{(0)}\right) = 0$.▶

Замечание 7.1. Необходимое условие локального экстремума функции в точке в общем случае не является достаточным. Это видно на примере функции двух переменных $f(x,y) = xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. В точке $(0,0)$ частные производные $f'_x(x,y) = y^2$ и $f'_y(x,y) = 2xy$ равны нулю, но в любой окрестности этой точки есть точки, в которых функция принимает положительные значения (точки первой и четвертой координатной плоскости), а также точки, где функция f принимает отрицательные значения (точки второй и третьей четвертей координатной плоскости). Значит, в точке $(0,0)$ функция f локального экстремума не имеет.

Если же хотя бы одна из частных производных первого порядка в некоторой точке не равна нулю, то в этой точке локального экстремума функция не имеет.

Пример 7.2. Доказать, что функция двух переменных

$$f(x,y) = xe^y, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

не имеет локальных экстремумов в $\mathbb{R}^2$ (области определения функции).

◀Находим частные производные первого порядка функции: $f'_x(x,y) = e^y$, $f'_y(x,y) = xe^y$. Очевидно, что

$$f'_x(x,y) = e^y \neq 0$$

для любых точек $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. То есть наша функция в $\mathbb{R}^2$ локального экстремума не имеет.▶

Определение 7.2. *Точки, в которых частные производные первого порядка функции f равны нулю или не существуют, называются* ***критическими точками*** *(****точками возможного экстремума или «подозрительными» на экстремум точками****). Причем критические точки, в которых все частные производные первого порядка функции равны нулю, называются* ***стационарными точками****.*

7.3 Квадратичные формы

При исследовании функции на экстремум мы будем использовать квадратичные формы. Напомним некоторые сведения из высшей алгебры. Если $\{a_{ik}\}_{ik=1}^{n}$ – матрица, где $a_{ik} \in \mathbb{R}$, то функция

$$Q : h \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} h_i h_k, \quad h \in \mathbb{R}^n, \tag{7.1}$$

называется **квадратичной формой** на $\mathbb{R}^n$.

Если $a_{ik} = a_{ki}$ для любых i $(k = \overline{1,n})$, то квадратичная форма называется **симметричной**.

Замечание 7.2. Правая часть (4.21) есть квадратичная форма относительно $dx_1, \ldots, dx_n$, причем при условии равенства смешанных производных второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$ эта форма будет симметричной.

Матрица $\{a_{ik}\}$ называется **матрицей квадратичной формы**. Главные миноры матрицы будем обозначать

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Квадратичная форма называется **положительно определенной**, если $Q(h) > 0$ для всех $h \neq \mathbb{O}$. Квадратичная форма называется **отрицательно определенной**, если $Q(h) < 0$ для всех $h \neq \mathbb{O}$. Объединяющий термин – **знакоопределенная форма**.

Критерий знакоопределенности дает следующая теорема, доказательство которой имеется в курсе алгебры, поэтому мы его не приводим.

Теорема 7.2 (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма Q является положительно определенной (отрицательно определенной) тогда и только тогда, когда $\Delta_i > 0$ ($(-1)^i\Delta_i > 0$), $i = \overline{1,n}$.*

Замечание 7.3. Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма $d^2f\left(x^{(0)}\right)$ будет положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ положительны.

Квадратичная форма $d^2f\left(x^{(0)}\right)$ относительно $dx_1, \ldots, dx_n$ будет отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы нечетного порядка отрицательны, а четного – положительны.

7.4 Достаточное условие локального экстремума

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 7.3. *Если функция $f : D \to \mathbb{R}$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathrm{Int}D$ и дважды дифференцируема в самой точке $x^{(0)}$, то функция f имеет в точке $x^{(0)}$ локальный минимум при $d^2f\left(x^{(0)}\right) > 0$ и локальный максимум при $d^2f\left(x^{(0)}\right) < 0$.*

◀Для функции f выполняются все условия теоремы 5.2 при $n = 2$. Тогда формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано примет вид

$$f(x) - f\left(x^{(0)}\right) = \frac{1}{2!}d^2f\left(x^{(0)}\right) + o\left(\left|x - x^{(0)}\right|^2\right). \tag{7.2}$$

По формуле (4.21)

$$d^2f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right)dx_i dx_j, \tag{7.3}$$

причем $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^{(0)}\right)$, то есть квадратичная форма (7.3) относительно $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ будет симметричной.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в некоторой проколотой окрестности $U^{\circ}_{x^{(0)}}$ правая часть (7.2) положительна или отрицательна.

Введем обозначения:

$$\rho = \left|x - x^{(0)}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^{(0)}\right)^2},$$

$$h_i = \frac{x_i - x_i^{(0)}}{\rho},\ i = \overline{1,n},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^{(0)}\right) = a_{ij}.$$

Тогда $|h_i| \leqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 = 1$. Формула (7.2) примет вид

$$f(x) - f\left(x^{(0)}\right) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j + o\left(\rho^2\right). \tag{7.4}$$

Отношение $\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}$ есть бесконечно малая при $\rho \to +0$. Обозначим ее через $\alpha(\rho)$ и представим равенство (7.4) в виде:

$$f(x) - f\left(x^{(0)}\right) = \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho)\right). \tag{7.5}$$

Функция $Q : h \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ определена и непрерывна на единичной сфере, то есть на ограниченном замкнутом множестве. По теореме Вейерштрасса она достигает на этой сфере своего наименьшего значения, которое будет положительным (из-за положительности $d^2 f\left(x^{(0)}\right)$, а значит, и положительности

указанной квадратичной формы). По этой причине вся правая часть равенства (7.5) при достаточно малых $\rho \to +0$ (в некоторой проколотой окрестности $U^{\circ}_{x^{(0)}}$) будет строго положительной. А это означает, что $x^{(0)}$ – точка локального минимума.

Аналогично доказывается, что при $d^2 f\left(x^{(0)}\right) < 0$ точка $x^{(0)}$ будет точкой локального максимума.▶

Замечание 7.4. Если указанный выше второй дифференциал есть знакопеременная квадратичная форма, то функция f не имеет в точке $x^{(0)}$ локального экстремума (покажите самостоятельно).

Далее отдельно рассмотрим случай функции двух переменных.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int} D$. Введем обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \; a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \; a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Теорема 7.4 (достаточное условие экстремума функции двух переменных). *Пусть функция f в некоторой окрестности $U_{(x_0,y_0)} \subset D$ имеет частные производные до второго порядка включительно, а в самой точке (x_0, y_0) частные производные первого порядка равны нулю, а второго порядка – непрерывны. Тогда:*

1) *если $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то функция f в точке (x_0, y_0) имеет локальный экстремум, причем при $a_{11} > 0$ – минимум, а при $a_{11} < 0$ – максимум;*

2) *если $\Delta < 0$, то в точке (x_0, y_0) функция f не имеет экстремума;*

3) *если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования для ответа на вопрос о наличии в точке (x_0, y_0) экстремума.*

◀Для функции f выполняется условие теоремы 7.3. Тогда будет справедливо и заключение теоремы. Поясним это подробнее.

$$d^2 f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\, dxdy +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(dy)^2 = a_{11}(dx)^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}(dy)^2 = \left[\begin{cases} a_{11}\neq 0 \\ a_{22}\neq 0 \end{cases}\right] = \tag{7.6}$$

$$= a_{11}\left(\left(dx+\frac{a_{12}}{a_{11}}dy\right)^2 + \frac{\Delta}{a_{11}^2}(dy)^2\right).$$

Если $\Delta > 0$, квадратичная форма (дифференциал $d^2 f(x_0,y_0)$) определенная (принимает значения одного лишь знака, причем такие, как и a_{11}). В этом случае дифференциал $d^2 f(x_0,y_0)$ будет принимать положительные значения при $a_{11} > 0$ и отрицательные при $a_{11} < 0$. Теорема доказана для $\Delta > 0$.

Справедливость заключения теоремы при $\Delta < 0$ следует из замечания 7.4.

Необходимость дополнительных исследований для ответа на вопрос о наличии в точке (x_0,y_0) экстремума в случае $\Delta = 0$ следует из приведенных ниже примеров.►

Пример 7.3. Функция $f(x,y) = x^4+y^4$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, имеет в точке $(0,0)$ минимум (локальный, совпадающий с наименьшим значением функции в $\mathbb{R}^2$). Но при этом $f'_x(x,y) = 4x^3$, $f''_{x^2}(x,y) = 12x^2\Big|_{x=0} = 0 = a_{11}$, аналогично $a_{22} = a_{12} = 0$, то есть $\Delta = 0$.

Пример 7.4. Функция $f(x,y) = x^3+y^3$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, в точке $(0,0)$ не имеет экстремума, так как в любой окрестности этой точки функция принимает как положительные значения, так и отрицательные. В то же время $\Delta = 0$ (покажите самостоятельно).

Пример 7.5. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 216x, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

◄Вначале найдем критические точки функции.

$$f'_x(x,y) = 6x^2+y^2-216;\ f'_y(x,y) = 2xy;\ \begin{cases} 2xy = 0, \\ 6x^2+y^2-216 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ y=0, \end{array}\right. \\ 6x^2+y^2-216=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ 6x^2+y^2-216=0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=0, \\ 6x^2+y^2-216=0. \end{cases}$$

Решая последние две системы, находим критические точки:

$$\left(0, 6\sqrt{6}\right);\ \left(0, -6\sqrt{6}\right);\ (6,0);\ (-6,0).$$

Покажите самостоятельно, вычислив

$$a_{11}=f''_{x^2}(x,y),\ a_{12}=f''_{xy}(x,y),\ a_{22}=f''_{y^2}(x,y) \text{ и } \Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

в указанных точках и учитывая заключение теоремы 7.4, что в точках $\left(0, 6\sqrt{6}\right)$ и $\left(0, -6\sqrt{6}\right)$ экстремума функция не имеет, в точке $(6,0)$ – минимум, причем $f(6,0)=-4\cdot 6^3$, а в точке $(-6,0)$ – максимум, причем $f(-6,0)=8\cdot 6^3$.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения точки локального максимума (локального минимума), строгого локального максимума (локального минимума), функции многих переменных.
2. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции многих переменных.
3. Дайте определения положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы.
4. Сформулируйте критерий Сильвестра.
5. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции многих переменных.
6. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции двух переменных.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

Экстремумы функции многих переменных

Задание 1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

◀Находим стационарные точки, то есть точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума. Для этого вычисляем частные производные, приравниваем их к нулю и решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 2x + y - 2, \\ z'_y = x + 2y - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решением является $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – искомая стационарная точка.
Проверим выполнение достаточных условий экстремума:

$$a_{11} = z''_{x^2} = 2, \quad a_{22} = z''_{xy} = 1, \quad a_{12} = z''_{y^2} = 2.$$

Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ и $a_{11} > 0$, то в точке $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ данная функция имеет минимум.▶

Задание 2. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y),$$

$$(x, y) \in X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}.\right\}$$

◀Находим стационарные точки функции f:

$$f'_x = \cos x - \sin(x + y), \quad f'_y = \cos y - \sin(x + y).$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0, \\ \cos y - \sin(x+y) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы получаем, что $\cos x = \cos y$, и так как $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то либо $y = x$, либо $y = 2\pi - x$.

Если $y = x$, то из первого уравнения получаем $\cos x - \sin 2x = 0$, т. е. $\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$. Отсюда либо $x_1 = y_1 = \frac{\pi}{6}$, либо $x_2 = y_2 = \frac{\pi}{2}$, либо $x_3 = y_3 = \frac{3}{2}\pi$. Точно так же, если $y = 2\pi - x$, получаем, что $\cos x = 0$ и либо $x_4 = \frac{\pi}{2}$, $y_4 = \frac{3}{2}\pi$, либо $x_5 = \frac{3}{2}\pi$, $y_5 = \frac{\pi}{2}$. Всего имеем в заданной области 5 стационарных точек:

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right).$$

Проверим выполнение достаточных условий экстремума в каждой точке:

$$f''_{x^2} = -\sin x - \cos(x+y),\ f''_{xy} = -\cos(x+y),\ f''_{y^2} = -\sin y - \cos(x+y).$$

Для точки $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ имеем:

$$a_{11} = f''_{x^2}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1,\ a_{22} = f''_{xy}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$a_{12} = f''_{y^2}\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{3}{4} > 0$ и $a_{11} < 0$, то в точке $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ – максимум. Значение функции в этой точке $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Для точки $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имеем:

$$a_{11} = f''_{x^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0,\ a_{22} = f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1,\ a_{12} = f''_{y^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0.$$

Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$, то экстремума в этой точке нет.
Исследуем точку $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$:

$$a_{11} = f''_{x^2}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2,\ a_{22} = f''_{xy}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = 1,\ a_{12} = f''_{y^2}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2.$$

Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$ и $a_{11} > 0$, то в точке $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ – минимум.
В точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ имеем:

$$f''_{x^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = -2,\ f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = -1,\ f''_{y^2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = 0.$$

Так как $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0$, то в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ экстремума нет.
В точке $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ также нет экстремума, так как

$$f''_{x^2}\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad f''_{xy}\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right) = -1,\quad f''_{y^2}\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right) = -2 \text{ и } a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -1 < 0. \blacktriangleright$$

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

◀Найдем частные производные функции и приравняем их нулю:

$$f'_x = 2(y - x) \cdot (-1) = 2(x - y),\ f'_y = 2(y - x) + 3(y + 2)^2.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2(y - x) + 3(y + 2)^2 = 0 \end{cases}$$

получаем, что точка $(-2,-2)$ является стационарной.

Проверим достаточные условия экстремума в этой точке:

$$f''_{x^2}=2,\ a_{11}=2,\quad f''_{xy}=-2,\ a_{22}=-2,\quad f''_{y^2}=2+6(y+2),\ a_{12}=2,\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

В этом случае для выяснения вопроса об экстремуме функции нужно исследование продолжить. Поскольку $f(-2,-2)=0$, то достаточно исследовать знак функции в некоторой окрестности точки $(-2,-2)$.

Исследуем знак функции вдоль какой-нибудь прямой, проходящей через точку $(-2,-2)$. Поскольку в выражении функции имеется слагаемое $(y-x)^2$, то естественно взять прямую $y=x$, так как на ней первое слагаемое равно нулю и знак функции зависит только от знака второго слагаемого $(y+2)^3$. Очевидно, если $y<-2$, то $(y+2)^3<0$; если $y>-2$, то $(y+2)^3>0$.

Следовательно, в любой окрестности точки $(-2,-2)$ есть как положительные, так и отрицательные значения функции. В точке $(-2,-2)$ экстремума нет.►

Задание 4. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

◄Вначале найдем критические точки функции:

$$\begin{cases} f'_x=2x-2y=0,\\ f'_y=-2x+8y+6z=0,\\ f'_z=12z+6y-6=0. \end{cases} \tag{7.7}$$

Система (7.7) равносильна системам

$$\begin{cases} x=y,\\ -x+4y+3z=0,\\ 2z+y-1=0, \end{cases}\quad \begin{cases} x=y,\\ y=-z,\\ z=1, \end{cases}\quad \begin{cases} x=-1,\\ y=-1,\\ z=1. \end{cases}$$

Точка $(-1,-1,1)$ – критическая точка. Дальше воспользуемся достаточным условием строгого экстремума (теорема 7.3).

$$f''_{x^2}(-1,-1,1)=2;\quad f''_{y^2}(-1,-1,1)=8;\quad f''_{z^2}(-1,-1,1)=12;$$

$$f''_{xy}(-1,-1,1)=f''_{yx}(-1,-1,1)=-2;$$

$$f''_{xz}(-1,-1,1)=f''_{zx}(-1,-1,1)=0;\quad f''_{yz}(-1,-1,1)=f''_{zy}(-1,-1,1)=6.$$

Для определения знака $d^2f(-1,-1,1)$ воспользуемся критерием Сильвестра 7.2. Составляем матрицу квадратичной формы $d^2f(-1,-1,1)$ относительно независимых дифференциалов dx, dy, dz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Находим главные миноры.

$$2>0;\left|\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{array}\right| = 16-4=12>0;$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{array}\right| = 2\left|\begin{array}{cc} 8 & 6 \\ 6 & 12 \end{array}\right| + 2\left|\begin{array}{cc} -2 & 6 \\ 0 & 12 \end{array}\right| =$$

$$= 2\,(96-36)+2\,(-24-0)=120-48=72>0.$$

Значит, $d^2f(-1,-1,1)>0$ и точка $(-1,-1,1)$ – точка строгого минимума.

$$f_{\min}\,(-1,-1,1)=-3.\ \blacktriangleright$$

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию

$$f\,(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z},\ (x,y,z)\in X=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0\right\}.$$

◀Находим критические точки функции:

$$\begin{cases} f'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \\ f'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \\ f'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0, \end{cases} \begin{cases} 4x^2 = y^2, \\ y^3 = 2xz^2, \\ 2z^3 = 2y, \end{cases} \begin{cases} 2x = \frac{y^3}{z^2}, \\ \frac{y^6}{z^4} = y^2, \\ y = z^3, \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = z, \\ y = -z, \end{array} \right. \\ y = z^3, \\ 2x = \frac{y^3}{z^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z, \\ z = z^3, \\ 2x = \frac{y^3}{z^2}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = -z, \\ -z = z^3, \\ 2x = \frac{y^3}{z^2}. \end{cases}$$

Последняя система решений не имеет, потому что не имеет решений уравнение $z^2 = -1$. Предпоследняя система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} z = 1, \\ y = 1, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = -1, \\ y = -1, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Имеем две критические точки: $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ или $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$.

Рассмотрим критическую точку $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ и воспользуемся достаточным условием строгого экстремума (теорема 7.3).

$$f''_{x^2} = -\frac{y^2}{4}\left(-2x^{-3}\right) = \frac{y^2}{2x^3}; \quad f''_{y^2} = \frac{1}{2x} - z^2\left(-2y^{-3}\right) = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3};$$

$$f''_{z^2} = \frac{2}{y} - 2\left(-2z^{-3}\right) = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}; \quad f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2}; \; f''_{xz} = 0; \; f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2}.$$

$$f''_{x^2}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4; \; f''_{y^2}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 3; \; f''_{z^2}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 6; \; f''_{xy}\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = -2;$$

$$f''_{xz}\left(\frac{1}{2},1,1\right)=0;\ f''_{yz}\left(\frac{1}{2},1,1\right)=-2.$$

Составляем матрицу квадратичной формы $d^2f\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ относительно независимых дифференциалов dx,dy,dz:

$$\begin{bmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&6\end{bmatrix}.$$

Находим ее главные миноры:

$$4>0;\quad \begin{vmatrix}4&-2\\-2&3\end{vmatrix}=12-4=8>0;$$

$$\begin{vmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&6\end{vmatrix}=4\,(18-4)+2\,(-12-0)=4\cdot 14-24=56-24=32>0.$$

Значит, $d^2f\left(\frac{1}{2},1,1\right)>0$ и точка $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ – точка минимума функции f.

$$f\left(\frac{1}{2},1,1\right)=4.$$

Проведем исследования для критической точки $\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)$.

$$f''_{x^2}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=-4;\quad f''_{y^2}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=-3;\quad f''_{z^2}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=-6;$$

$$f''_{xy}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=2;\quad f''_{xz}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=0;\quad f''_{yz}\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=2.$$

Составляем матрицу квадратной формы $d^2 f\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ относительно независимых дифференциалов dx, dy, dz:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Находим главные миноры записанной матрицы:

$$-4 < 0; \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0;$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(18 - 4) - 2(-12) = -4 \cdot 14 + 24 = -56 + 24 = -32 < 0.$$

Значит, $d^2 f\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right) < 0$ и точка $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ – точка максимума функции. $f\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right) = -4$. ▶

Задание 6. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

◀Найдем критические точки функции f:

$$\begin{cases} f'_x = y + z = 0, \\ f'_y = x + z = 0, \\ f'_z = x + y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y, \\ 2y = 0, \\ z = -y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Точка $(0, 0, 0)$ – критическая точка. Находим частные производные второго порядка функции f в критической точке.

$$f''_{x^2}(0,0,0)=0,\quad f''_{y^2}(0,0,0)=0,\quad f''_{z^2}(0,0,0)=0,\quad f''_{xy}(0,0,0)=f''_{yx}(0,0,0)=1,$$
$$f''_{xz}(0,0,0)=f''_{zx}(0,0,0)=1,\quad f''_{yz}(0,0,0)=f''_{zy}(0,0,0)=1.$$

Составляем матрицу квадратичной формы $d^2f(0,0,0)$ относительно независимых дифференциалов dx, dy, dz:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что первый главный минор $\Delta_1 = 0$, поэтому применить критерий Сильвестра нельзя. Но видно, что в любой окрестности точки $(0,0,0)$ функция f принимает как отрицательные, так и положительные значения. Например, $f(x,0,z) < 0$ при $x > 0$ и $z < 0$, но $f(x,0,z) > 0$ при $x > 0$ и $z > 0$. Значит, в точке $(0,0,0)$ экстремума нет.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать на экстремум функции $z = z(x,y)$, $(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$:

1.1 $z = x^3y^2(6-x-y)$;
1.2 $z = xy(1-x-y)$;
1.3 $z = x^3+y^3-9xy+27$;
1.4 $z = x^3+y^3-3axy$;
1.5 $z = x^3+xy^2+3axy$;
1.6 $z = x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y$;
1.7 $z = 2x^2+6xy+5y^2-x+4y-5$;
1.8 $z = x^2+xy+y^2-mx-ny$;
1.9 $z = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$;
1.10 $z = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$;
1.11 $z = x^2+xy+y^2+\frac{a^5}{x}+\frac{a^3}{y}$;
1.12 $z = x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$;
1.13 $z = xy\ln(x^2+y^2)$;
1.14 $z = x\cdot e^{y+x\sin y}$;
1.15 $z = x^2-2xy+y^4-y^5$;
1.16 $z = 2+(x-y)^2+(y-1)^4$;
1.17 $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$.

2. Исследовать на экстремум функции $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in X \subset \mathbb{R}^3$:

   2.1 $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

   2.2 $u = e^{x-y}(x^2 - 2y^2) + 2z - z^2$;

   2.3 $u = \frac{1+x-y}{1+x^2+y^2} + z - \frac{1}{2}z^2$;

   2.4 $u = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10$;

   2.5 $u = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 4$.

3. Исследовать на экстремум функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, заданные неявно уравнениями:

   3.1 $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0$;

   3.2 $x^2 + y^2 + 4xz + 4 + \frac{z^2+z}{2} = 0$;

   3.3 $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$;

   3.4 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

4. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 8
Условный экстремум функции многих переменных

8.1 Условный экстремум. Сведение условного экстремума к безусловному

Ранее нами были рассмотрены вопросы нахождения локальных экстремумов функции, аргументы которой не связаны никакими дополнительными условиями. Вместе с тем в математике и ее приложениях приходится находить экстремумы функций, аргументы которых подчинены дополнительным условиям связи. Такие экстремумы называют **условными** или **относительными**.

Рассмотрим пример задачи об отыскании условного экстремума. Пусть требуется найти экстремум функции $f(x,y) = x^2+y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, при условии, что аргументы этой функции удовлетворяют условию связи $x+y-1=0$. Таким образом, экстремумы функции f ищутся не на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, а лишь на прямой $x+y-1=0$.

Для решения рассмотренной задачи подставим в выражение для $f(x,y) = x^2+y^2$ значение y, определяемое из условия связи $x+y-1=0$. Таким путем мы сведем задачу к задаче об отыскании безусловного экстремума функции одной переменной

$$g(x) = 2x^2 - 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Последний экстремум находится без труда: $f'(x) = 4x-2$, $f'(x)=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ – точка минимума, $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ (рисунок 8.1).

Таким образом, функция f с условием связи $x+y-1=0$ имеет условный минимум $\frac{1}{2}$ в точке $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Отметим, что безусловный минимум функции f достигается в точке $(0,0)$ и равен нулю.

Теперь перейдем к общей постановке задачи об отыскании условного экстремума.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Далее будем использовать обозначение:

$$(x,y) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}.$$

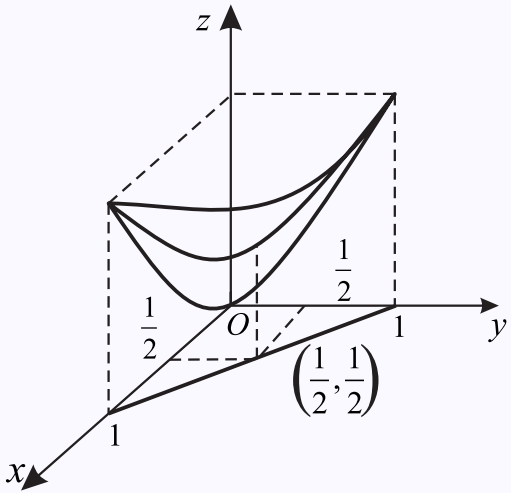


Рисунок 8.1

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f : G \to \mathbb{R}$. Требуется найти экстремум функции f при наличии m **условий связи**

$$\begin{cases} F_1(x,y) = 0, \\ F_2(x,y) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_m(x,y) = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

где функции $F_k : G \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in G$, а якобиан

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0. \tag{8.2}$$

Будем говорить, что функция f при наличии условий связи (8.1) имеет **условный максимум (минимум)** в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, координаты которой удовлетворяют условиям связи (8.1), если найдется окрестность точки $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, для точек которой значение $f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ будет наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках, координаты которых удовлетворяют условиям связи (8.1).

В силу теоремы 6.2 найдется такая окрестность $U_{x^{(0)}}$, что в пределах этой окрестности определены m дифференцируемых функций

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = \varphi_m(x), \end{cases} \quad x \in U_{x^{(0)}}, \tag{8.3}$$

являющихся единственным решением системы уравнений (8.1). Подставляя найденные функции (8.3) в равенство $f = f(x, y)$, мы сведем вопрос о существовании условного экстремума в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ у функции f при наличии связей (8.1) к вопросу о существовании безусловного экстремума в точке $x^{(0)}$ у сложной функции

$$\Phi(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)\right), \quad x \in U_{x^{(0)}}. \tag{8.4}$$

Теперь постараемся, не прибегая к решению системы (8.1), установить по крайней мере необходимые условия существования условного экстремума в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Пусть функция f дифференцируема в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ и имеет в этой точке условный экстремум при наличии связей (8.1) или (что то же самое) функция (8.4) имеет в точке $x^{(0)}$ безусловный экстремум. Необходимым условием безусловного экстремума функции Φ в точке $x^{(0)}$ является равенство нулю в этой точке дифференциала функции:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0, \tag{8.5}$$

тождественное относительно $dx_1, \ldots, dx_n$. В силу инвариантности формы первого дифференциала и равенства (8.4) равенство (8.5) можно переписать в виде (все частные производные берутся в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m} dy_m = 0. \tag{8.6}$$

В равенстве (8.6) $dy_1, \ldots, dy_n$ представляют собой дифференциалы функций (8.3), так что равенство (8.6) не является тождеством относительно $dy_1, \ldots, dy_n$. Предположим, что в уравнения связи (8.1) мы подставили функции (8.3), являющиеся решением системы (8.1). При этом уравнения (8.1) обратятся в тождества. Дифференцируя указанные тождества, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0. \end{cases} \tag{8.7}$$

Так как якобиан (8.2), по предположению, отличен от нуля в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$, то из системы (8.7) $dy_1, \ldots, dy_m$ могут быть выражены как линейные функции $dx_1, \ldots, dx_n$. Если найти эти выражения и подставить их в (8.6), то, собирая в полученном равенстве члены, содержащие $dx_1, \ldots, dx_n$, получим:

$$A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n = 0, \tag{8.8}$$

где через $A_1, \ldots, A_n$ обозначены некоторые рациональные функции частных производных функций f, $F_1, \ldots, F_m$ в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$. Так как в равенстве (8.8) фигурируют лишь дифференциалы независимых переменных, то из этого равенства заключаем, что $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$. Присоединяя к указанным равенствам m условий связи (8.1), мы получим **необходимые условия существования условного экстремума** функции f при наличии связей (8.1) в виде

$$A_1 = 0, \ldots, A_n = 0, F_1 = 0, \ldots, F_m = 0. \tag{8.9}$$

Равенства (8.9) представляют собой систему $m + n$ уравнений для определения $m + n$ координат точки возможного экстремума.

8.2 Метод неопределенных множителей Лагранжа

При рассмотрении необходимого условия существования условного экстремума функции в точке переменные x_i $(i = \overline{1,n})$ были независимыми переменными, а переменные y_k $(k = \overline{1,m})$ – зависимые переменные (функции переменных x_i). Часто это приводит к усложненным выкладкам. Ж. Л. Лагранж предложил метод, при котором не нарушается форма второго дифференциала функции, если ее аргументами будут как независимые переменные x_i, так и зависимые y_k.

Умножим равенства (8.7), соответственно, на произвольные (пока неопределенные) постоянные множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Полученные после умножения равенства сложим почленно с равенством (8.6). В результате получим равенство:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} dy_m = 0, \tag{8.10}$$

$$\Psi = f + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m. \tag{8.11}$$

Функцию Ψ в дальнейшем будем называть **функцией Лагранжа**. Считая, что для функций (8.1) выполнены условия, сформулированные в предыдущем пункте, и что функция f дифференцируема в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in G$, выберем множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0. \tag{8.12}$$

Это заведомо можно сделать, ибо равенства (8.12) приводят к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0, \end{cases}$$

определитель которой (якобиан (8.2)) отличен от нуля.

В силу равенств (8.12) равенство (8.10) принимает вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0. \tag{8.13}$$

Поскольку при сделанных выше предположениях переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются независимыми, то из равенства (8.13) заключаем, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \tag{8.14}$$

Присоединяя к уравнениям (8.12) и (8.14) условия связи (8.1), мы получим систему $n + 2m$ уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0, \\ F_1 = 0, \ldots, F_m = 0, \end{cases} \tag{8.15}$$

для определения $n + m$ координат точек возможного условного экстремума и m множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

На практике при реализации метода Лагранжа поступают следующим образом. Составляют функцию Лагранжа (8.11) и для этой функции находят точки возможного безусловного экстремума. Для исключения множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ используют условия связи (8.1).

8.3 Достаточный признак условного экстремума

Выше нами рассмотрены необходимые условия экстремума. Далее рассмотрим один из путей дополнительного исследования точек возможного условного экстремума. Предположим, что в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ выполнены необходимые условия экстремума (8.15). Кроме того, дополнительно потребуем двукратной дифференцируемости функций f и (8.1) в окрестности точки $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ и непрерывности всех частных производных второго порядка в самой точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$. Из конструкции функции Лагранжа (8.11) очевидно, что при наличии связей (8.1) экстремумы функции f и функции Лагранжа совпадают (при наличии связей (8.1) разность $f(x, y) - f\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ совпадает с разностью $\Psi(x, y) - \Psi\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$). Но тогда для получения достаточного условия экстремума в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ у функции f при наличии связей (8.1)

следует присоединить к условиям (8.15) требование знакоопределенности в этой точке $d^2\Psi$. При этом точка $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ будет точкой минимума, если при наличии связей (8.1) $d^2\Psi(\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)) > 0$, и точкой максимума, если $d^2\Psi(\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)) < 0$.

Отметим, что дифференциал второго порядка $d^2\Psi$ в точке возможного экстремума можно вычислять, считая все переменные $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ независимыми. В самом деле, в общем случае $d^2\Psi$ не обладает свойством инвариантности формы и должен был бы с учетом зависимости $y_1, \ldots, y_m$ от $x_1, \ldots, x_n$ определяться равенством

$$d^2\Psi = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}d^2y_1 + \cdots + \frac{\partial\Psi}{\partial y_m}d^2y_m.$$

Но в точке возможного экстремума справедливы равенства $\frac{\partial\Psi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \frac{\partial\Psi}{\partial y_m} = 0$, так что $d^2\Psi$ определяется той же формулой

$$d^2\Psi = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\Psi, \tag{8.16}$$

что и в случае, когда все переменные $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ независимы. Заметим, что поскольку нам требуется установить знакоопределенность $d^2\Psi$ лишь при наличии условий связи (8.1), то при проведении вычислений следует в формулу (8.16) для $d^2\Psi$ подставить вместо $dy_1, \ldots, dy_m$ их значения, определяемые из системы (8.7) в точке $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Пример 8.1. Исследовать функцию

$$f(x, y, z) = xyz,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \tag{8.17}$$

на условный экстремум методом неопределенных множителей Лагранжа при наличии следующей системы уравнений связи:

$$\begin{cases} x + y - z = 3, \\ x - y - z = 8. \end{cases} \tag{8.18}$$

◄Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = xyz + \lambda_1 (x + y - z - 3) + \lambda_2 (x - y - z - 8) \tag{8.19}$$

(проверить самостоятельно выполнение для функций f, F_1, F_2 указанных выше условий).

Записываем в нашем случае систему вида (8.15):

$$\begin{cases} \psi'_x = 0, \\ \psi'_y = 0, \\ \psi'_z = 0, \\ F_1 = 0, \\ F_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ x + y - z - 3 = 0, \\ x - y - z - 8 = 0. \end{cases} \tag{8.20}$$

Из системы (8.20) исключаем λ_1 и λ_2, а также находим $x_0 = \frac{11}{4}$, $y_0 = -\frac{5}{2}$, $z_0 = = -\frac{11}{4}$. Получим критическую точку $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$. Также определяем, что в точке $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$

$$\psi''_{x^2} = \psi''_{y^2} = \psi''_{z^2} = 0; \quad \psi''_{xy} = -\frac{11}{4}; \quad \psi''_{xz} = -\frac{5}{2}; \quad \psi''_{yz} = \frac{11}{4}.$$

Тогда

$$d^2\psi \left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = -\frac{11}{2} dxdy - 5dxdz + \frac{11}{2} dydz. \tag{8.21}$$

Составим систему вида (8.7):

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0, \\ dx - dy - dz = 0. \end{cases} \tag{8.22}$$

Из системы (8.22) находим, что $dy = 0$, $dx = dz$.

Откуда следует, что $d^2\psi \left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = -5 (dx)^2 < 0$.

Точка $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right)$ – точка условного максимума, а сам условный максимум $f \left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}$. ►

8.4 Наибольшее и наименьшее значения функций многих переменных

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ и D – ограниченное замкнутое множество, функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна на D. Тогда по теореме Вейерштрасса (теорема 2.5) функция f достигает на этом множестве своих наибольшего и наименьшего значений. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функций в этом случае состоит в следующем:

1. Находим критические точки функции, являющиеся внутренними точками множества D.
2. Исследуем функцию на наименьшее (наибольшее) значение функции на границе множества D.
3. Выбираем наименьшее (наибольшее) значение функции среди значений ее в указанных выше критических точках и наибольших (наименьших) значениях функции на границе. Это и будет наименьшим (наибольшим) значением функции на множестве D.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 8.2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции

$$f(x,y) = xy\,(5 - x + y)\,, \quad (x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x - y \leqslant 5\right\}.$$

◀Изобразим множество D на рисунке 8.2. Находим критические точки функции f, являющиеся внутренними точками множества D.

$$f'_x\,(x,y) = \left(5xy - x^2y + xy^2\right)'_x = 5y - 2xy + y^2;$$

$$f'_y\,(x,y) = 5x - x^2 + 2xy;$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x\,(x,y) = 0, \\ f'_y\,(x,y) = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5y - 2xy + y^2 = 0, \\ 5x - x^2 + 2xy = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 5 - 2x + y = 0, \end{array}\right. \\ \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 5 - x + 2y = 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{8.23}$$

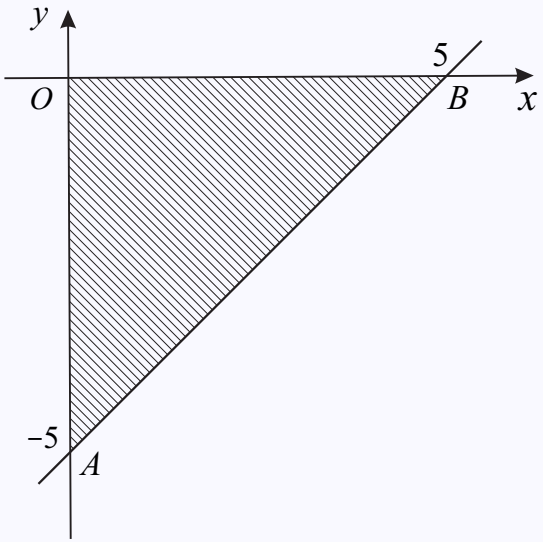


Рисунок 8.2

Система (8.23) имеет четыре решения:

$$(0,0)\,,\ (0,-5)\,,\ (5,0)\,,\ \left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right).$$

Из полученных точек только точка $\left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right) \in \mathrm{Int}D$.

$$f\left(\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\left(5-\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{5}{3}=-\frac{125}{27}.$$

Дальше исследуем функцию f на наибольшее и наименьшее значения на границе множества D.

$OA: x = 0,\ f(0, y) = 0;$
$OB: y = 0,\ f(x, 0) = 0;$
$AB: x = 5 + y,\ f(5 + y, y) = (5 + y)\, y\, (5 - 5 - y + y) = 0.$

Таким образом, в любых точках границы значение функции f равно нулю.

Функция f принимает наименьшее значение в точке $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$, $f\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27}$; наибольшее значение, равное нулю, функция принимает в точках границы множества.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение точки условного (относительного) экстремума функции многих переменных.
2. Сформулируйте необходимое условие существования условного экстремума функции в точке.
3. Сформулируйте алгоритм метода неопределенных множителей Лагранжа.
4. Сформулируйте достаточный признак условного экстремума функции многих переменных.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функций многих переменных

Задание 1. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{xy}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, при условии, что $x + y = 1$.

◀Это задача на условный экстремум. Из уравнения связи $x + y = 1$ выражаем одну из переменных, например y, через другую и подставляем в выражение для функции z:

$$y = 1 - x, \ z = e^{x(1-x)} = e^{x-x^2}.$$

Получили функцию одной переменной x. Исследуем ее на экстремум. Тем самым решится вопрос об условном экстремуме функции $z = e^{xy}$, так как условие $x + y = 1$ уже автоматически учтено. Имеем:

$$z' = e^{x-x^2}(1-2x), \ z' = 0 \ \text{ при } \ 1 - 2x = 0, \ \text{ или } \ x = \frac{1}{2},$$

$$z'' = e^{x-x^2}(1-2x)^2 - 2e^{x-x^2} = e^{x-x^2}\left[(1-2x)^2 - 2\right], \ z''\left(\frac{1}{2}\right) = -2e^{\frac{1}{4}} < 0.$$

Следовательно, в точке $x = \frac{1}{2}$ функция z имеет максимум. Но тогда данная функция имеет в соответствующей точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ условный максимум. Значение функции в этой точке $z = e^{\frac{1}{4}}$. ▶

Задание 2. На поверхности трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > b > c)$$

найти точки, наиболее близкие к центру и наиболее удаленные от него.

◀Пусть точка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ лежит на поверхности эллипсоида. Тогда ее расстояние от центра определится по формуле $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Очевидно, максимальное значение подкоренного выражения даст

наибольшее, а минимальное – наименьшее расстояние ρ. Следовательно, задача сводится к исследованию на экстремум функции трех переменных $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, при уравнении связи $\varphi(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$.

Составим вспомогательную функцию (функцию Лагранжа)

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

(λ – множитель Лагранжа) и решим систему уравнений

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y,z)=0,\\ \Phi'_y(x,y,z)=0,\\ \Phi'_z(x,y,z)=0,\\ \varphi(x,y,z)=0.\end{cases}$$

Найдем частные производные первого порядка функции Φ:

$$\begin{cases}2x+2\frac{\lambda}{a^2}x=0,\\ 2y+2\frac{\lambda}{b^2}y=0,\\ 2z+2\frac{\lambda}{c^2}z=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)=0,\\ y\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\ z\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

Из последнего уравнения системы следует, что x, y и z не могут одновременно равняться нулю. Поэтому один из сомножителей

$$1+\frac{\lambda}{a^2},1+\frac{\lambda}{b^2},1+\frac{\lambda}{c^2}$$

должен равняться нулю. Пусть $1+\frac{\lambda}{a^2}=0$, т. е. $\lambda=-a^2$. Тогда $1+\frac{\lambda}{b^2}\neq 0$ и $1+\frac{\lambda}{c^2}\neq 0$ (так как $a>b>c$ и, следовательно, $y=0$, $z=0$. Из четвертого уравнения системы получаем $x=\pm a$. Таким

образом, положив $1+\frac{\lambda}{a^2}=0$, нашли две точки $(a,0,0)$ и $(-a,0,0)$. Аналогично рассуждая, при $1+\frac{\lambda}{b^2}=0$ получим вторую пару точек $(0,b,0)$ и $(0,-b,0)$, при $1+\frac{\lambda}{c^2}=0$ третью пару $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$. Полученные точки являются концами трех главных осей эллипсоида. Так как $a>b>c$, то можем утверждать, что максимум в точках $(a,0,0)$ и $(-a,0,0)$, минимум в точках $(0,0,c)$ и $(0,0,-c)$. Что же касается точек $(0,b,0)$ и $(0,-b,0)$, то в них экстремума нет.▶

Задание 3. В круг радиуса R вписать четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади, если величина угла BCD равна α.

◀Рассмотрим рисунок 8.3. Через вершину A четырехугольника проведем диаметр AK. Все вершины четырехугольника соединим с центром окружности. Введем обозначения: $\angle OBA=\angle OAB=\beta$, $\angle OAD=\angle ODA=\gamma$, $\angle BCO=\angle CBO=\mu$.

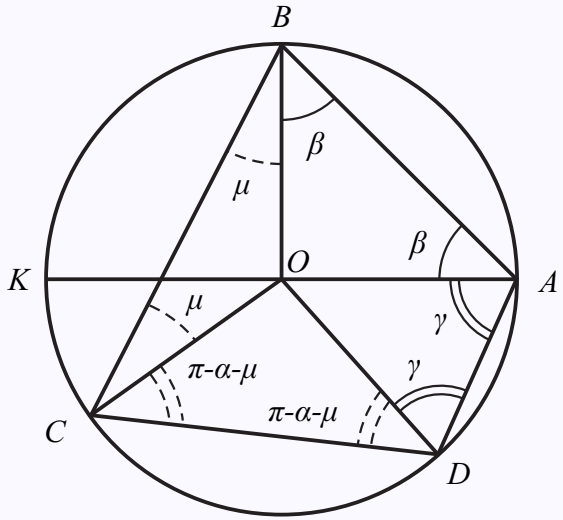


Рисунок 8.3

Тогда $\angle OCD = \angle ODC = \pi - \alpha - \mu$. Определим центральные углы:

$$\angle BOA = \pi - 2\beta; \quad \angle BOC = \pi - 2\mu; \quad \angle AOD = \pi - 2\gamma; \quad \angle COD = 2\alpha + 2\mu - \pi.$$

Площадь четырехугольника $ABCD$ определяется с помощью формулы

$$S = \frac{R^2}{2}\left(\sin 2\gamma + \sin 2\beta + \sin 2\mu - \sin 2(\alpha + \mu)\right). \tag{8.24}$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\psi = \frac{R^2}{2}\left(\sin 2\gamma + \sin 2\beta + \sin 2\mu - \sin 2(\alpha + \mu)\right) + \lambda\left(\gamma + \beta - \alpha\right), \tag{8.25}$$

где $F = \gamma + \beta - \alpha = 0$ – уравнение связи.

Составляем систему

$$\begin{cases} \psi'_\gamma = R^2 \cos 2\gamma + \lambda = 0, \\ \psi'_\beta = R^2 \cos 2\beta + \lambda = 0, \\ \psi'_\mu = R^2(\cos 2\mu - \cos 2(\alpha + \mu)) = 0, \\ \gamma + \beta - \alpha = 0. \end{cases} \tag{8.26}$$

Вычитая из первого уравнения системы (8.26) второе, получим:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\beta = 0; \ -2\sin(\gamma + \beta) \cdot \sin(\gamma - \beta) = 0; \ \sin(\gamma - \beta) = 0, \ \gamma - \beta = \pi k, \ k = 0, \ \gamma = \beta = \frac{\alpha}{2}.$$

Решаем третье уравнение системы (8.26):

$$\cos 2\mu - \cos 2(\alpha + \mu) = 0; \ 2\sin(2\mu + \alpha)\sin\alpha = 0; \ \sin(2\mu + \alpha) = 0;$$

$$2\mu + \alpha = \pi k, 2\mu + \alpha = \pi; \ \mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

Получили точку $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ условного экстремума. Четырехугольник $ABCD$ будет вписан в круг так, что вершины A и C будут совпадать с концевыми точками диаметра AK и $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, а $\angle\gamma = \angle\beta = \frac{\alpha}{2}$. Дальше воспользуемся достаточным признаком экстремума.

$$\psi''_{\gamma^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -2R^2 \sin 2\gamma \,|_{\gamma=\frac{\alpha}{2}} = -2R^2 \sin\alpha,$$

$$\psi''_{\beta^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -2R^2 \sin 2\beta \,|_{\beta=\frac{\alpha}{2}} = -2R^2 \sin\alpha,$$

$$\psi''_{\mu^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = R^2\left(-2\sin 2\mu \,|_{\mu=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}} + 2\sin 2(\alpha+\mu) \,|_{\mu=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}\right) = -4R^2 \sin\alpha;$$

$$\psi''_{\gamma\beta}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \psi''_{\gamma\mu}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \psi''_{\beta\mu}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0; \quad F = \gamma + \beta - \alpha = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial\gamma}d\gamma + \frac{\partial F}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial F}{\partial\mu}d\mu = d\gamma + d\beta = 0;$$

$$d^2\psi\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\gamma}d\gamma + \frac{\partial}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial}{\partial\mu}d\mu\right)^2 \psi\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\gamma^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\beta^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\mu^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma\partial\beta}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\gamma d\beta + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta\partial\mu}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\beta d\mu +$$

$$+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu\partial\gamma}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)d\mu d\gamma =$$

$$= -2R^2 \sin\alpha d\gamma^2 - 2R^2 \sin\alpha d\beta^2 - 4R^2 \sin\alpha d\mu^2 < 0.$$

Точка условного экстремума $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ – точка условного максимума; $S_{\max} = 2R^2 \sin\alpha$. ►

Задание 4. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения луча света от плоскости в однородной среде.

◀Рассмотрим рисунок 8.4.

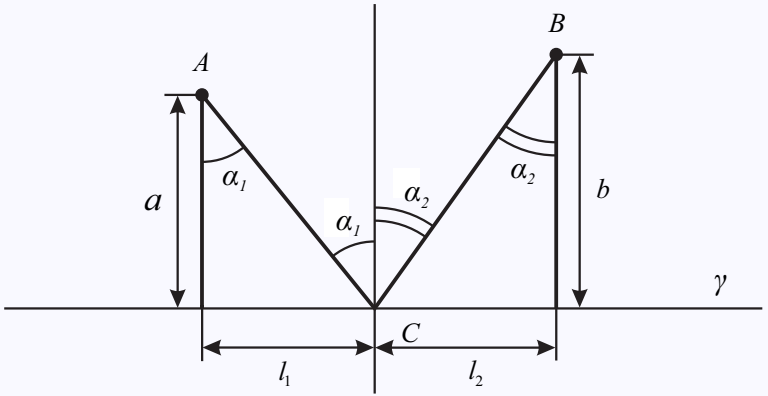


Рисунок 8.4

Пусть луч света исходит из точки A со скоростью v и углом падения α_1 и отражается от плоскости γ под углом α_2 и попадает в точку B. Расстояние от точки A до плоскости γ равно a, а от точки B равно b. Горизонтальный путь прохождения луча света от точки A в точку B

$$l = l_1 + l_2 = a \operatorname{tg} \alpha_1 + b \operatorname{tg} \alpha_2. \tag{8.27}$$

Принцип Ферма состоит в том, что свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B, распространяется по кривой со скоростью v, для прохождения которой требуется минимум времени. Время прохождения света из точки A в точку B есть функция углов α_1 и α_2. Она имеет вид

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{a}{v \cos \alpha_1} + \frac{b}{v \cos \alpha_2}, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{8.28}$$

Математическая модель задачи: функцию (8.28), с уравнением связи (8.27), исследовать на условный экстремум.

Имеем функцию Лагранжа

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{a}{v\cos\alpha_1} + \frac{b}{v\cos\alpha_2} + \lambda\left(l - a\operatorname{tg}\alpha_1 - b\operatorname{tg}\alpha_2\right).$$

Составляем систему

$$\begin{cases} \psi'_{\alpha_1} = \frac{a}{v}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_1} - \lambda\frac{a}{\cos^2\alpha_1} = 0, \\ \psi'_{\alpha_2} = \frac{b}{v}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\cos^2\alpha_2} - \lambda\frac{b}{\cos^2\alpha_2} = 0, \\ l - a\operatorname{tg}\alpha_1 - b\operatorname{tg}\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{8.29}$$

Упрощаем систему (8.29):

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha_1}{v} - \lambda = 0, \\ \frac{\sin\alpha_2}{v} - \lambda = 0, \\ l - a\operatorname{tg}\alpha_1 - b\operatorname{tg}\alpha_2 = 0. \end{cases} \tag{8.30}$$

Из первых двух уравнений системы (8.30) получим

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = 1. \tag{8.31}$$

Из (8.31) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Точка (α, α) – точка условного экстремума

$$\psi''_{\alpha_1^2} = \frac{a}{v}\cdot\frac{\cos^3\alpha_1 + 2\cos\alpha_1\cdot\sin^2\alpha_1}{\cos^4\alpha_1} - \frac{a\sin\alpha_1}{v}\cdot\frac{2\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_1}{\cos^4\alpha_1} = \frac{a}{v\cos\alpha_1},$$

$$\psi''_{\alpha_2} = \frac{b}{v\cos\alpha_2},\ \psi''_{\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

Находим

$$d^2\psi(\alpha,\alpha)=\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}d\alpha_1+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}d\alpha_2\right)\psi(\alpha,\alpha)=$$

$$=\frac{a}{v\cos\alpha}d\alpha^2+\frac{a}{v\cos\alpha}d\alpha^2=2\frac{a}{v\cos\alpha}d\alpha^2>0.$$

Дополнительно учесть, что при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ будет $a=b$.

Доказали, что точка (α,α) есть точка условного минимума функции (8.28) при уравнении связи (8.27).

В результате проведенного исследования доказано, что угол падения луча света в однородной среде равен углу отражения.►

Задание 5. Для системы из двух материальных точек $(1,2)$ и $(2,1)$ с массами, соответственно, 3 и 2 найти точку (x,y) на окружности $x^2+y^2=1$, относительно которой момент инерции указанной системы будет наименьшим. Найти этот момент инерции.

◄Момент инерции обозначим $I=f(x,y)$, где

$$f(x,y)=3\left((x-1)^2+(y-2)^2\right)+2\left((x-2)^2+(y-1)^2\right).$$

Таким образом, задача сводится к нахождению условного экстремума функции $I=f(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, при уравнении связи

$$x^2+y^2=1.$$

Составим функцию Лагранжа.

$$\psi(x,y)=f(x,y)+\lambda(1-x^2-y^2).$$

Находим:

$$\psi'_x=6(x-1)+4(x-2)-2\lambda x=10x-14-2\lambda x,$$

$$\psi'_y=6(y-2)+4(y-1)-2\lambda y=10y-16-2\lambda y.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 7 = \lambda x, \\ 5y - 8 = \lambda y, \\ 1 - x^2 - y^2 = 0. \end{cases} \tag{8.32}$$

Решаем систему (8.32), получим:

$$x = \frac{7}{\sqrt{113}},\ y = \frac{8}{\sqrt{113}},\ \lambda = 5 - \sqrt{113}.$$

Нашли точку $\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right)$ – точку условного экстремума. Докажем, что это точка условного минимума.

$$\psi''_{x^2}\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right) = 2\sqrt{113},\ \psi''_{y^2}\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right) = 2\sqrt{113}.\ \psi''_{xy}\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right) = 0.$$

$$d^2\psi\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \psi\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right) = 2\sqrt{113}dx^2 + 2\sqrt{113}dy^2 > 0.$$

Утверждение доказано, т. е. точка $\left(\frac{7}{\sqrt{113}}, \frac{8}{\sqrt{113}}\right)$ – точка условного минимума.
Дальше находим указанный момент инерции

$$I = 3\left(\left(\frac{7}{\sqrt{113}} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{113}} - 2\right)^2\right) +$$

$$+2\left(\left(\frac{7}{\sqrt{113}} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{113}} - 1\right)^2\right) = 30 - 2\sqrt{113}.\ \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

в замкнутой области, заданной неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x + y \leqslant 1$.

◀Замкнутая область представляет собой треугольник, ограниченный координатными осями и прямой $x + y = 1$ (рисунок 8.5).

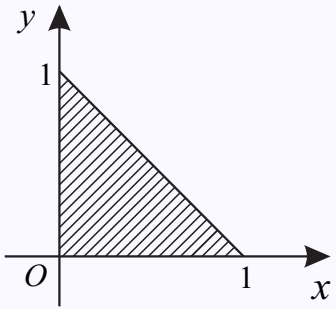


Рисунок 8.5

Находим стационарные точки внутри области:

$$z'_x = 2x + 2y = 2(x + y), \quad z'_y = 2x - 6y + 1,$$

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x - 6y + 1 = 0, \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{8}, \quad y = \frac{1}{8}.$$

Получили точку $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$, которая не принадлежит рассматриваемой области. Других стационарных точек нет.

Исследуем функцию на границе области. Поскольку граница состоит из трех участков, описанных тремя разными уравнениями, то приходится исследовать функцию на каждом участке отдельно.

а) Исследуем функцию на отрезке $[0,1]$ оси Ox. Уравнением связи является $y=0$. С учетом его функция представится в виде $z=x^2$. Из уравнения сразу видно, что функция возрастает на $[0,1]$. Следовательно, наименьшее значение функции будет при $x=0$, т. е. в начале координат, $z_1(0,0)=0$, а наибольшее – при $x=1$, т. е. в точке $(1,0)$, $z_2(1,0)=1$.

б) Исследуем функцию на отрезке $[0,1]$ оси Oy. Уравнением связи является $x=0$. С учетом его функция принимает вид $z=-3y^2+y$. Тогда

$$z'=-6y+1, \quad -6y+1=0, \quad y=\frac{1}{6}.$$

Стационарная точка – $\left(0,\frac{1}{6}\right)$. Значение функции в ней $z_3\left(0,\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$.

в) Исследуем функцию вдоль участка прямой $x+y=1$, $x\in[0,1]$. Подставляя $y=1-x$ в выражение для функции, получим:

$$z=x^2+2x(1-x)-3(1-x)^2+(1-x)$$

или

$$z=-4x^2+7x-2.$$

Тогда

$$z'=-8x+7, -8x+7=0, x=\frac{7}{8}, y=\frac{1}{8}$$

и значение функции в точке $z_4\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right)=-4\left(\frac{7}{8}\right)^2+7\cdot\frac{7}{8}-2=1\frac{1}{16}$. Из поля зрения выпала точка $(0,1)$. Вычислим значение функции и в ней:

$$z_5(0,1)=-3\cdot1^2+1=-2.$$

Сравнивая полученные значения $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\frac{1}{12}$, $z_4=1\frac{1}{16}$ и $z_5=-2$, заключаем, что $1\frac{1}{16}$ – наибольшее значение функции, достигаемое в точке $\left(\frac{7}{8},\frac{1}{8}\right)$, 2 – наименьшее значение, достигаемое в точке $(0,1)$. ►

Задание 7. Функцию $f(x,y) = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, исследовать на наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области

$$\overline{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leqslant 1\right\}.$$

◀Изобразим на рисунке 8.6 замкнутую область $\overline{G}$ – треугольник OAB.

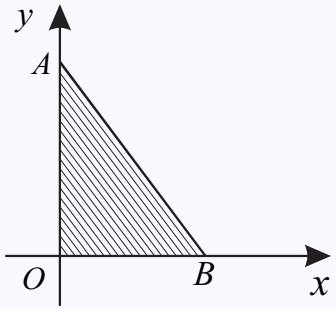


Рисунок 8.6

Находим критические точки функции f из области G.

$$f'_x = \frac{y}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8};\ f'_y = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4}.$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{xy}{3} - \frac{y^2}{8} = 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{xy}{4} = 0. \end{cases} \begin{cases} 12y - 8xy - 3y^2 = 0, \\ 6x - 2x^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ 12 - 8x - 3y = 0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 6 - 2x - 3y = 0. \end{array}\right. \end{cases} \tag{8.33}$$

Система (8.33) имеет четыре решения:

$$(0,0) \notin G;\ (3,0) \notin G;\ (0,4) \notin G;\ \left(1,\frac{4}{3}\right) \in G.$$

Находим значение функции f в критической точке $\left(1,\frac{4}{3}\right) \in G$:

$$f\left(1,\frac{4}{3}\right) = \frac{1\cdot\frac{4}{3}}{2} - \frac{1\cdot\frac{4}{3}}{6} - \frac{1\cdot\frac{16}{9}}{8} = \frac{2}{9}.$$

Дальше исследуем функцию f на границе.
На отрезке OA $x = 0$. Тогда $f(0,y) = 0$ для $0 \leqslant y \leqslant 4$.
На отрезке OB $y = 0$. Тогда $f(x,0) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant 3$.
На отрезке AB $y = 4 - \frac{4}{3}x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
Тогда $f\left(x, 4-\frac{4}{3}x\right) = g(x) = \frac{x\left(4-\frac{4}{3}x\right)}{2} - \frac{x^2\left(4-\frac{4}{3}x\right)}{6} - \frac{x\left(4-\frac{4}{3}x\right)^2}{8} =$

$$= 2x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3 - 2x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^3 = 0.$$

В точке $\left(1,\frac{4}{3}\right) \in G$ функция f имеет наибольшее значение, равное $\frac{2}{9}$; в точках границы ∂G функция f имеет наименьшее значение, равное нулю.►

Задание 8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y,z) = x + y + z,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

в ограниченной замкнутой области $\overline{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$.

◄Изобразим замкнутую область $\overline{G}$ на рисунке 8.7 (в первом октанте декартовой прямоугольной системы координат пространства).

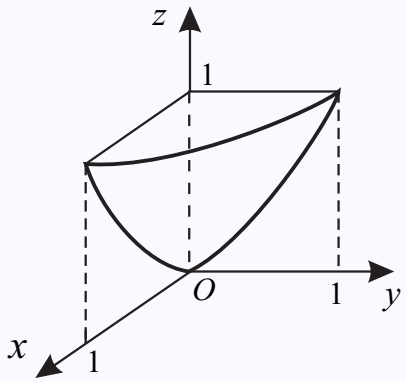


Рисунок 8.7

Находим критические точки, принадлежащие области G:

$$f'_x = 1,\ f'_y = 1,\ f'_z = 1.$$

Критических точек, принадлежащих области G, функция f не имеет, так как система

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \\ f'_z = 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Дальше исследуем функцию f на наибольшее и наименьшее значения на границе ∂G.

При $z = 1$: $f(x, y, 1) = g(x, y) = x + y + 1$. $g'_x = 1$, $g'_y = 1$, $\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases}$. Система решений не имеет.

Дальше проведем исследования на окружности $\begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Пусть $y=\sqrt{1-x^2}$, $g\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=\varphi(x)=x+\sqrt{1-x^2}+1$,

$$\varphi'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}},\ \varphi'(x)=0,\ \sqrt{1-x^2}=x,\ \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1-x^2=x^2,\end{cases},$$

$$2x^2=1,\ x^2=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+1=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1.$$

Если $y=-\sqrt{1-x^2}$, то $g(x,-\sqrt{1-x^2})=\psi(x)=x-\sqrt{1-x^2}+1$,

$$\psi'=1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}},\ \psi'(x)=0,\ \sqrt{1-x^2}=-x,\ \begin{cases}0\leqslant -x\leqslant -1,\\ 1-x^2=x^2,\end{cases}$$

$$2x^2=1,\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=-\frac{2}{\sqrt{2}}+1=-\sqrt{2}+1.$$

Пусть $x=-1$, тогда $y=0$ $f(-1,0,1)=-1+0+1=0$. Если $x=1$, то $y=0$ и $f(1,0,1)=1+0+1=2$.

Дальше проведем исследования на границе G-поверхности параболоида вращения $z=x^2+y^2$ при $0\leqslant z<1$.

$$f\left(x,y,x^2+y^2\right)=\mu(x,y)=x+y+x^2+y^2,\ \mu'_x=1+2x,\ \mu'_y=1+2y,$$

$$\begin{cases}1+2x=0,\\ 1+2y=0,\end{cases},\ \begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\ y=-\frac{1}{2}.\end{cases},$$

$$z=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$f_{\text{наиб.}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=1+\sqrt{2}$; $f_{\text{наим.}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Исследовать функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, на условный экстремум при данных уравнениях связи:

   1.1 $z = e^{xy}$ при $x + y = 1$;

   1.2 $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2a$ $(a > 0)$;

   1.3 $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$;

   1.4 $z = 5 - 3x - 4y$ при $x^2 + y^2 = 25$;

   1.5 $z = 5xy - 4$ при $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

2. Исследовать функции $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in X \subset \mathbb{R}^3$, на условный экстремум при данных уравнениях связи:

   2.1 $u = x^2y^2z^4$ при $2x + 3y + 4z = 0$;

   2.2 $u = x + y + z$ при $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$;

   2.3 $u = \cos x \cos y \cos z$ при $x + y + z = \pi$;

   2.5 $u = x - y + 2z$ при $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$.

3. В прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

4. Найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

5. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

6. При каких размерах прямоугольного открытого ящика с заданным объемом $V = 32$ м^3 его поверхность будет наименьшей?

7. Определить размеры конуса наименьшей боковой поверхности при условии, что его объем равен V.

8. Определить наружные размеры котла цилиндрической формы с заданной толщиной стенок d и емкостью V так, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала.

9. Нужно построить конический шатер наибольшего объема из данного количества материала S. Каковы должны быть его размеры?

10. На плоскости $3-2z=0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек $(1,1,1)$ и $(2,3,4)$ наименьшая.

11. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна $2L$, найти наибольший по площади.

12. Площадь треугольного участка земли уменьшена загородками при вершинах; каждая загородка круговая и имеет центр в ближайшей вершине. Найти, как можно сохранить наибольшую площадь участка при заданной общей длине трех загородок.

13. Найти треугольник данного периметра 2, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

14. Среди всех треугольников, вписанных в круг радиуса R, найти треугольник наибольшей площади.

15. Среди всех треугольников данного периметра $2p$ найти треугольник наибольшей площади.

16. Среди всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, найти четырехугольник максимальной площади.

17. Ответьте на вопросы теста.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3 Вариант 4

Итоговый тест по разделу «Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 9

Двойной интеграл, условия его существования и основные свойства

9.1 Двойной интеграл

В [2, лекция 12] были рассмотрены понятия квадрируемости и площади плоской фигуры (ограниченного множества точек плоскости $\mathbb{R}^2$), а также определение множества площади нуль: $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называется множеством *площади нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется простейшая фигура, содержащая все точки Γ и имеющая площадь, меньшую ε (под простейшей фигурой понималось непустое множество точек пространства $\mathbb{R}^2$, представляющее собой объединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям декартовой прямоугольной системы координат, не имеющих общих внутренних точек). Отметим, что плоская фигура будет квадрируемой тогда и только тогда, когда ее граница является множеством площади нуль.

Определенный интеграл Римана рассматривался на конечном отрезке числовой прямой. На этой лекции мы рассмотрим понятие интеграла по двумерному множеству $G \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 9.1. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью. Система множеств $\tau = \{G_k\}_{k=1}^n$ называется* ***разбиением множества*** *G, если выполнены следующие условия:*

1) *G_k $(k = \overline{1,n})$ – квадрируемые множества с положительной площадью;*
2) *$\mathrm{Int}G_k \cap \mathrm{Int}G_i = \emptyset$ при $k \neq i$;*
3) *$G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$.*

Множества G_k $(k = \overline{1,n})$ называются **частичными множествами**.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ площадь частичного множества G_k здесь и далее будем обозначать ΔG_k.

Назовем **диаметром ограниченного множества** $G \subset \mathbb{R}^n$ точную верхнюю грань множества расстояний между любыми двумя точками этого множества. Диаметр множества G будем обозначать $\mathrm{diam}G$.

Число $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \operatorname{diam}\{G_k\}$ назовем **мелкостью разбиения** τ множества G.

Теперь рассмотрим некоторые задачи, которые приведут нас к понятию двойного интеграла.

9.1.1 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о массе материальной плоской неоднородной фигуры.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; функция $\gamma : \overline{G} \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на $\overline{G}$ (физический смысл функции γ – это плотность, с которой масса распределена по $\overline{G}$). Множество G будем называть **материальной плоской неоднородной фигурой** или **пластинкой** с плотностью $\gamma(x, y)$. Пусть требуется определить массу указанной пластинки.

◀Рассмотрим любое разбиение τ множества G. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$. Считаем, что для любой точки $(x, y) \in \overline{G}_k$ $\gamma(x, y) \approx \gamma(x_k, y_k)$. В этом случае масса пластинки $m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k)\, \Delta G_k$.

Тогда массу пластинки естественно определить так:

$$m = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k)\, \Delta G_k,$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от разбиения τ_G и выбора точек $(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$.▶

Задача об объеме криволинейного цилиндра.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; функция $f : \overline{G} \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на $\overline{G}$.

Криволинейным цилиндром назовем множество $\Phi \subset \mathbb{R}^3$, которое ограничено «основанием» $\overline{G}$, цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G и образующими, параллельными оси Oz, а также графиком функции f.

Дадим понятие объема криволинейного цилиндра Φ и укажем метод нахождения объема Φ.

◄Рассмотрим любое разбиение τ множества G. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$.

Рассмотрим прямой цилиндр с высотой $f(x_k, y_k)$ и основаниями $\overline{G}_k$ (нижнее основание) и $\overline{G}'_k$ (верхнее основание – часть плоскости, проходящей через точку $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$, параллельно плоскости $z = 0$, вырезанная частичной цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G_k и образующими, параллельными оси Oz (рисунок 9.1)). Объем указанного прямого цилиндра $V_k = f(x_k, y_k)\,\Delta G_k$.

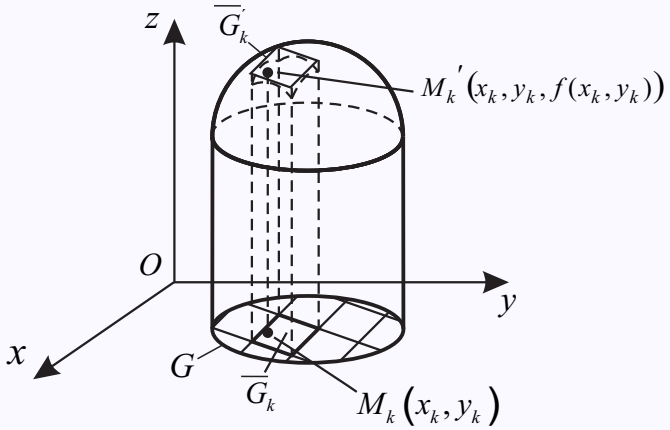


Рисунок 9.1

Объем криволинейного цилиндра

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta G_k.$$

Если существует конечный предел $V = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta G_k$ и этот предел не зависит от разбиения τ и выбора точек $(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$, то он называется **объемом криволинейного цилиндра** Ф.►

9.1.2 Понятие двойного интеграла

Рассмотренные выше задачи относятся к разным областям человеческих знаний, но методы их решения одинаковы. Отвлекаясь от конкретного содержания задач, но повторяя все рассуждения и выводы, приведенные в указанных задачах, мы приходим к понятию двойного интеграла.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; $f : G \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим любое разбиение τ множества G. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k) \in \overline{G}_k$.

Обозначим через $\sigma_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta G_k$. Будем называть σ_τ **интегральной суммой Римана** функции f по множеству G, соответствующей разбиению τ.

Определение 9.2. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют **пределом интегральной суммы Римана** функции f по множеству G, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau\ \lambda_\tau < \delta\ \ \forall (x_k, y_k) \in G_k\ (k = \overline{1,n})\ \ |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Указанный предел будем обозначать $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$.

Определение 9.3. *Если для функции $f : G \to \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$, то его называют **двойным интегралом** функции f по множеству G и обозначают $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$, а функцию f называют **интегрируемой** по множеству G.*

Функция f называется **подынтегральной функцией**, выражение $f(x,y)\,dxdy$ – **подынтегральным выражением**, множество G – **областью интегрирования**.

Замечание 9.1. Аналогично, как и для функции одной переменой, необходимым условием интегрируемости будет ограниченность этой функции на ограниченном квадрируемом множестве с положительной площадью.

Легко показать на конкретном примере, что ограниченность функции на G в общем случае не является достаточным условием ее интегрируемости по этой области.

Пример 9.1. Показать, что функция

$$D(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ – рациональные числа,}\\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ – иррациональные числа,}\end{cases}$$

не интегрируема по множеству G, где

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \begin{array}{l}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{array}\right\}.$$

◀Для интегральной суммы $\sigma_\tau=\sum\limits_{k=1}^{n}D(x_k,y_k)\Delta G_k$ рассмотрим два случая выбора точек (x_k,y_k).

а) $(x_k,y_k)\in G$ такие, что $x_k\in\mathbb{Q}$ и $y_k\in\mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma_\tau=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\Delta G_k=S_G \text{ и } \lim_{\lambda_\tau\to 0}\sigma_\tau=S_G,$$

где $S_G=1$ – площадь области G. Тогда $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\sigma_\tau=1$.

б) Пусть хотя бы одна из координат x_k или y_k есть число иррациональное. Тогда

$$\sigma_\tau=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\Delta G_k=0.$$

Тогда $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\sigma_\tau=0$.

Вывод: $\iint\limits_G D\,(x,y)\,dxdy$ не существует.▶

Замечание 9.2. Далее будем рассматривать только ограниченные функции на ограниченном квадрируемом множестве $G\subset\mathbb{R}^2$ с положительной площадью.

9.2 Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; функция $f : G \to \mathbb{R}$ – ограничена на G.

Рассмотрим любое разбиение τ множества G. Так как функция f ограничена на G, то она ограничена и на любом частичном множестве G_k. Пусть для каждого $k = 1, \ldots, n$

$$M_k = \sup_{(x,y)\in G_k} f(x,y), \quad m_k = \inf_{(x,y)\in G_k} f(x,y).$$

Составим суммы

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta G_k, \tag{9.1}$$

$$s_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta G_k, \tag{9.2}$$

где ΔG_k – площадь G_k $(k = \overline{1,n})$.

Сумма S_τ называется **верхней суммой Дарбу**, s_τ – **нижней суммой Дарбу** функции f для разбиения τ.

При рассмотрении интеграла Римана по отрезку с помощью сумм Дарбу были получены критерии интегрируемости. Эти рассуждения можно повторить без каких либо существенных изменений и для двойного интеграла. Это приведет нас к следующим утверждениям, которые позволят проверять интегрируемость функции по множеству $G \subset \mathbb{R}^2$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью.

Теорема 9.1 (первый критерий интегрируемости). *Ограниченная на G функция $f : G \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой по множеству G тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{9.3}$$

Введем обозначения:
$\sup\limits_{\tau}\{s_\tau\} = I_*$ – **нижний интеграл Дарбу** функции f по множеству G;
$\inf\limits_{\tau}\{S_\tau\} = I^*$ – **верхний интеграл Дарбу** функции f по множеству G.

Лемма 9.1 (Дарбу). *Верхний и нижний интегралы Дарбу ограниченной на G функции $f : G \to \mathbb{R}$ являются, соответственно, пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу при $\lambda_{\tau_G} \to 0$.*

Теорема 9.2 (критерий Дарбу). *Ограниченная на G функция $f : G \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой по множеству G тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны между собой, то есть $I^* = I_* = I$.*

Теорема 9.3 (критерий Римана). *Ограниченная на G функция $f : G \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой по множеству G тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ множества G, что*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon. \tag{9.4}$$

Теорема 9.4. *Пусть функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству G, а функция $g : G \to \mathbb{R}$ ограничена на множестве G, причем*

$$\Gamma = \{(x, y) \in G : \ f(x, y) \neq g(x, y)\}$$

есть множество площади нуль. Тогда функция g также будет интегрируемой по G, причем

$$\iint\limits_G f(x, y)dxdy = \iint\limits_G g(x, y)dxdy.$$

Теорема 9.5. *Если функция $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{G}$, то она интегрируема по множеству G.*

Теорема 9.6. *Если функция $f : G \to \mathbb{R}$ ограничена на G и непрерывна на G, за исключением, может быть, множества точек площади нуль, то f будет интегрируемой по множеству G.*

9.3 Основные свойства двойного интеграла

Основные свойства двойного интеграла мы также только перечислим, так как их доказательства во многом аналогичны доказательствам соответствующих свойств определенного интеграла Римана.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью.

Теорема 9.7 (свойство линейности). *Если функции $f_1 : G \to \mathbb{R}$, $f_2 : G \to \mathbb{R}$ интегрируемы по G и α_1, α_2 – любые действительные числа, то функция $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ интегрируема по множеству G и справедливо равенство*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \alpha_1 \iint\limits_G f_1(x,y)\,dxdy + \alpha_2 \iint\limits_G f_2(x,y)\,dxdy. \tag{9.5}$$

Теорема 9.8. *Если функции $f_1 : G \to \mathbb{R}$, $f_2 : G \to \mathbb{R}$ интегрируемы по G, то и функция $f = f_1 \cdot f_2$ также интегрируема по множеству G.*

Теорема 9.9 (свойство аддитивности интеграла). *Если функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по G, то для любого разбиения τ_G функция f будет интегрируемой по каждому частичному множеству, причем*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dxdy. \tag{9.6}$$

Если же функция f интегрируема по каждому частичному множеству G_k, то она будет интегрируемой и по множеству G, и также будет справедливо равенство (9.6).

Теорема 9.10 (оценка интеграла по модулю). *Если функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по G, то и функция $|f|$ интегрируема по множеству G и справедливо неравенство*

$$\left| \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \right| \leqslant \iint\limits_G |f(x,y)|\,dxdy. \tag{9.7}$$

Теорема 9.11 (теорема о среднем). *Если функция* $f : G \to \mathbb{R}$ *интегрируема по множеству* G *и* $m = \inf\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)$, *а* $M = \sup\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)$, *то справедливо неравенство*

$$mS_G \leqslant \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \leqslant MS_G, \tag{9.8}$$

где S_G – *площадь фигуры* G, *причем существует* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \mu S_G.$$

Следствие 9.1. *Если функция* $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $\overline{G}$, *то существует такая точка* $(x_0, y_0) \in \overline{G}$, *что*

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = f(x_0, y_0)\,S_G. \tag{9.9}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции двух переменных.
3. Сформулируйте определение и основные свойства сумм Дарбу для двойного интеграла.
4. Сформулируйте критерии интегрируемости функции двух переменных.
5. Сформулируйте основные свойства двойного интеграла.

ЛЕКЦИЯ 10
Вычисление двойного интеграла

10.1 Сведение двойного интеграла к повторному

Сначала рассмотрим случай прямоугольной области интегрирования. Пусть

$$\Pi = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\}.$$

Теорема 10.1. *Если функция* $f : \Pi \to \mathbb{R}$ *интегрируема по множеству* Π, *а для любого* $x \in [a,b]$ *существует*

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

то существует

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \iint_\Pi f(x,y)\,dxdy;$$

если для любого $y \in [c,d]$ *существует* $J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, *то существует*

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \iint_\Pi f(x,y)\,dxdy.$$

◀Рассмотрим случай, когда для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$.

Так как существует $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy$, то его значение не зависит от разбиения прямоугольника Π на частичные множества.

Рассмотрим разбиение τ прямоугольника Π с помощью семейства прямых (рисунок 10.1):

1) $x = x_k \left(k = \overline{1, n-1}\right)$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < b = x_n; \tag{10.1}$$

2) $y = y_i \left(i = \overline{1, m-1}\right)$,

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{i-1} < y_i < \ldots < d = y_m.$$

На рисунке 10.1 выделено частичное множество

$$\Pi_{ki} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \\ y_{i-1} \leqslant y \leqslant y_i \end{array} \right\}.$$

Полученная «сетка» содержит $m \times n$ таких частичных множеств (частичных прямоугольников). Положим: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$; $\Delta S_{ki} = \Delta x_k \cdot \Delta y_i$ – площадь частичного прямоугольника;

$$m_{ki} = \inf_{(x,y)\in\Pi_{ki}} f(x,y), \quad M_{ki} = \sup_{(x,y)\in\Pi_{ki}} f(x,y).$$

Для любых точек $(x,y) \in \Pi_{ki}$ справедливо неравенство

$$m_{ki} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ki}. \tag{10.2}$$

Берем любую точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, фиксируем ее. С учетом выбранной точки $x = \xi_k$ интегрируем (10.2) по отрезку $[y_{i-1}, y_i]$; получим:

$$m_{ki}\Delta y_i \leqslant \int\limits_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_k, y)\,dy \leqslant M_{ki}\Delta y_i. \tag{10.3}$$

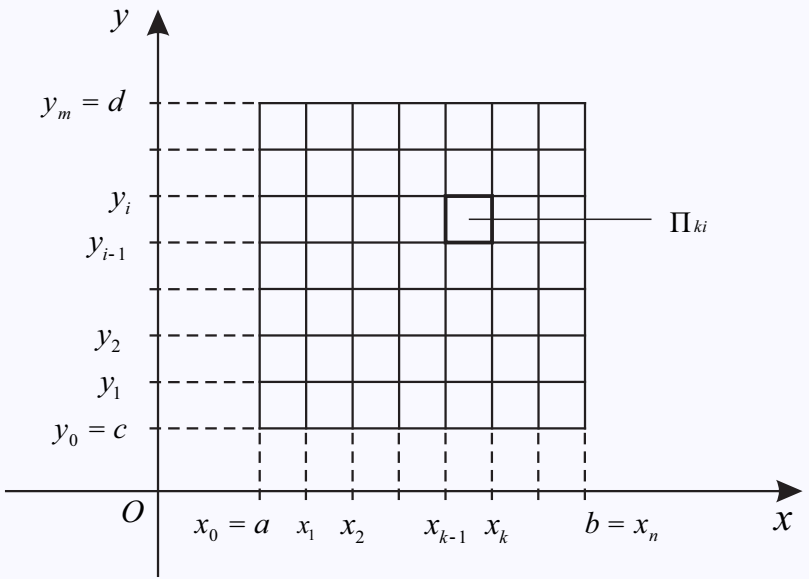


Рисунок 10.1

Неравенство (10.3) суммируем по всем i от 1 до m. Получим:

$$\sum_{i=1}^{m} m_{ki}\Delta y_i \leqslant \int_c^d f(\xi_k, y)\, dy \leq \sum_{i=1}^{m} M_{ki}\Delta y_i. \tag{10.4}$$

Умножим (10.4) на Δx_k и просуммируем полученные неравенства по всем k от 1 до n. Получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} m_{ki}\Delta x_k\Delta y_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} M_{ki}\Delta x_k\Delta y_i. \tag{10.5}$$

В двойном неравенстве (10.5) слева имеем нижнюю сумму Дарбу s_τ, справа – верхнюю сумму Дарбу S_τ функции f по множеству Π, а посредине – интегральную сумму функции $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ для разбиения $\tau_{[a,b]}$ отрезка $[a,b]$ на n частичных отрезков точками (10.1). Очевидно, что если $\lambda_\tau \to 0$, то и $\lambda_{\tau_{[a,b]}} \to 0$, где $\lambda_{\tau_{[a,b]}}$ – мелкость разбиения отрезка $[a,b]$.

Так как существует $\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy$, то из леммы Дарбу (лемма 9.1) и критерия Дарбу (теорема 9.2) следует, что

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy.$$

Используя аналог теоремы о трех функциях ([1], теорема 8.4), получим, что существует

$$\lim_{\lambda_{\tau_{[a,b]}} \to 0} \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k = \int\limits_a^b I(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dxdy.$$

Теорема доказана в случае, когда существует $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy = I(x)$.

Случай, когда существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = J(y)$, рассматривается аналогично.▶

Интегралы

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \text{ и } \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

называют **повторными интегралами**.

Замечание 10.1. Если функция f непрерывна на П, то в теореме выполняются условия для обоих рассматриваемых случаев, поэтому каждый из повторных интегралов будет равен двойному интегралу, а, значит, повторные интегралы будут также равны между собой:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy. \tag{10.6}$$

Переход при этом от одного повторного интеграла к другому называется **изменением порядка интегрирования**.

Дальше рассмотрим случай криволинейной области интегрирования.

Пусть на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ заданы непрерывные функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, такие, что для любых $x \in [a,b]$ $y_1(x) \leqslant y_2(x)$. Множество $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$ будем называть **простейшей областью интегрирования первого типа** (рисунок 10.2).

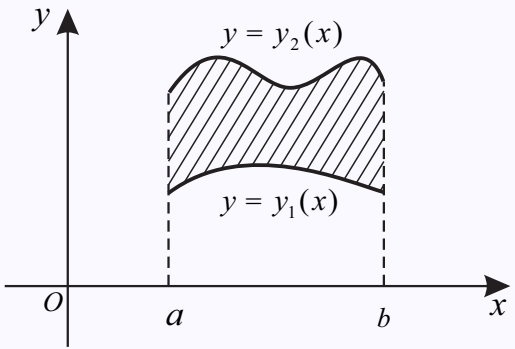


Рисунок 10.2

Теорема 10.2. *Пусть G – простейшая область интегрирования первого типа; функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по G, а для любого $x \in [a, b]$ существует*

$$I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

тогда существует

$$\int\limits_a^b I(x)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy = \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy.$$

◀Построим прямоугольник

$$\Pi = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\},$$

где c – минимум функции $y = y_1(x)$, $x \in [a, b]$, а d – максимум функции $y = y_2(x)$, $x \in [a, b]$ (рисунок 10.3). Тогда $\Pi \supset G$.

Определим на Π функцию F:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ если } (x, y) \in G, \\ 0, \text{ если } (x, y) \in \Pi \backslash G. \end{cases} \tag{10.7}$$

Для любого фиксированного $x \in [a, b]$

$$\int\limits_c^d F(x, y)dy = \int\limits_c^{y_1(x)} 0 \cdot dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy + \int\limits_{y_2(x)}^d 0 \cdot dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{10.8}$$

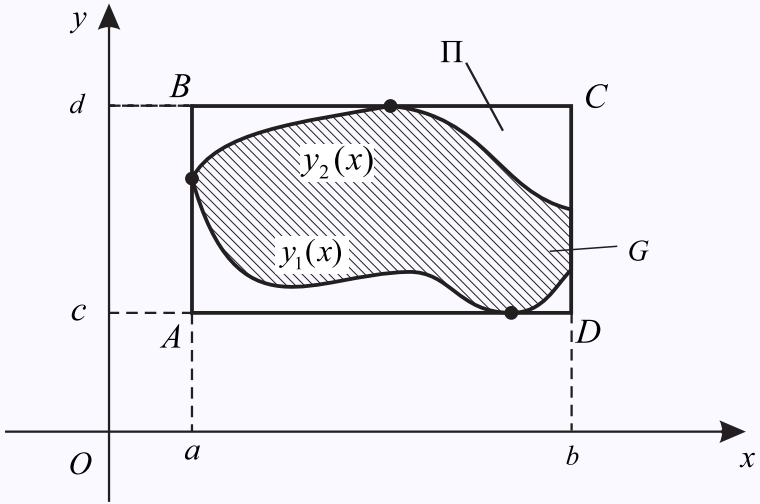


Рисунок 10.3

Для функции F выполняются условия теоремы 10.1. Тогда:

$$\iint\limits_{\Pi} F(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Но по свойству аддитивности двойного интеграла (теорема 9.9)

$$\iint\limits_{\Pi} F(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G} F(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Pi\setminus G} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\Pi\setminus G} 0dxdy = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy.$$

Значит,

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \blacktriangleright$$

Аналогичная теорема будет справедлива и для так называемой простейшей области интегрирования второго типа.

Пусть на отрезке $[c,d] \subset \mathbb{R}$ заданы непрерывные функции $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, такие, что для любых $y \in [c,d]$ $x_1(y) \leqslant x_2(y)$. Множество $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$ будем называть **простейшей областью интегрирования второго типа** (рисунок 10.4).

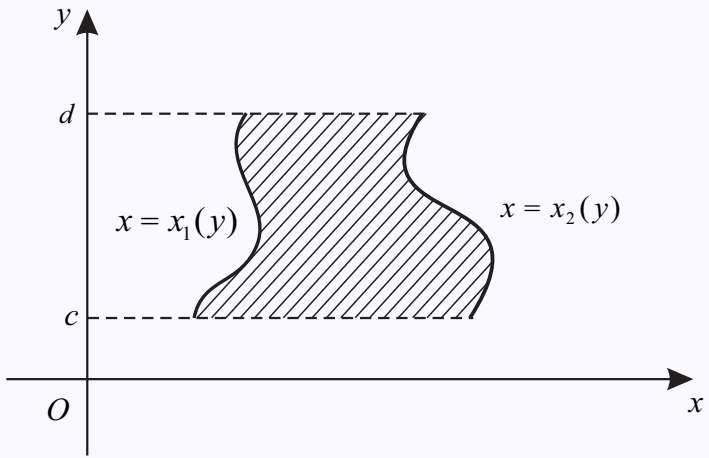


Рисунок 10.4

Теорема 10.3. *Пусть G – простейшая область интегрирования второго типа; функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по G, а для любого $y \in [c, d]$ существует*

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx = J(y),$$

тогда существует

$$\int\limits_c^d J(y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx = \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy.$$

Замечание 10.2. Если множество $G \subset \mathbb{R}^2$ является простейшей областью интегрирования как первого, так и второго типа, и функция $f : G \to \mathbb{R}$ непрерывна на G, то будут выполняться условия теоремы для обоих случаев. Тогда оба повторных интеграла будут существовать, причем каждый из них будет равен существующему двойному интегралу, то есть повторные интегралы будут равны между собой.

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx = \iint\limits_G f(x, y)\, dxdy. \tag{10.9}$$

Пример 10.1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(x-2)}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

◀Вначале изобразим на рисунке 10.5 область интегрирования для соответствующего двойного интеграла. Для этого строим графики функций $x = 0$, $x = 2$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \frac{x-2}{2}$. Область интегрирования G есть простейшая область интегрирования первого типа (рисунок 10.5), так как

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \ \frac{x-2}{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2} \right\},$$

где функции $y_1(x) = \frac{x-2}{2}$ и $y_2(x) = \sqrt{4 - x^2}$ непрерывны на отрезке $[0, 2]$.

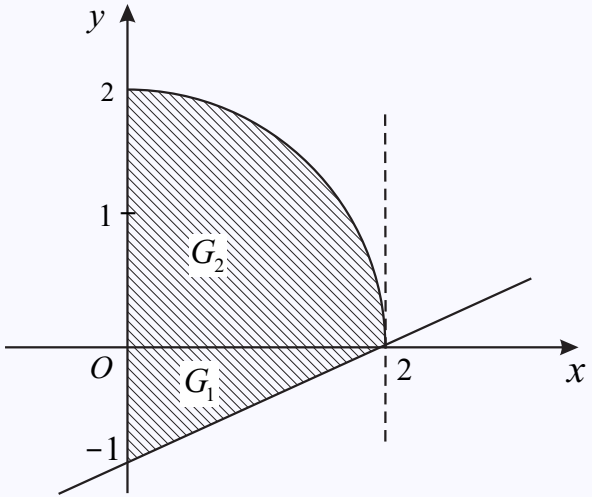


Рисунок 10.5

В то же время область интегрирования G является простейшей областью интегрирования второго типа, так как G можно представить в виде

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqslant y \leqslant 2, \ 0 \leqslant y \leqslant x_2(y) \right\},$$

где функция

$$x_2(y) = \begin{cases} 2y+2, \text{ если } -1 \leqslant y < 0, \\ \sqrt{4-y^2}, \text{ если } 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[-1, 2]$. Поэтому

$$I = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{0}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Но функция $x = x_2(y)$ задана на отрезке $[-1, 2]$с помощью двух различных аналитических выражений. Поэтому область интегрирования нужно представить в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$ (рисунок 10.5), где

$$G_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqslant y \leqslant 0, \ 0 \leqslant y \leqslant 2y+2\right\},$$

$$G_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant y \leqslant 2, \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-y^2}\right\}.$$

Используя свойство аддитивности двойного интеграла, получим:

$$I = \iint\limits_{G_1} f\,(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f\,(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{2y+2} f\,(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} f\,(x,y)\,dx. \blacktriangleright$$

Пример 10.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x^2 dxdy$, если область интегрирования G ограничена кривыми $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

◀Изобразим на рисунке 10.6 область интегрирования, построив графики указанных в задаче функций. Заменяем двойной интеграл повторным. Внешнее интегрирование лучше взять по x, так как если внешнее интегрирование взять по y, то G придется разбивать прямой $y = 1$ на две простейшие области интегрирования второго типа.

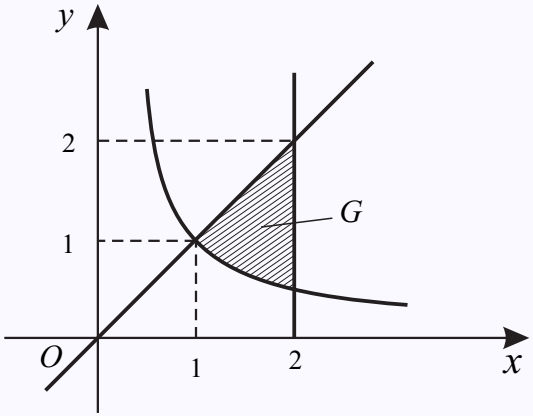


Рисунок 10.6

$$\iint\limits_G x^2 dxdy = \int\limits_1^2 x^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} dy = \int\limits_1^2 x^2 y\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int\limits_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(x^3 - x\right) dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1^4\right) - \frac{1}{2}\left(2^2 - 1^2\right) = \frac{15}{4} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4}. \blacktriangleright$$

Замечание 10.3. В случае, когда область интегрирования $G \subset \mathbb{R}^2$ не является простейшей областью первого или второго типа, часто удается разбить эту область на сумму конечного числа простейших областей первого или второго типа, не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл по множеству G, в силу свойства аддитивности двойного интеграла, равен сумме интегралов по соответствующим областям.

10.2 Замена переменных в двойном интеграле

Пусть $G, E \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные квадрируемые области с положительной площадью.

Пусть функции

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u,v), \ (u,v) \in \overline{E}, \\ y &= \psi(u,v), \ (u,v) \in \overline{E}, \end{aligned} \tag{10.10}$$

удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции φ и ψ биективно отображают область E на область G, границу ∂E на границу ∂G. Тем самым для любой точки $(x,y) \in \overline{G}$ существует единственное решение системы уравнений (10.10):

$$\begin{aligned} u &= \varphi^{-1}(x,y), \\ v &= \psi^{-1}(x,y). \end{aligned} \tag{10.11}$$

2. Функции $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ непрерывны на $\overline{E}$.
3. Частные производные первого порядка функций φ и ψ ограничены и непрерывны на E.
4. Якобиан $J = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$ функций φ и ψ отличен от нуля на E.

При выполнении указанных выше условий функции (10.10) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками областей G и E.

Пусть (u_0, v_0), $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in E$. Образом примоугольника $N_0N_1N_2N_3 \subset E$, ограниченного прямыми $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$, при отображении (10.10) является криволинейный четырехугольник $M_0M_1M_2M_3 \subset G$, где $M_0\,(\varphi(u_0,v_0), \psi(u_0,v_0))$, $M_1\,(\varphi(u_0+\Delta u, v_0), \psi(u_0+\Delta u, v_0))$, $M_2\,(\varphi(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v), \psi(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v))$, $M_3\,(\varphi(u_0, v_0+\Delta v), \psi(u_0, v_0+\Delta v))$ (рисунок 10.7).

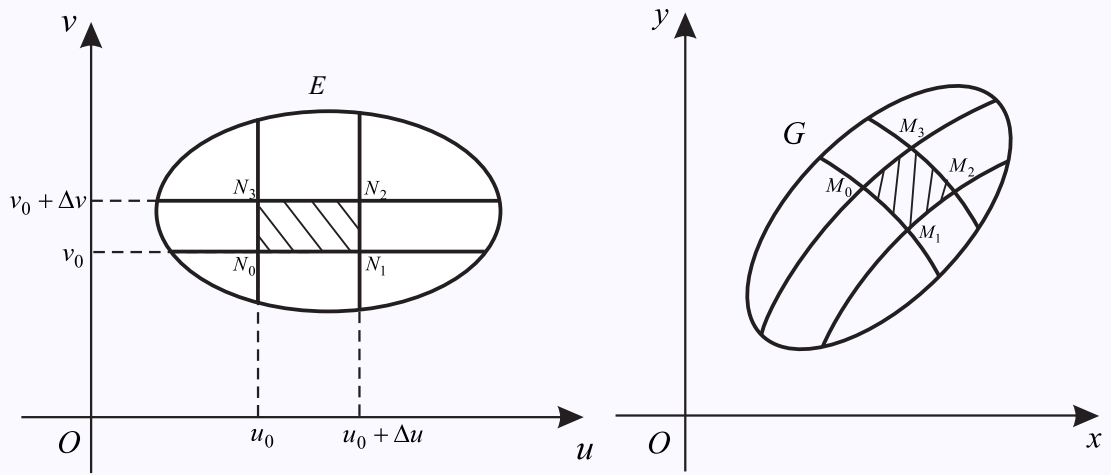


Рисунок 10.7

Выясним, как связаны между собой площади прямоугольника $N_0N_1N_2N_3 \subset E$ и криволинейного четырехугольника $M_0M_1M_2M_3 \subset G$.

Найдем площадь криволинейного четырехугольника $M_0M_1M_2M_3$ с точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с Δu, Δv, заменяя ее площадью параллелограмма, построенного на векторах

$$(\varphi(u_0 + \Delta u, v_0) - \varphi(u_0, v_0), \psi(u_0 + \Delta u, v_0) - \psi(u_0, v_0)) = (\Delta_u\varphi(u_0, v_0), \Delta_u\psi(u_0, v_0))$$

и

$$(\varphi(u_0, v_0 + \Delta v) - \varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0 + \Delta v) - \psi(u_0, v_0)) = (\Delta\varphi_v(u_0, v_0), \Delta_v\psi(u_0, v_0)) .$$

Зафиксировав $v = v_0$, мы получим функции одной переменной $\varphi_1(u) = \varphi(u, v_0)$ и $\psi_1(u) = \psi(u, v_0)$, дифференцируемые в точке u_0.

Зафиксировав $u = u_0$, мы получим функции одной переменной $\varphi_2(v) = \varphi(u_0, v)$ и $\psi_2(v) = \psi(u_0, v)$, дифференцируемые в точке v_0.

С учетом дифференцируемости функций, получим:

$$\Delta_u\varphi(u_0, v_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u,\ \alpha(\Delta u) \to 0 \text{ при } \Delta u \to 0,$$

$$\Delta_u\psi(u_0, v_0) = \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \beta(\Delta u)\Delta u,\ \beta(\Delta u) \to 0 \text{ при } \Delta u \to 0,$$

$$\Delta_v\varphi(u_0, v_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \gamma(\Delta v)\Delta v,\ \gamma(\Delta v) \to 0 \text{ при } \Delta v \to 0,$$

$$\Delta_v\psi(u_0, v_0) = \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \omega(\Delta v)\Delta v,\ \omega(\Delta v) \to 0 \text{ при } \Delta v \to 0.$$

Искомую площадь криволинейного четырехугольника $M_0M_1M_2M_3$ обозначим ΔG_k. Из аналитической геометрии известно, что площадь параллелограмма, построенного на векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов. Поэтому (здесь модуль будем обзначать mod):

$$\Delta G_k \approx mod \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \end{vmatrix} = mod \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} |\Delta u \cdot \Delta v| =$$

$$= \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\right| |\Delta u \cdot \Delta v| = |J||\Delta u \cdot \Delta v|,$$

где $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u_0, v_0) = J$ – якобиан функций φ и ψ, вычисленный в точке (u_0, v_0).

Таким образом,

$$\Delta G_k \approx |J|\Delta E_k, \tag{10.12}$$

где ΔE_k – площадь прямоугольника $N_0N_1N_2N_3$.

Теперь рассмотрим теорему о замене переменных в двойном интеграле.

Теорема 10.4. *Пусть функции* $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{E}$, *непрерывны на* $\overline{E}$ *и биективно отображают область* E *на область* G, *а границу* ∂E *на границу* ∂G, *а их частные производные первого порядка ограничены и непрерывны на* E. *Якобиан* $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ *на* E.

Если функция f *непрерывна на* $\overline{G}$, *то*

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f\left(\varphi(u,v),\ \psi(u,v)\right)|J|\,dudv. \tag{10.13}$$

◀Рассмотрим любое разбиение τ_G множества G. Для каждого $k = 1,\ldots,n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k) \in G_k$ и составляем интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k, y_k\right)\Delta G_k. \tag{10.14}$$

Так как f непрерывна на $\overline{G}$, то f интегрируема по множеству G, и

$$\lim_{\lambda_{\tau_G}\to 0} \sigma_{\tau_G} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

В силу произвольного выбора точек $(x_k, y_k) \in G_k$ положим $x_k = \varphi\left(u_k, v_k\right)$, $y_k = \psi\left(u_k, v_k\right)$, где (u_k, v_k) определяются отображением (10.11). С учетом равенства (10.12) получим:

$$\sigma_{\tau_G} \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(\varphi\left(u_k, v_k\right), \psi\left(u_k, v_k\right)\right)\left|J(u_k, v_k)\right|\Delta E_k,$$

где E_k – образ G_k при отображении (10.11), а ΔE_k – площадь фигуры E_k.

Правая часть последнего приближенного равенства есть интегральная сумма σ_{τ_E} функции

$$\Phi(u,v) = f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right)|J(u,v)|,\ (u,v) \in E,$$

которая является непрерывной на E. По теореме 12.6 функция $\Phi(u,v)$ будет интегрируемой по E, т. е. существует предел

$$\lim_{\lambda_{\tau_E}\to 0}\sigma_{\tau_E}=\iint\limits_E \Phi(u,v)dudv.$$

В силу непрерывности отображения при $\lambda_{\tau_E}\to 0$ будет и $\lambda_{\tau_G}\to 0$, причем при $\lambda_{\tau_E}\to 0$ равенство (10.12) становится точным. Тогда

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\lim_{\lambda_{\tau_G}\to 0}\sigma_{\tau_G}=\lim_{\lambda_{\tau_E}\to 0}\sigma_{\tau_E}=\iint\limits_E f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\,|J(u,v)|\,dudv.\ \blacktriangleright$$

10.3 Якобиан в полярных криволинейных координатах

Чаще всего на практике при замене переменных в двойном интеграле используют так называемые полярные координаты, которые связаны с декартовыми координатами с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi, \end{cases} \tag{10.15}$$

где $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

Найдем якобиан функций (10.15):

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r,$$

причем $r\neq 0$ $(r>0)$ везде, кроме точки $(0,0)$.

Пример 10.3. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_G \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

где $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 2x + 1 + y^2 \leqslant 1\}$.

◀Преобразуем границу области интегрирования к каноническому виду:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1,\ \ (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Изобразим область интегрирования на рисунке 10.8.

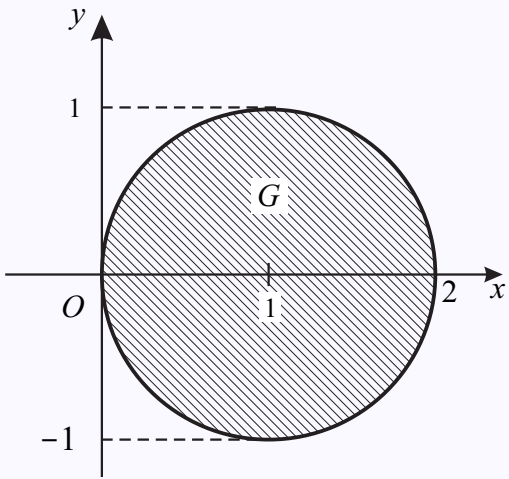


Рисунок 10.8

Переходим к полярным координатам. Уравнение границы области интегрирования в полярной системе координат имеет вид

$$r^2 = 2r\cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi.$$

Так как область интегрирования симметрична относительно оси Ox, а подынтегральная функция симметрична относительно обеих координатных осей, то

$$I = 2\iint\limits_{G_1} \sqrt{4-r^2}\,r\,dr\,d\varphi,$$

где

$$G_1 = \left\{(r,\varphi):\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < r < 2\cos\varphi\right\}.$$

Таким образом,

$$I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \left(4-r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(4-r^2\right) =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(4-4\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi - 8\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{16}{3}\left(-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2\varphi\right) d\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{16}{3}\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теоремы о вычислении двойного интеграла для случаев прямоугольной и криволинейной областей интегрирования.
2. Дайте определение якобиана.
3. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
4. Вычислите якобиан в полярных криволинейных координатах.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Вычисление двойных интегралов

Задание 1. Записать двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов двумя способами, если область интегрирования P есть фигура, ограниченная линиями

$$x = 0,\ y = 0,\ x^2 + y^2 = r^2,$$

причем $x \geqslant 0$.

◀Изобразим область интегрирования P на рисунке 10.9.

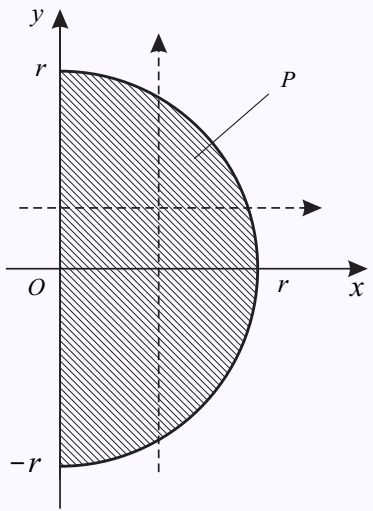


Рисунок 10.9

Область интегрирования является простейшей областью интегрирования первого типа:

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant r,\ -\sqrt{r^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2-x^2}\right\}.$$

Значит,

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int\limits_0^r dx \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)dy.$$

Область интегрирования является также простейшей областью интегрирования второго типа:

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{r^2-y^2},\ -r \leqslant y \leqslant r\right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int\limits_{-r}^r dx \int\limits_0^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)dx. \blacktriangleright$$

Замечание 10.4. При определении переменных пределов интегрирования полезно пользоваться следующим правилом.

Пусть P – простейшая область интегрирования первого типа, причем $a \leqslant x \leqslant b$ (рисунок 10.10). Чтобы получить пределы интегрирования по y, пересечем P лучом, параллельным и одинаково направленным с осью Oy. Ту часть границы области, которую луч пересечет при «входе» в область интегрирования, будем называть нижней границей области интегрирования, а задающее нижнюю границу области интегрирования уравнение, решенное относительно y, служит для установления нижнего предела интегрирования по y $[y = y_1(x)]$. Ту часть границы области интегрирования, которую луч пересекает, выходя

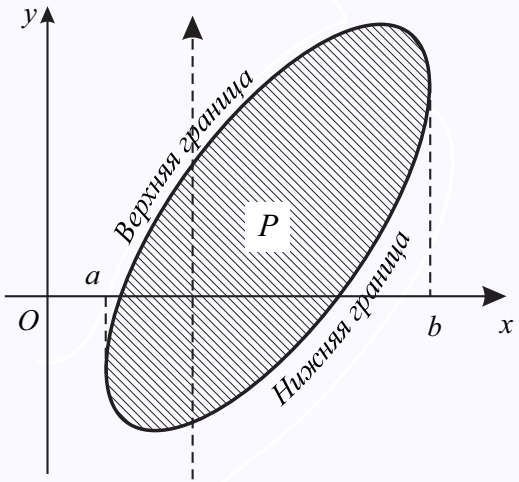


Рисунок 10.10

из области интегрирования, будем называть верхней границей области интегрирования, а ее уравнение, решенное относительно y, служит для установления верхнего предела интегрирования по y $[y = y_2(x)]$.

Аналогичные рассуждения можно провести для простейшей области интегрирования второго типа.

Задание 2. Записать двойной интеграл $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов (двумя способами), если P – фигура, ограниченная прямыми $x+y=1$, $x-y=1$, $y-x=1$, $x+y=-1$.

◀Изобразим область интегрирования P на рисунке 10.11. Постоянные пределы интегрирования по x будут -1 и $+1$. Проведем луч, параллельный и одинаково направленный с осью Oy, через область интегрирования P. Как нижняя, так и верхняя границы области не могут быть заданы с помощью одного аналитического выражения. Поэтому разобьем область интегрирования на две части прямой $x=0$.

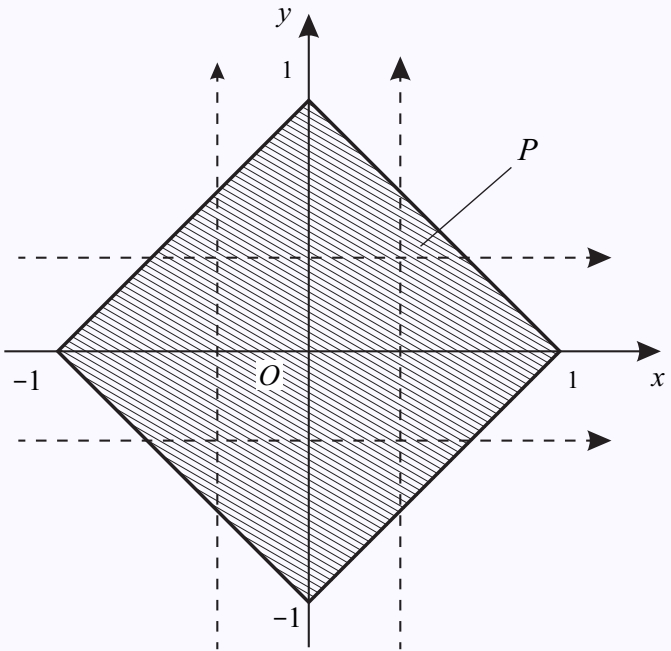


Рисунок 10.11

Таким образом,

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{-x+1} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично при выборе постоянных пределов по y получим:

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y-1}^{y+1} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{-y+1} f(x,y)\,dx. \blacktriangleright$$

Задание 3. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)\,dy.$$

◀Восстановим область интегрирования. Рассматривая оба слагаемых одновременно, заключаем, что нижняя граница области интегрирования на участках $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $1 \leqslant x \leqslant 3$ определяется одинаково: уравнением $y = \frac{x^2}{9}$. Верхняя же граница области интегрирования на участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ определяется уравнением $y = x$, а на участке $1 \leqslant x \leqslant 3$ – уравнением $y = 1$. Этого достаточно, чтобы построить область интегрирования P (рисунок 10.12).

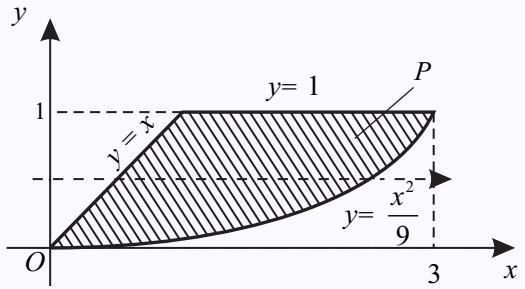


Рисунок 10.12

Из рисунка 10.12 видно, что P является простейшей областью интегрирования второго типа:

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant 3\sqrt{y}\right\}.$$

Искомый повторный интеграл представится в виде $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{3\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. ►

Задание 4. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_P \sqrt{x+y}dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

◄Изобразим область интегрирования на рисунке 10.13.

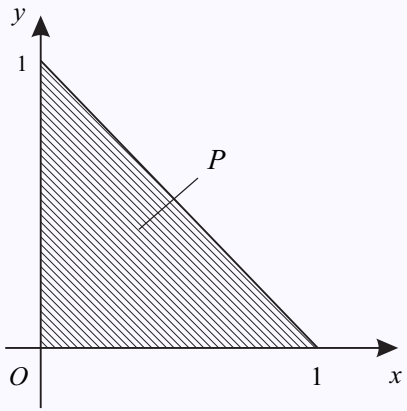


Рисунок 10.13

$$P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\right\}.$$

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \sqrt{x+y}dy = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{1-x} dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(1 - x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$ ►

Задание 5. Вычислить интеграл $\iint\limits_P (2x-y)\,dxdy$, где P – фигура, ограниченная прямыми

$$x+y=1,\quad x+y=2,\quad 2x-y=1,\quad 2x-y=3.$$

◀Изобразим область интегрирования P на рисунке 10.14.

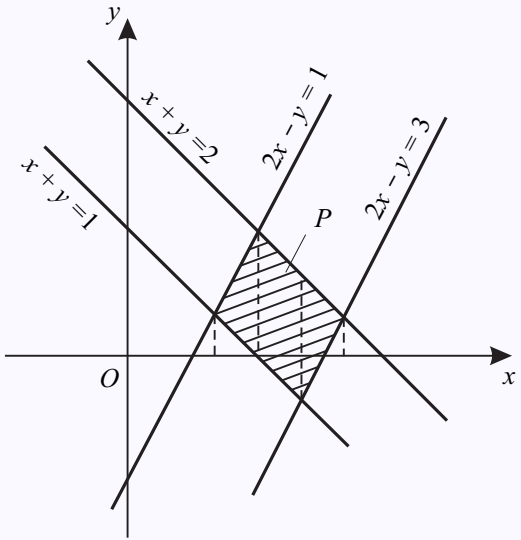


Рисунок 10.14

Из рисунка видно, что для вычисления данного интеграла P следует разбить на три части, как показано штриховыми линиями. Задача, таким образом, сводится к вычислению трех двойных интегралов. Однако можно избежать такого громоздкого способа решения, если ввести новые переменные, положив

$$x+y=u,\quad 2x-y=v. \tag{10.16}$$

Тогда прямые $x + y = 1$ и $x + y = 2$ в системе координат xOy преобразуются в прямые $u = 1$ и $u = 2$ в системе координат uOv (рисунок 10.15), а прямые $2x - y = 1$ и $2x - y = 3$ – в прямые $v = 1$ и $v = 3$. Область интегрирования P плоскости xOy преобразуется в прямоугольник Q плоскости uOv со сторонами, параллельными координатным осям.

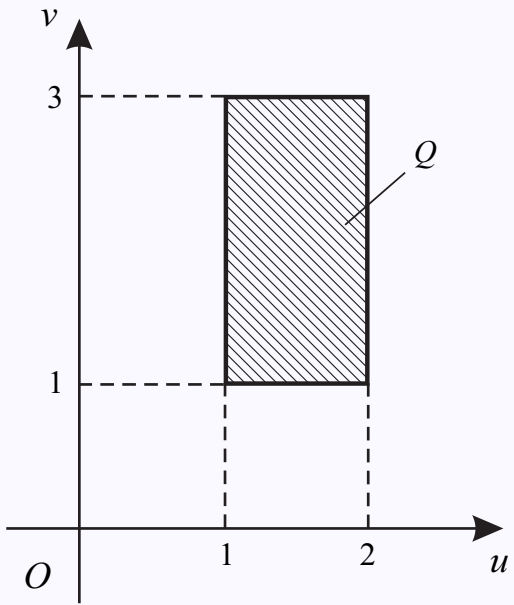


Рисунок 10.15

При преобразовании интеграла к новым переменным нужно сначала получить выражения x и y через u и v из равенства (10.16):

$$x = \frac{u+v}{3}, \quad y = \frac{2u-v}{3}.$$

Вычислим якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\iint\limits_P (2x - y)\,dxdy = \iint\limits_P \frac{1}{3} v du dv = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 du \int\limits_1^3 v dv = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 \frac{v^2}{2}\Big|_1^3 du =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\int\limits_1^2 du = \frac{1}{3}\cdot 4 \cdot 1 = \frac{4}{3}. \blacktriangleright$$

Замечание 10.5. Если подынтегральная функция или уравнение, определяющее границу области интегрирования, содержат сумму $x^2 + y^2$, то в большинстве случаев упрощение интеграла достигается преобразованием к его полярным координатам. Это объясняется тем, что данная сумма в полярных координатах получает весьма простое выражение

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2.$$

Если в состав подынтегральной функции или уравнения границы области интегрирования входит сумма вида $ax^2 + by^2$; $a > 0$, $b > 0$, то пользуются обобщенной полярной системой координат:

$$x = \frac{r}{\sqrt{a}}\cos\varphi, \quad y = \frac{r}{\sqrt{b}}\sin\varphi.$$

Тогда

$$ax^2 + by^2 = a\left(\frac{r}{\sqrt{a}}\cos\varphi\right)^2 + b\left(\frac{r}{\sqrt{b}}\sin\varphi\right)^2 = r^2,$$

а якобиан в этом случае равен $J = \frac{r}{\sqrt{ab}}$.

Задание 6. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_P \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy$, где P – верхний полукруг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

◀Используем переход к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда

$$x^2+y^2 = r^2, \quad \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}, \quad J(r,\varphi) = r,$$

и данный интеграл примет вид $\iint\limits_P \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy = \iint\limits_Q \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,rdrd\varphi$.

Рассмотрим область интегрирования P (рисунок 10.16).

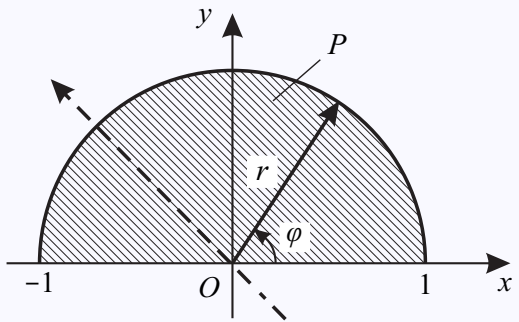


Рисунок 10.16

Уравнение окружности в полярных координатах примет вид $r = 1$ (предполагается, что полярная ось совпадает с положительным направлением оси абсцисс). В пределах области интегрирования P полярный угол φ изменяется от 0 до π, а полярный радиус r изменяется от 0 до 1 (луч, исходящий из полюса и пересекающий область интегрирования, «входит» в область при $r = 0$, а «выходит» из нее при $r = 1$).

Следовательно,

$$I = \iint\limits_Q \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r\,dd\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r\,dr = \pi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}} r\,dr = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_P \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, где область интегрирования P ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$.

◀Область интегрирования P изображена на рисунке 10.17.

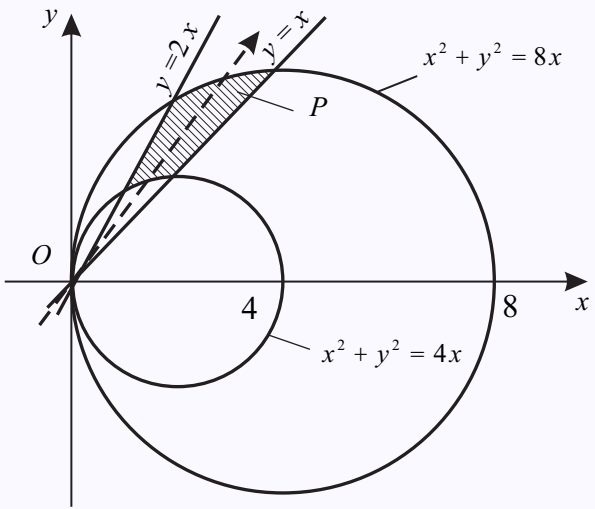


Рисунок 10.17

Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда $\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = r^{-4}$. Криволинейные участки границы области интегрирования задаются уравнениями

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi, \quad \text{или} \quad r = 4\cos\varphi,$$

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 8r\cos\varphi, \quad \text{или} \quad r = 8\cos\varphi,$$

а прямолинейные участки уравнениями

$$r\sin\varphi = r\cos\varphi, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi = 1, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$r\sin\varphi = 2r\cos\varphi, \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\varphi = 2, \quad \text{откуда} \quad \varphi = \operatorname{arctg} 2.$$

Итак, угол φ изменяется в постоянных пределах от $\frac{\pi}{4}$ до arctg2. Чтобы найти пределы изменения r, пересечем область интегрирования P лучом, исходящим из полюса. При «входе» в область интегрирования он пересечет часть границы, определяемой уравнением $r = 4\cos\varphi$, а при «выходе» – уравнением $r = 8\cos\varphi$.

Имея в виду, что при данном преобразовании якобиан $J = r$, можем представить двойной интеграл в новых координатах следующим образом:

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r^{-4} r \; dr = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{dr}{r^3} = \frac{3}{128}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy, \tag{10.17}$$

где $G = \left\{ \{(x, y) \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y - x \leqslant 0,\ y - \frac{1}{2}x \geqslant 0 \right\}$.

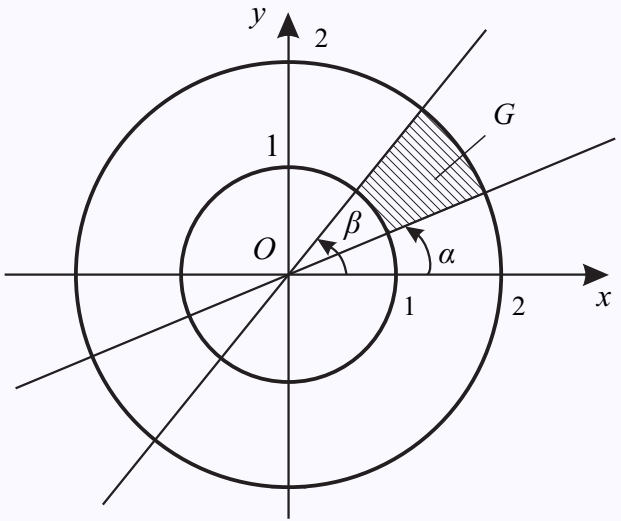


Рисунок 10.18

◀Изобразим область интегрирования G на рисунке 10.18.

Определим углы α и β. Угол $\beta = \frac{\pi}{4}$, а $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. При вычислении интеграла (10.17) перейдем к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$\sqrt{1+x^2+y^2} = \sqrt{1+(x^2+y^2)} = \sqrt{1+r^2},$$

$$G = \left\{(r,\varphi):\ 1 \leqslant r \leqslant 2,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}.$$

$$\iint\limits_G \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_{G_1} \sqrt{1+r^2}rdrd\varphi = \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_1^2 \sqrt{1+r^2}rdr\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\int\limits_1^2 \left(1+r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+r^2\right) = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\left.\frac{\left(1+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\right)\left(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{125} - \sqrt{8}\right). \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_G \frac{(x+y)^2}{x}dxdy,$$

где

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x \leqslant y \leqslant 3-x, \ \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2x\right\}.$$

◀Изобразим область интегрирования G на рисунке 10.19. Если вычислять, например, двойной интеграл в координатах x и y, то необходимо область интегрирования G разбить на три частичных множества G_i, $i = \overline{1,3}$ (в этом случае внешнее интегрирование берем по x). Мы же воспользуемся заменой переменных в двойном интеграле. Преобразуем аналитические выражения, задающие G:

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x+y \leqslant 3, \ \frac{1}{2} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 2\right\}.$$

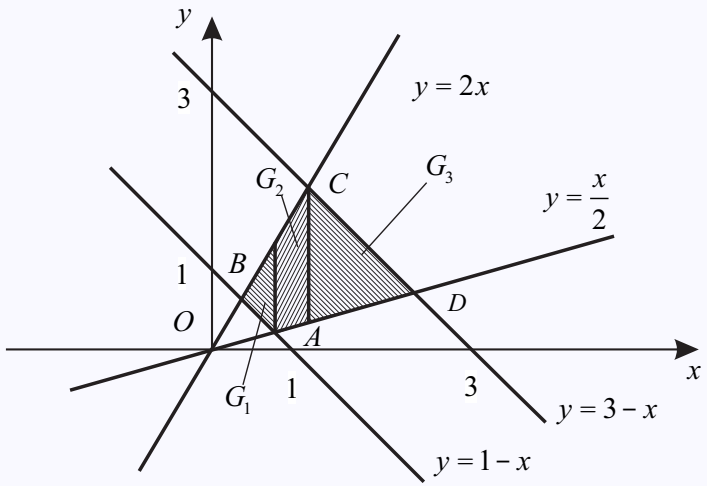


Рисунок 10.19

Вводим подстановку: $u = x + y$ и $v = \frac{y}{x}$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = u, \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$$

находим x и y.

$$y = vx,\ x + y = u,\ x(1 + v) = u,\ x = \frac{u}{v+1} = \varphi(u, v),\ y = \frac{uv}{v+1} = \psi(u, v).$$

Дальше находим якобиан

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^3} + \frac{uv}{(v+1)^3} = \frac{u}{(v+1)^3}(v+1) = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►
258
Приложение
Закрыть

В системе координат vOu область интегрирования (рисунок 10.20):

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R} : 1 \leqslant u \leqslant 3,\ \frac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2\right\}.$$

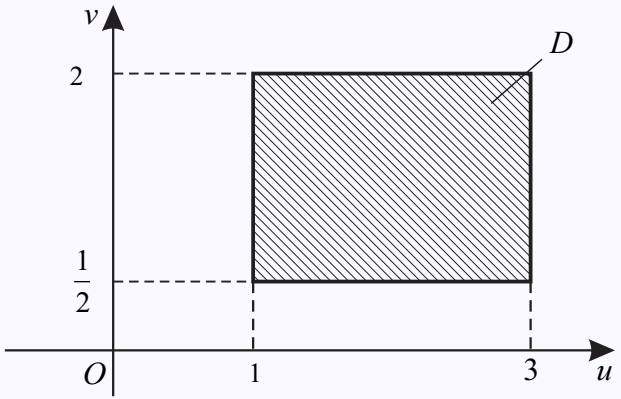


Рисунок 10.20

Видно, что $J = |J| = \frac{u}{(v+1)^2}$. По формуле замены переменных в двойном интеграле находим

$$I = \iint\limits_D \frac{u^2(v+1)}{u} \cdot \frac{u}{(v+1)^2} du dv = \iint\limits_D \frac{u^2}{v+1} du dv =$$

$$= \int\limits_1^3 u^2 du \int\limits_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dv}{v+1} = \frac{u^3}{3}\Big|_1^3 \ln(v+1)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{1}{3}(27-1)\left(\ln 3 - \ln\frac{3}{2}\right) = \frac{26}{3}\ln 2. \blacktriangleright$$

Задание 10. Вычислите $\iint\limits_G xydxdy$, где G – фигура, ограниченная кривой $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2y}{5^3}$, находящейся в первом координатном угле.

◀В этой задаче перейдем к обобщенным полярным координатам: $\begin{cases} x=2r\cos\varphi, \\ y=3r\sin\varphi. \end{cases}$

Используя обобщенные полярные координаты, преобразуем уравнение кривой:

$$\left(\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9r^2\sin^2\varphi}{9}\right)^2=\frac{4r^2\cos^2\varphi\cdot 3r\sin\varphi}{5^3},\ r=\frac{12}{5^3}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi.$$

Изобразим область интегрирования на рисунке 10.21.

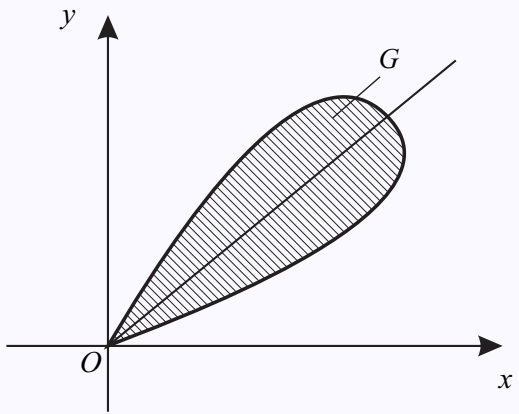


Рисунок 10.21

Вначале определим угол в первой четверти, где значение r наибольшее. Рассмотрим функцию

$$g(\varphi)=\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

$$g'(\varphi) = 2\cos\varphi(-\sin\varphi)\sin\varphi + \cos^2\varphi\cdot\cos\varphi = \cos\varphi(\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi).$$

Если $\cos\varphi = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $r = 0$.

Пусть $\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 0$, $2\operatorname{tg}^2\varphi = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$, $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{17}{30} < \frac{5}{7}$, т. е. $30^\circ < \varphi < 45^\circ$.

Найдем якобиан. В нашем случае

$$x = 2r\cos\varphi = \mu(r,\varphi),\ \ y = 3r\sin\varphi = \psi(r,\varphi).$$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \mu'_r & \mu'_\varphi \\ \psi'_r & \psi'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & -2r\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\left(6\cos^2\varphi + 6\sin^2\varphi\right) = 6r = |J|.$$

Вычисляем интеграл

$$\iint\limits_G xydxdy = \iint\limits_D 2r\cos\varphi\cdot 3r\sin\varphi\cdot 6rdrd\varphi = 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{12}{5^3}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi} r^3dr =$$

$$= 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\frac{12}{5^3}\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi} d\varphi = 9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{12^4}{5^{12}}\cos^9\varphi\cdot\sin^5\varphi d\varphi =$$

$$= -9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{12^4}{5^{12}}\cos^9\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)^2 d(\cos\varphi) = -\frac{9\cdot 12^4}{5^{12}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\varphi(1-2\cos^2\varphi+\cos^4\varphi)d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{9\cdot 12^4}{5^{12}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^9\varphi - 2\cos^{11}\varphi + \cos^{13}\varphi)d(\cos\varphi) = -\frac{9\cdot 12^4}{5^{12}}\left(\left.\frac{\cos^{10}\varphi}{10}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left.\frac{\cos^{12}\varphi}{12}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{\cos^{14}\varphi}{14}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{9\cdot 12^4}{5^{12}}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} + \frac{1}{14}\right) = \frac{9\cdot 12^4}{5^{12}}\cdot\frac{1}{210} = \frac{2^7\cdot 3^5}{7\cdot 5^{13}}.\ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1.1 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$;

1.2 $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

1.3 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$;

1.4 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)\,dy$;

1.5 $\int\limits_{-6}^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x;y)\,dx$;

1.6 $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx$;

1.7 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx$;

1.8 $\int\limits_{-3}^0 dx \int\limits_{-x}^3 f(x,y)\,dy + \int\limits_0^3 dx \int\limits_x^3 f(x,y)\,dy$;

1.9 $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy \int\limits_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

1.10 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x,y)\,dy$.

2. Вычислить данные повторные и двойные интегралы:

2.1 $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$;

2.2 $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} (x^2+y^2)\,dy$;

2.3 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr$;

2.4 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$;

2.5 $\iint\limits_P (x-y)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми

$$y=0,\ y=x,\ x+y=2;$$

2.6 $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2}dxdy$, где область интегрирования P ограничена линиями

$$x=2,\ y=x,\ xy=1;$$

2.7 $\iint\limits_P e^{\frac{x}{y}}dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми

$$x=y^2,\ x=0,\ y=1;$$

2.8 $\iint\limits_P \cos(x+y)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми

$$x=0,\ y=\pi,\ y=x;$$

2.9 $\iint\limits_P \frac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}}$, где область интегрирования P ограничена линиями

$$x=0,\ y^2=a^2-ax;$$

2.10 $\iint\limits_P dxdy$, где область интегрирования P ограничена линиями

$$y=2-x,\ y^2=4x+4.$$

3. Вычислить интегралы с помощью перехода к полярным координатам:

3.1 $\iint\limits_P \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где P – круг $x^2 + y^2 \leqslant rx$;

3.2 $\iint\limits_P y dxdy$, где P – верхний полукруг радиуса a с центром в точке $(a, 0)$;

3.3 $\iint\limits_P (x^2 + y^2)\,dxdy$, где P – круг $x^2 + (y + 2)^2 \leqslant 4$;

3.4 $\iint\limits_P \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dxdy$, где P – часть круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, лежащая в первом квадранте;

3.5 $\iint\limits_P dxdy$, где область интегрирования P ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$$

4. Вычислить интегралы с помощью замены переменных указанными способами:

4.1 $\iint\limits_P (x^2 + y^2)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена окружностями

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + y^2 + 2x = 0.$$

Положить $x + 1 = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

4.2 $\iint\limits_P xy dxdy$, где область интегрирования P ограничена линиями $xy = 1$, $x + y = \frac{5}{2}$.

Положить $x + y = u$, $xy = v$;

4.3 $\iint\limits_P e^{k(x+y)^2} dxdy$, где P определяется неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

Положить $x = u - uv$, $y = uv$;

4.4 $\iint\limits_P dxdy$, где область интегрирования P ограничена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$;

4.5 $\iint\limits_P x^2 y dxdy$, где область интегрирования P ограничена гиперболами $xy = p$, $xy = q$ $(0 < p < q)$, прямыми $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b)$ и расположена в первом квадранте.

Положить $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$, $y = \sqrt{uv}$.

5. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 11
Геометрические и физические приложения двойного интеграла

11.1 Геометрические приложения двойного интеграла

Из задачи об объеме криволинейного цилиндра, приводящей к понятию двойного интеграла, следует геометрический смысл двойного интеграла. С геометрической точки зрения двойной интеграл

$$V = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \tag{11.1}$$

есть **объем криволинейного цилиндра**, у которого нижнее основание есть ограниченная замкнутая квадрируемая область $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$. «Сбоку» указанное тело ограничено цилиндрической поверхностью с направляющей ∂G и образующими, параллельными оси Oz. Верхнее основание цилиндра есть график непрерывной функции $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$.

Замечание 11.1. Если в (11.1) $f(x,y) = 1$, то с геометрической точки зрения

$$S = \iint\limits_G dxdy \tag{11.2}$$

есть **площадь плоской фигуры** G.

Пример 11.1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x + 1 = z^2,\ x - 1 = -z^2,\ y = 0,\ y = x^2 + z^2.$$

◀Тело симметрично относительно оси Oy (оно расположено в первом, втором, пятом и шестом октантах). Находим объем тела в первом октанте и умножаем полученное число на 4, получим объем всего тела.

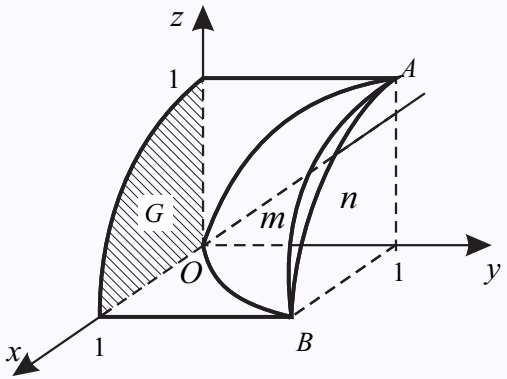


Рисунок 11.1

AmB – кривая пересечения поверхностей $y = x^2+z^2$ и $x-1 = -z^2$; AnB – дуга окружности $\begin{cases} y = 1, \\ y = x^2 + z^2 \end{cases}$ в первом октанте (рисунок 11.1).

$$V = 4 \iint\limits_G \left(x^2 + z^2\right) dxdz = \left[\begin{array}{l} x - 1 = -z^2,\ z^2 = 1 - x, \\ z = \sqrt{1-x},\ z \geqslant 0 \end{array} \right] = 4 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x}} \left(x^2 + z^2\right) dz =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 \left(x^2 z \Big|_0^{\sqrt{1-x}} + \frac{z^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{1-x}} \right) dx = 4 \int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx + 4 \int\limits_0^1 \frac{1}{3} \sqrt{(1-x)^3} dx =$$

$$= 4 \left[\begin{array}{l|l} \sqrt{1-x} = t, & 1 - x = t^2, \\ t_{\text{н}} = 1, & x = 1 - t^2, \\ t_{\text{в}} = 0 & dx = -2tdt \end{array} \right] - \frac{4}{3} \cdot \frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = 4 \int\limits_1^0 \left(1 - t^2\right)^2 t \left(-2t\right) dt + \frac{8}{15} = \frac{8}{7} \text{ (куб. ед.)}. \blacktriangleright$$

Пример 11.2. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(3x^2+2y^2)$, $a>0$.

◀Преобразуем уравнение кривой, выполнив переход к полярной системе координат. Получим:

$$r^4 = a^2r^2\left(3\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right);\ r^2 = a^2\left(\cos^2\varphi + 2\right);\ r = a\sqrt{\cos^2\varphi + 2}.$$

Построим кривую в полярной системе координат, полюс которой совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось – с положительным направлением оси абсцисс (рисунок 11.2).

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
r	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{3}a$

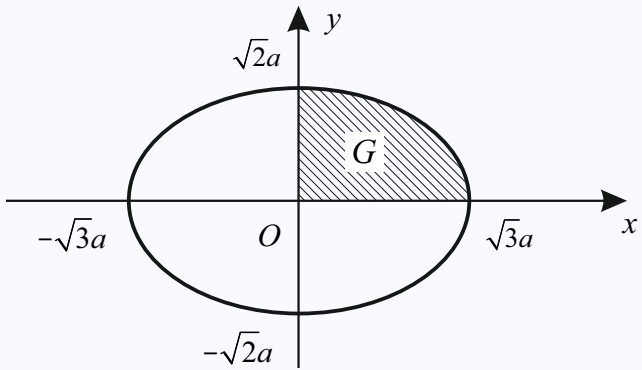


Рисунок 11.2

Вычисляем искомую площадь плоской фигуры. В силу симметрии фигуры относительно начала координат имеем:

$$S = 4\iint\limits_G dxdy = 4\iint\limits_D rdrd\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos^2\varphi+2}} rdr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{\cos^2\varphi+2}} d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\left(\cos^2\varphi+2\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right) = 2a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi a^2}{2}\ \text{(кв.ед.)}\,.\ \blacktriangleright$$

11.2 Масса плоской неоднородной фигуры

Из задачи о массе материальной плоской неоднородной фигуры (пластинки) G следует, что эта масса вычисляется по формуле

$$m_G = \iint\limits_G \gamma(x,y)\,dxdy, \tag{11.3}$$

где $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, имеющая границу ∂G площади нуль; функция $\gamma : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{G}$.

Пример 11.3. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых, соответственно, равны 1 и 3. Зная, что плотность материала пропорциональна расстоянию от центра окружности, найти массу кольца, если плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

◀Введем декартовую систему координат с началом в центре кольца (рисунок 11.3).
Вычислим массу кольца по формуле $m = \iint\limits_G \gamma(x,y)\,dxdy$.

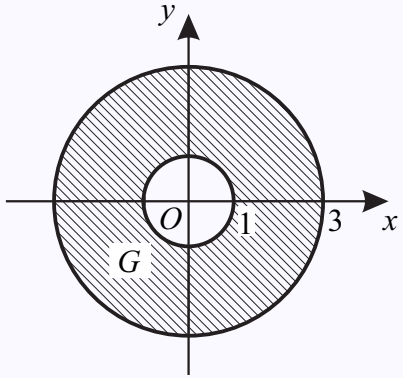


Рисунок 11.3

В нашем случае плотность $\gamma(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$. В силу симметрии кольца относительно начала системы координат имеем:

$$m = \iint\limits_G k\sqrt{x^2+y^2}dxdy = k\iint\limits_D r^2 dr d\varphi = 4k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^3 r^2 dr =$$

$$= 4k\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_1^3 = k\frac{2}{3}\pi\left(3^3-1^3\right) = \frac{52}{3}\pi k \ \text{(ед. массы)}.$$

Воспользуемся граничными условиями. Длина единичной окружности $C = 2\pi$. Ее масса $m_c = 2\pi\cdot 1 = 2\pi$. С другой стороны $m_c = 2\pi\cdot k\cdot 1 = 2\pi k$. Из равенства $2\pi k = 2\pi$ находим, что $k = 1$.

$$m = \frac{52}{3}\pi \text{ (ед. массы)}. \blacktriangleright$$

Замечание 11.2. В [2, лекция 15] рассмотрен интегральный метод, который применялся для решения ряда прикладных задач (вычисление массы, статических моментов, центра тяжести материальной кривой или материальной плоской фигуры и т. п.). Указанный метод легко переносится на двумерный случай.

При решении задач о нахождении массы плоской неоднородной фигуры, объема криволинейного цилиндра и др. нами использован один и тот же прием, а именно:

1) искомой постоянной величине Q, связанной с некоторым ограниченным квадрируемым множеством $G \subset \mathbb{R}^2$ и некоторой функцией $f : G \to \mathbb{R}$, ставится в соответствие интегральная сумма функции f:

$$Q(f;G) \approx \sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta G_k,$$

где ΔG_k – площадь частичного множества G_k $(k = \overline{1,n})$;

2) точное значение величины $Q(f;G)$ находится по формуле

$$Q(f;G) = \lim_{\lambda_{\tau_G}\to 0} \sigma_{\tau_G} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy,$$

причем величина $Q(f;G)$ обладает следующими двумя свойствами:

а) свойство аддитивности: для любого разбиения τ_G

$$Q(f;G) = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k, \quad \Delta Q_k = Q(f;G_k);$$

б) свойство линейности в малом: для любого частичного множества G_k

$$\Delta Q_k \approx f(x_k, y_k)\Delta G_k.$$

Покажем, что если величина $Q(f;G)$, где функция $f : G \to \mathbb{R}$ интегрируема по G, обладает свойствами аддитивности и линейности в малом, то ее значение равно двойному интегралу $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$.

В силу свойств аддитивности и линейности в малом

$$Q(f;G) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta G_k.$$

Правая часть последнего приближенного равенства есть интегральная сумма σ_{τ_G} функции f. Тогда

$$Q(f;G) = \lim_{\lambda_{\tau_G}\to 0} \sigma_{\tau_G} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

Определение 11.1. *Подынтегральное выражение $f(x,y)dxdy$ называется* ***элементом величины*** $Q(f;G)$ *и обозначается* $dQ = f(x,y)dxdy$.

Если величина $Q(f;G)$ обладает указанными выше свойствами, то для ее вычисления достаточно найти элемент величины $dQ = f(x,y)dxdy$, а потом вычислить интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$.

11.3 Статические моменты

Статическим моментом точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на расстояние d точки до оси l.

$$M_l = md. \tag{11.4}$$

Найдем статические моменты материальной пластинки G относительно координатных осей. Применим для этого интегральный метод. Элемент массы материальной пластинки G обозначим dm. Тогда $dm = \gamma(x,y)dxdy$. Элементы статических моментов пластинки:

а) $dM_{Ox} = y\gamma(x,y)dxdy$ – элемент статического момента пластинки относительно оси Ox;

б) $dM_{Oy} = x\gamma(x,y)dxdy$ – элемент статического момента пластинки относительно оси Oy.

Тогда статические моменты будут вычисляться по формулам

$$M_{Oy} = \iint\limits_G x\gamma(x,y)dxdy, \tag{11.5}$$

$$M_{Ox} = \iint\limits_G y\gamma(x,y)dxdy. \tag{11.6}$$

Пример 11.4. Найти статический момент круга радиуса R относительно его касательной ($\gamma(x,y) = 1$).

◀Поместим круг на координатную плоскость так, чтобы касательная совпадала с осью Ox, точка касания – начало координат (круг – в верхней полуплоскости, рисунок 11.4).

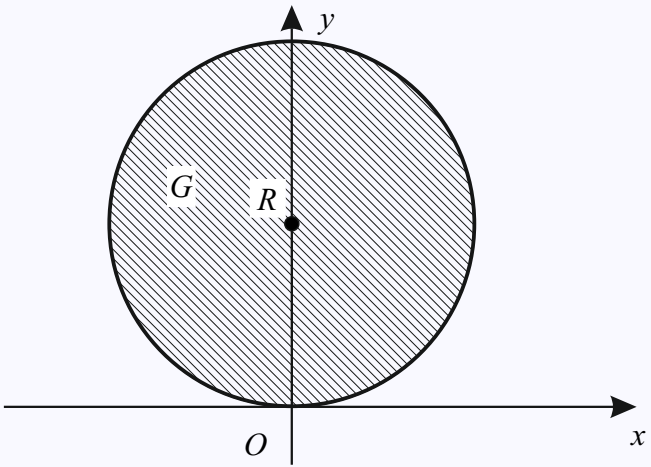


Рисунок 11.4

Уравнение окружности: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$ или $x^2 + y^2 - 2yR + R^2 = R^2$; уравнение окружности в полярной системе координат: $r^2 = 2rR\sin\varphi$, $r = 2R\sin\varphi$.

По формуле (11.6) находим статический момент, считая $\gamma(x,y) = 1$.

$$M_{Ox} = \iint\limits_G y dxdy = \iint\limits_D r\sin\varphi \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{2R\sin\varphi} r^2 dr = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2R\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \cdot 8R^3\sin^3\varphi d\varphi = \frac{8R^3}{3}\int\limits_0^{\pi} (\sin^2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{8R^3}{3}\int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \frac{8R^3}{3}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{2R^3}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi = \pi R^3. \blacktriangleright$$

11.4 Координаты центра масс материальной пластинки

Определение 11.2. ***Центром тяжести (центром масс)*** *пластинки G называется такая точка $M_c(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$, что если в этой точке сосредоточить всю массу пластинки G, то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут соответственно равны статическим моментам пластинки G относительно координатных осей.*

Из определения 11.2 получаем формулы для вычисления координат (x_c, y_c) центра тяжести пластинки G

$$m_G \cdot y_c = M_{0x} \quad \text{и} \quad m_G \cdot x_c = M_{0y},$$

$$x_c = \frac{M_{0y}}{m_G}, \quad y_c = \frac{M_{0x}}{m_G}, \tag{11.7}$$

где M_{Ox}, M_{Oy} – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy, m_G – масса пластинки.

Пример 11.5. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки G, имеющей форму кругового сектора с центральным углом α и радиусом R.

◀Воспользуемся формулами (11.7). Масса сектора при $(\gamma = 1)$ будет численно равна площади сектора. Тогда $m_G = \frac{\alpha}{2}R^2$.

Находим статические моменты по формулам (11.5) и (11.6).

$$M_{0x} = \iint\limits_G y dx dy = \iint\limits_D r\sin\varphi \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{\alpha} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr = -\cos\varphi|_0^{\alpha} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = -(\cos\alpha - 1)\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{1-\cos\alpha}{3}R^3;$$

$$M_{oy} = \iint\limits_G x dx dy = \iint\limits_D r\cos\varphi \cdot r dr d\varphi = \int\limits_0^{\alpha} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{R} r^2 dr = \sin\varphi|_0^{\alpha} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{\sin\alpha}{3}R^3.$$

Дальше находим координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\frac{\sin\alpha}{3}R^3}{\frac{\alpha}{2}R^2} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};\ y_c = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{3}R^3}{\frac{\alpha}{2}R^2} = \frac{2R(1-\cos\alpha)}{3\alpha}.$$

Получили центр тяжести указанного сектора:

$$M_c(x_c, y_c) = M_c\left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha},\ \frac{2R(1-\cos\alpha)}{3\alpha}\right).$$

Очевидно, что центр тяжести (точка M_c) лежит на биссектрисе угла α. Найдем расстояние от точки M_c до вершины сектора (начало координат):

$$d(O, M_c) = \sqrt{\frac{4}{9\alpha^2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 R^2 + \frac{16}{9\alpha^2}\sin^4\frac{\alpha}{2}R^2} = \frac{4R}{3\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$M_c(x_c, y_c) = M_c\left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha},\ \frac{2R(1-\cos\alpha)}{3\alpha}\right).\ ▶$$

11.5 Момент инерции материальной пластинки

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называют произведение массы m на квадрат расстояния d до оси l.

Исходя из указанного определения и применяя интегральный метод, получим:

а) $dI_{Ox} = y^2\gamma(x,y)\,dxdy$ – элемент момента инерции пластинки G относительно оси Ox ($\gamma(x,y)$ – плотность пластинки G);

б) $dI_{Oy} = x^2\gamma(x,y)\,dxdy$ – элемент момента инерции пластинки G относительно оси Oy;

в) $dI_O = (x^2+y^2)\,\gamma(x,y)\,dxdy$ – элемент момента инерции пластинки G относительно начала координат.

Тогда соответствующие моменты инерции:

$$I_{Ox} = \iint\limits_G y^2\gamma(x,y)\,dxdy, \tag{11.8}$$

$$I_{Oy} = \iint\limits_G x^2\gamma(x,y)\,dxdy, \tag{11.9}$$

$$I_O = \iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy. \tag{11.10}$$

Пример 11.6. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки плотности γ_0, ограниченной линиями

$$x^2+y^2=9,\quad x+y=0,\quad x-y=0\quad (x\geqslant 0).$$

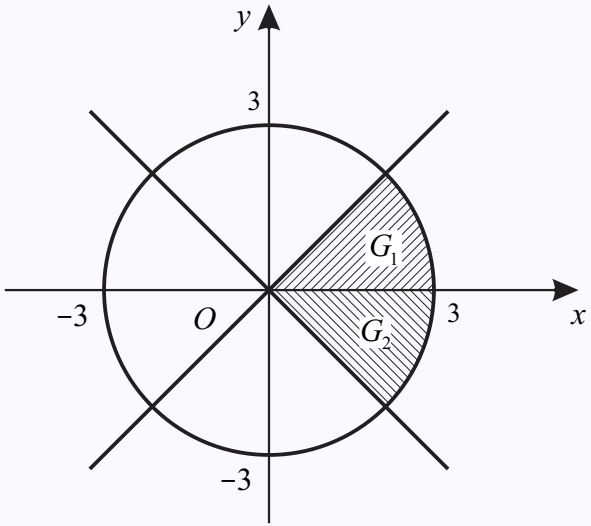


Рисунок 11.5

◀Для нахождения момента инерции используем формулу (11.10), а также то, что подынтегральная функция симметрична относительно обеих координатных осей:

$$I_O = 2 \iint\limits_{G_1} \left(x^2 + y^2\right) \gamma_0 dxdy = 2\gamma_0 \iint\limits_{D_1} r^2 \cdot rdrd\varphi = 2\gamma_0 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^3 r^3 dr = \frac{81\gamma_0\pi}{8}.$$

При вычислении двойного интегрирования была учтена симметрия относительно оси Ox как области интегрирования, так и подынтегральной функции.▶

11.6 Площадь гладкой поверхности

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная квадрируемая область с положительной площадью.

Напомним, что гладкой поверхностью S называют график функции $f : G \to \mathbb{R}$, имеющей на G непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Возьмем любое разбиение τ_G. Произвольно выбираем точки $(x_k, y_k) \in G_k$ $(k = \overline{1,n})$. Строим частичные цилиндрические поверхности с направляющими ∂G_k и образующими, параллельными оси Oz. Точкам $(x_k, y_k) \in G_k$ соответствуют на поверхности S точки (x_k, y_k, z_k), где $z_k = f(x_k, y_k)$. Через точки (x_k, y_k, z_k) проводим касательные плоскости к поверхности S. Указанные выше частичные цилиндрические поверхности вырезают соответственно в касательных плоскостях ограниченные частичные плоские квадрируемые фигуры D_k (рисунок 11.6).

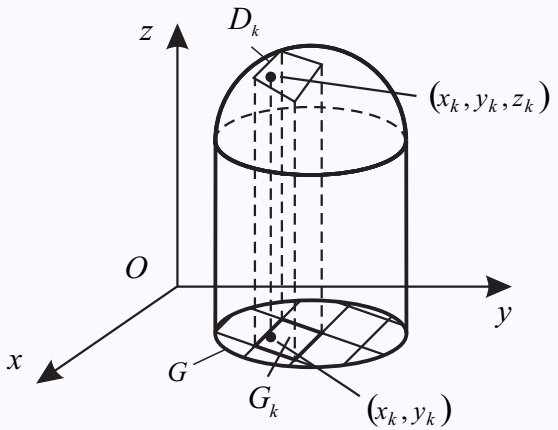


Рисунок 11.6

Составляем сумму

$$\sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^{n} S_{D_k}, \tag{11.11}$$

где S_{D_k} – площадь частичной плоской фигуры D_k.

Определение 11.3. *Число I называют* ***пределом суммы*** σ_{τ_G} *при* $\lambda_{\tau_G} \to 0$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \tau_G \ \lambda_{\tau_G} < \delta \ \forall (x_k, y_k) \in G_k \ (k = \overline{1,n}) \ \ |\sigma_{\tau_G} - I| < \varepsilon.$$

Указанный предел будем обозначать $\lim\limits_{\lambda_{\tau_G} \to 0} \sigma_{\tau_G}$.

Определение 11.4. *Если существует предел*

$$\lim_{\lambda_{\tau_G} \to 0} \sigma_{\tau_G} = I \in \mathbb{R}, \tag{11.12}$$

то гладкую поверхность S называют ***квадрируемой****, а предел I – площадью гладкой поверхности S.*

Покажем, что если частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функции $f : G \to \mathbb{R}$ ограничены и непрерывны на G, то гладкая поверхность S будет квадрируемой и ее площадь находится по формуле

$$I = \lim_{\lambda_{\tau_G} \to 0} \sigma_{\tau_G} = \iint\limits_G \sqrt{1 + f'^2_x(x,y) + f'^2_y(x,y)}\, dxdy. \tag{11.13}$$

◀Для каждой точки $(x_k, y_k, z_k) \in S$ рассмотрим нормаль n_k к поверхности S. С осью Oz эти нормали будут иметь направляющие косинусы

$$\cos(n_k, Oz) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_k, y_k) + f'^2_y(x_k, y_k)}}.$$

А тогда

$$S_{D_k} = \Delta G_k : \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_k, y_k) + f'^2_y(x_k, y_k)}}, \tag{11.14}$$

где ΔG_k – площадь G_k.

Подставляя (11.14) в (11.11), получим

$$\sigma_{\tau_G} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2_x(x_k, y_k) + f'^2_y(x_k, y_k)}\,\Delta G_k, \tag{11.15}$$

где правая часть (11.15) есть интегральная сумма Римана функции

$$\Phi(x, y) = \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)},\ (x, y) \in G.$$

Так как Φ непрерывна и ограничена на G, то по теореме 12.6 она интегрируема по G. Значит,

$$\lim_{\lambda_{\tau_G} \to 0} \sigma_{\tau_G} = \iint\limits_G \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)}\,dxdy. \blacktriangleright$$

Пример 11.7. Найти площадь части поверхности параболоида вращения $2az = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндрической поверхностью $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

◀Перейдя к полярным координатам, преобразуем аналитическое выражение цилиндрической поверхности: $r^4 = a^2 r^2 \cos 2\varphi$, $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Построим в плоскости $z = 0$ кривую $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (сечение цилиндрической поверхности $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ плоскостью $z = 0$, рисунок 11.7).

Так как $\cos 2\varphi \geqslant 0$, то

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\quad k \in Z,\quad -\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

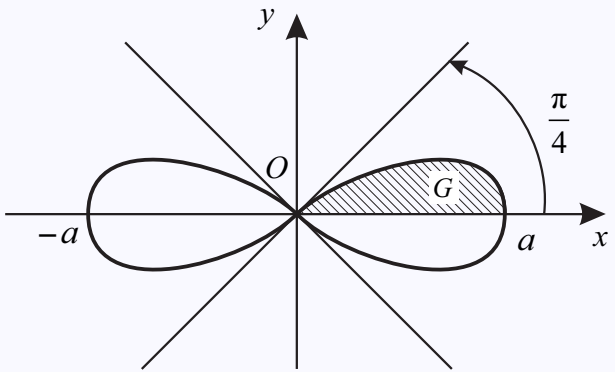


Рисунок 11.7

$$k=0,\quad -\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad k=1,\ \frac{3}{4}\pi\leqslant\varphi\leqslant\frac{5}{4}\pi.$$

Изобразим на рисунке 11.8 указанную выше вырезанную поверхность в первом октанте (имеем такие, равные по площади, четыре частные поверхности в первых четырех октантах).

Находим искомую площадь по формуле (11.13).

В нашем случае $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2a}$, $f'_x=\frac{2x}{2a}=\frac{x}{a}$, $f'_y=\frac{2y}{2a}=\frac{y}{a}$,

$$\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a},$$

$$S=4\iint\limits_G\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}dxdy.$$

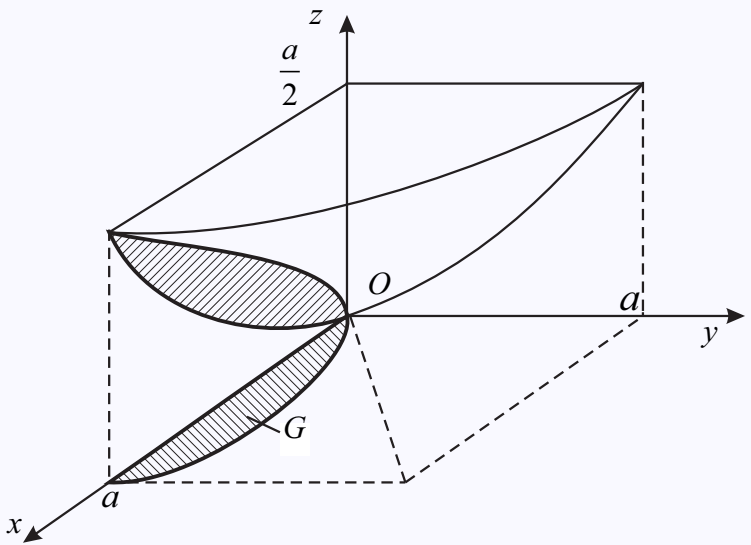


Рисунок 11.8

Дальше переходим к полярным координатам.

$$S = \frac{4}{a} \iint\limits_G \sqrt{a^2 + r^2} r dr d\varphi = \left[d\left(a^2 + r^2\right) = 2rdr \right] =$$

$$= \frac{2}{a} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \left(a^2 + r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(a^2 + r^2\right) = \frac{2}{a} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(a^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(a^2 + a^2\cos 2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - \left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left(2^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi d\varphi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{3}a^2 \left(2^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \sin^2\varphi\right) d(\sin\varphi) - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left(2^{\frac{3}{2}} \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{3}a^2 \left(2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} \right) - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{3}a^2 \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a^2}{9}\left(20 - 3\pi\right) \text{ (кв.ед.). } \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите формулу для нахождения объема криволинейного цилиндра.
2. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры через двойной интеграл.
3. Как с помощью двойного интеграла найти массу материальной плоской неоднородной фигуры (пластинки)?
4. Дайте определение статического момента точки массы m относительно оси l. Как с помощью двойного интеграла найти статические моменты материальной пластинки G относительно координатных осей?
5. Запишите формулы для вычисления координат центра тяжести материальной пластинки G.
6. Запишите формулы для вычисления моментов инерции материальной пластинки G относительно координатных осей и начала координат.
7. Запишите формулу для вычисления площади гладкой поверхности.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

Геометрические приложения двойного интеграла

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, лежащей в первом квадранте, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$, параболой $y^2 = 2ax$ и прямой $x = 2a$.

◀Изобразим фигуру на рисунке 11.9.

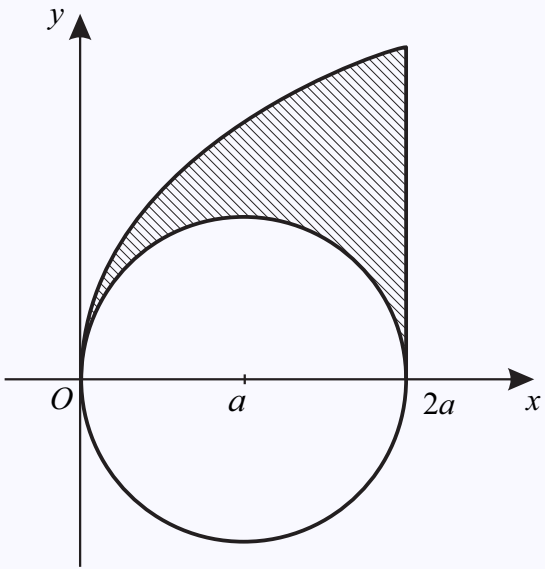


Рисунок 11.9

Для вычисления воспользуемся формулой $S = \iint\limits_P dxdy$, где

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 2a,\ \sqrt{2ax - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax}\right\}.$$

Таким образом,

$$S = \iint\limits_P dxdy = \int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy = \int\limits_0^{2a} \left(\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax - x^2}\right) dx = \frac{8a^2}{3} - \frac{\pi a^2}{2} \text{ (кв.ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = 2x^5. \tag{11.16}$$

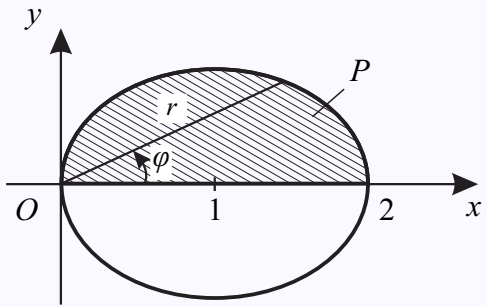


Рисунок 11.10

◀В первую очередь отметим, что уравнение кривой не меняется при замене y на $(-y)$, и потому кривая симметрична относительно оси абсцисс. Кроме того, из уравнения видно, что $x \geqslant 0$, и потому кривая расположена справа от оси ординат.

Перейдем к полярным координатам. Положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получим:

$$r^6 = 2r^5\cos^5\varphi, \text{ или } r = 2\cos^5\varphi.$$

Из уравнения видно, что каждому значению угла φ соответствует одно значение радиуса r. Кроме того, наибольшее значение $r = 2$ достигает при $\varphi = 0$, наименьшее $r = 0$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ величина r монотонно убывает от значения 2 до 0. Это дает возможность установить форму части кривой, расположенной в первой четверти. В силу симметричности кривой определяется форма всей кривой (11.16) (рисунок 11.10).

Симметричность фигуры относительно оси Ox позволяет ограничиться вычислением площади ее части, лежащей в первой четверти. Получим:

$$S = \iint\limits_P r dr d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos^5\varphi} r dr = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\cos^5\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\varphi d\varphi = 4\frac{9!!}{10!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{63}{128}\pi \text{ (кв. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 + y^2 = 2x, \text{ и } x^2 + y^2 = 4y,$$

если точка $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ принадлежит области интегрирования.

◀Изобразим область интегрирования на рисунке 11.11.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0, \quad x^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Проверим, какой области принадлежит точка $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Рассмотрим окружность $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

$$\frac{16}{20} + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2 = \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} = \frac{64}{25} + \frac{4}{5} = \frac{64+20}{25} = \frac{84}{25} < 4.$$

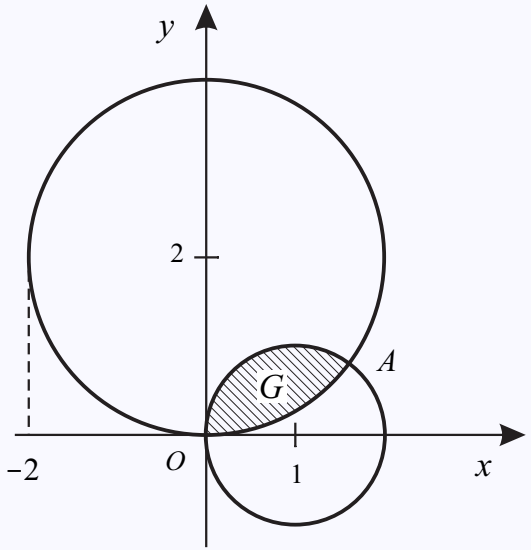


Рисунок 11.11

Точка $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ принадлежит области, ограниченной окружностью $x^2 + (y-2)^2 = 4$.
Дальше рассмотрим окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

$$\left(\frac{4}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5} < 1.$$

Точка $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ принадлежит области, ограниченной окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
Значит, точка $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ – внутренняя точка общей части кругов $(y-2)^2 + x^2 \leqslant 4$ и $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$. Внутренность этой части указанных кругов и есть область интегрирования G.

Переходим к полярным координатам $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad r^2 = 2r\cos\varphi, \quad r = 2\cos\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 4y, \quad r^2 = 4r\sin\varphi, \quad r = 4\sin\varphi.$$

Разбиваем область интегрирования G на два частичных множества G_1 и G_2 с помощью отрезка OA (рисунок 11.12).

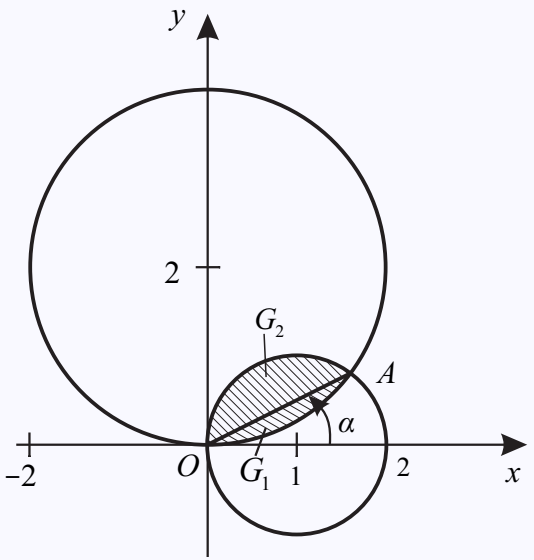


Рисунок 11.12

Найдем координаты точки A, решая систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ x^2+y^2=4y. \end{cases}$

$$4y-2x=0,\ x=2y,\ 4y^2+y^2=4y,\ 5y=4,\ y=\frac{4}{5},\ x=\frac{8}{5},\ A\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right).$$

Найдем угол α. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}}=\frac{1}{2}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

$$S=\iint\limits_G dxdy=\iint\limits_{G_1} dxdy+\iint\limits_{G_2} dxdy=\iint\limits_{D_1} rdrd\varphi+\iint\limits_{D_2} rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} d\varphi\int\limits_0^{4\sin\varphi} rdr+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} rdr=\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{4\sin\varphi} d\varphi+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} 16\sin^2\varphi d\varphi+\frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\varphi d\varphi=4\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}(1-\cos 2\varphi)d\varphi+\int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-2\sin 2\varphi\Big|_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}+\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-2\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(-\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right)=3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=$$

$$\left[\sin 2\varphi=\frac{2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi+1}\right]=3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=3\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}-2\ \text{(кв. ед.)}.\ \blacktriangleright$$

Задание 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2+y^2,$$

где $0<a<b$.

◀Переходим к обобщенным полярным координатам: $\begin{cases} x = ra\cos\varphi = \mu(r,\varphi), \\ y = rb\sin\varphi = \psi(r,\varphi). \end{cases}$

Вначале представим кривую в указанных координатах:

$$\left(\frac{r^2a^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2b^2\sin^2\varphi}{b^2}\right)^2 = r^2a^2\cos^2\varphi + r^2b^2\sin^2\varphi,$$

$$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \quad r=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi},$$

$$r' = \frac{a^2 2\cos\varphi\cdot(-\sin\varphi)+b^2 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{2\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sin 2\varphi\cdot(b^2-a^2)}{2\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}},$$

$$r'=0, \quad \sin 2\varphi = 0, \quad 2\varphi=\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad \varphi=\frac{\pi k}{2}, \ k\in\mathbb{Z}.$$

Кривая симметрична относительно координатных осей, поэтому будем рассматривать $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. В точке $\varphi=\frac{\pi}{2}$ функция $r=r(\varphi)$ имеет наибольшее значение, равное b, а в точке $\varphi=0$– наименьшее, равное a. Изобразим область интегрирования в первой координатной четверти на рисунке 11.13.

Вычислим якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} \mu'_r & \mu'_\varphi \\ \psi'_r & \psi'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{vmatrix} = rab\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = rab.$$

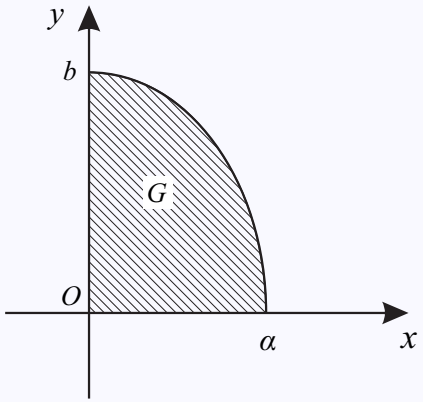


Рисунок 11.13

Находим искомую площадь:

$$S = 4\iint\limits_G dxdy = 4ab\iint\limits_D rdrd\varphi = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} rdr = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right) d\varphi = 2ab\left(a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi + b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi\right) =$$

$$= 2ab\left(a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + b^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2ab\left(\frac{a^2\pi}{4} + \frac{b^2\pi}{4}\right) = \frac{ab\pi}{2}\left(a^2+b^2\right) \text{ (кв. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченную кривой

$$(x+2y-1)^2+(2x+y-2)^2=9.$$

◀Вначале преобразуем уравнение кривой:

$$x^2+4y^2+1+4xy-2x-4y+4x^2+y^2+4+4xy-8x-4y=9.$$

$$5x^2+5y^2+2\cdot 4xy+2\cdot(-5)x+2(-4)y+(-4)=0.$$

Имеем уравнение второй степени вида $Ax^2+Cy^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0$.

Используем алгоритм, известный из курса алгебры, приведения уравнения кривой к каноническому виду. Используем формулы преобразования:

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases}$$

где $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2B}{A-C}$.

Если $A=C$ (в нашем случае $A=5=C$), то $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ($\cos 2\alpha=0$). После необходимых преобразований (провести самостоятельно) получим уравнение

$$\left(\sqrt{5}x'-\frac{4}{2\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{5}y'+\frac{-5}{2\sqrt{5}}\right)^2=4+\frac{4^2}{4\cdot 5}+\frac{(-5)^2}{4\cdot 5},$$

которое является уравнением окружности. Следовательно, необходимо найти площадь плоской фигуры, ограниченной окружностью.

Воспользуемся методом замены переменных в двойном интеграле. Используем подстановки

$$\begin{cases} u=x+2y-1,\\ v=2x+y-2. \end{cases}$$

В новой системе координат uOv уравнение кривой имеет вид: $u^2+v^2=9$ – окружность с центром в начале координат и радиусом 3.

Последнюю систему уравнений решаем относительно x и y, получим:

$$\begin{cases} x=\frac{2v-u+3}{3}=\mu(u,v), \\ y=\frac{2u-v}{3}=\psi(u,v). \end{cases}$$

Находим якобиан

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} \mu'_u & \mu'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3},\ |J|=\frac{1}{3}.$$

Тогда

$$S=\iint\limits_G dxdy=\iint\limits_G \frac{1}{3}dudv=\frac{1}{3}\iint\limits_G dudv=\frac{1}{3}S_D=\frac{1}{3}\pi 3^2=3\pi \quad \text{(кв. ед.)},$$

где S_D – площадь круга $u^2+v^2\leqslant 3^2$. ►

Задание 6. Вычислить объем криволинейного цилиндра, ограниченного параболоидом $z=4-x^2-y^2$ и имеющего основанием квадрат, ограниченный в плоскости xOy прямыми $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

◄Для вычисления объема используем формулу

$$V=\iint\limits_G f(x,y)dxdy.$$

В данном случае подынтегральной функцией будет функция

$$f(x,y)=4-x^2-y^2,\ (x,y)\in G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

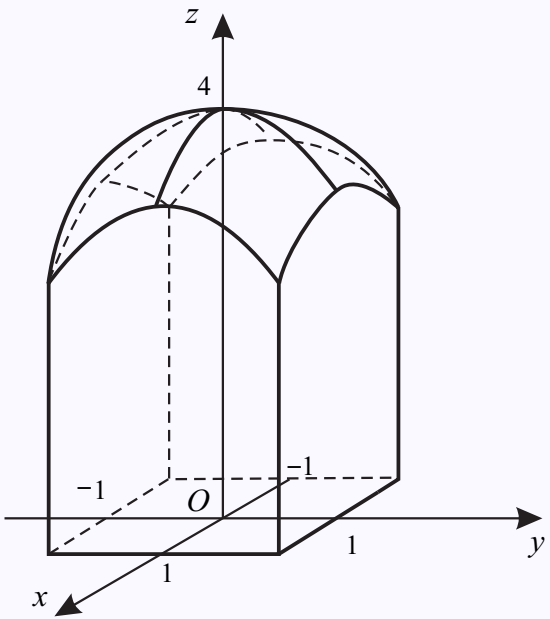


Рисунок 11.14

Значит,

$$V = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} \left(4 - x^2 - y^2\right) dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(8 - 2x^2 - \frac{2}{3}\right) dx = \left(\frac{22}{3}x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{44}{3} - \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3} \text{ (куб. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 7. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0,\ 2 - x - y - 2z = 0,\ y = x,$ и цилиндрической поверхностью $y = x^2$.

◀Изобразим тело на рисунке 11.15.

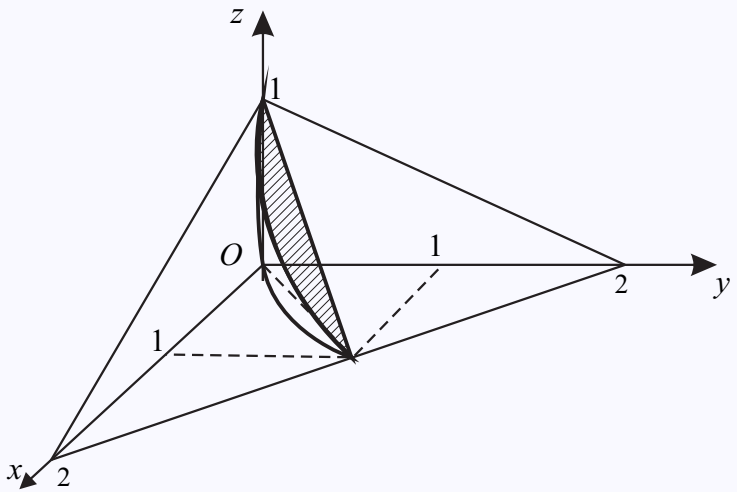


Рисунок 11.15

Тело является криволинейным цилиндром, значит $V = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$, где $f(x,y) = \frac{1}{2}(2 - x - y)$, $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} \frac{1}{2}(2-x-y)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{11}{120}\ (\text{куб. ед.}).\ \blacktriangleright$$

Задание 8. Оси двух круговых цилиндров с одинаковыми поперечными сечениями пересекаются под прямым углом. Вычислить объем общей части этих цилиндров.

◀Обозначим радиус поперечного сечения каждого из цилиндров через r. Выберем прямоугольную систему координат в пространстве таким образом, чтобы оси цилиндров совпадали с осями Oy и Oz. Тогда уравнения цилиндрических поверхностей будут иметь вид: $x^2 + z^2 = r^2$ – цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oy, $x^2 + y^2 = r^2$ – цилиндрическая поверхность с осью симметрии Oz. На рисунке 11.16 изображена одна восьмая часть тела, объем которого требуется найти.

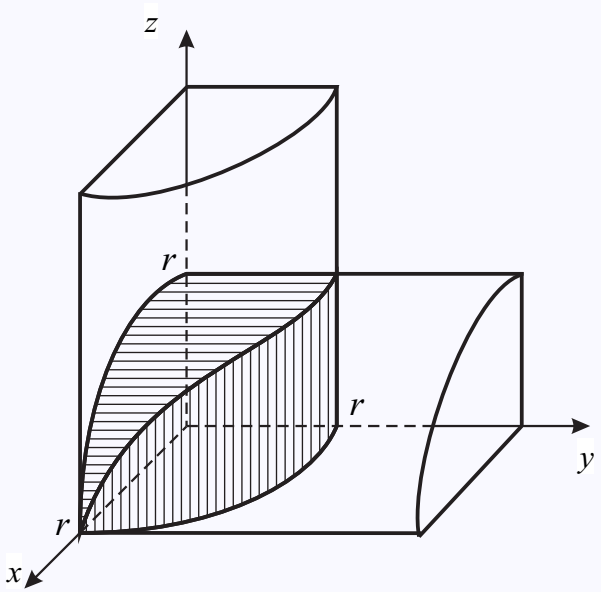


Рисунок 11.16

Подынтегральной функцией будет, очевидно, разрешенное относительно y уравнение поверхности цилиндра с осью симметрии Oy, т. е. $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2}$. Проектируя ее часть, отрезанную второй поверхностью и содержащуюся в первом октанте, получим область интегрирования G при вычислении объема выделенной на рисунке части тела. Ею будет часть круга $x^2+y^2\leqslant r^2$, расположенная в первой четверти плоскости xOy, т. е.

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x\leqslant r,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{r^2-x^2}\right\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{8}V=\int\limits_0^r dx\int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{r^2-x^2}dy=\frac{2}{3}r^3,\ V=8\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{16}{3}r^3\ \text{(куб. ед.)}.\ \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4x,\quad z=x,\quad z=2x.$$

◀Поверхность $x^2+y^2=4x$ есть круговой цилиндр, ось которого параллельна оси Oz, а $z=x$ и $z=2x$ – плоскости, проходящие через ось Oy под разными углами наклона к плоскости xOy. Эти плоскости, пересекая цилиндр, вырезают из него клинообразный слой (рисунок 11.17), объем которого и нужно вычислить.

Сам слой не является криволинейным цилиндром, и потому его объем не может быть вычислен непосредственно по формуле $V=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$. Однако его можно вычислить как разность объемов двух криволинейных цилиндров, ограниченных графиками функций $z=2x$ и $z=x$ соответственно, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей $x^2+y^2=4x$ и имеющих «основанием» в плоскости xOy круг $x^2+y^2\leqslant 4x$.

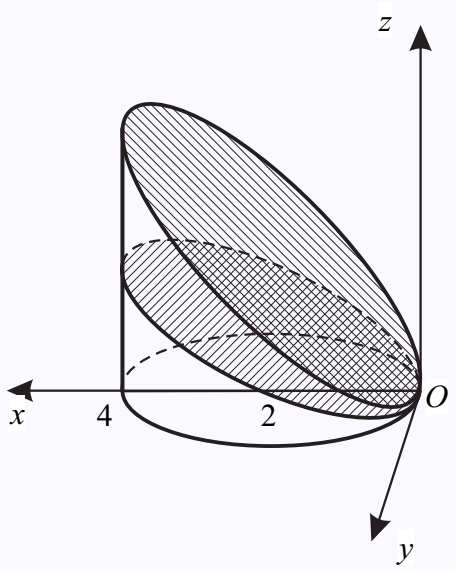


Рисунок 11.17

С учетом симметрии тела относительно плоскости $y = 0$ можно вычислить только половину от искомого объема:

$$\frac{1}{2}V = \iint\limits_G 2xdxdy - \iint\limits_G xdxdy = \iint\limits_G xdxdy,\ G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4x - x^2}\right\}.$$

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_0^4 xdx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy = 4\pi,\ V = 8\pi \text{ (куб. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти объем тела, определяемого двойным неравенством

$$x^2+y^2 \leqslant az \leqslant a\sqrt{x^2+y^2},\ \text{где } a>0.$$

◀Изобразим на рисунке 11.18 тело в первом октанте (показаны сечения тела плоскостями $x=0$ и $y=0$). Тело симметрично относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. При вычислении интеграла переходим к полярным координатам.

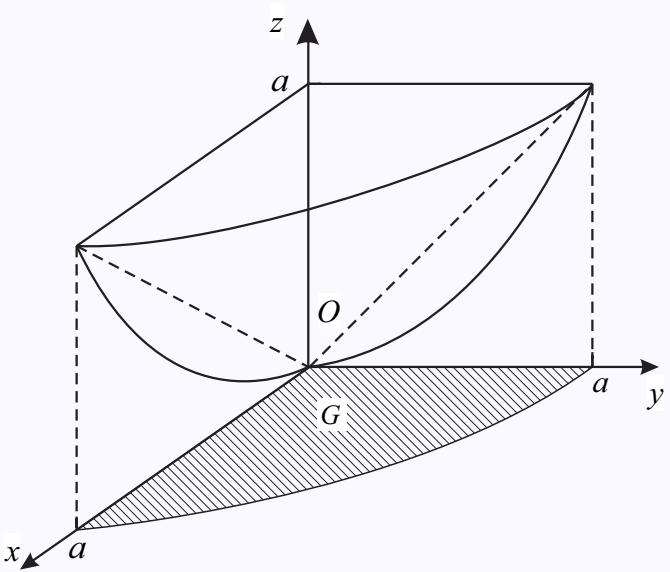


Рисунок 11.18

$$V=4\iint\limits_G\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{a}\right)dxdy=4\iint\limits_D\left(r-\frac{r^2}{a}\right)rdrd\varphi=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)dr=\frac{a^3\pi}{6}\ \text{(куб. ед.).}\ ▶$$

Задание 11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{и} \quad z = 0.$$

◀Изобразим тело на рисунке 11.19 в первом октанте (тело симметрично относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$).

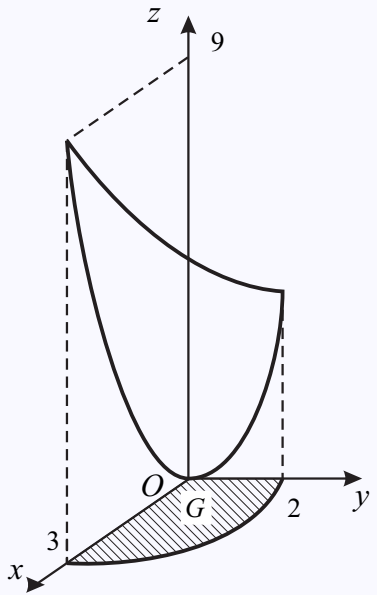


Рисунок 11.19

Искомый объем находим, переходя от декартовых координат к обобщенным полярным координатам: $x = 3r\cos\varphi$, $y = 2r\sin\varphi$. Якобиан $J = 6r$.

$$V = 4\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy = 4\iint\limits_D \left(9r^2\cos\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\right)6rdrd\varphi = 24\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr =$$

$$= 24\left(9\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi + 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 =$$

$$= 24\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{4}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{4} = 6\left(\frac{13}{4}\pi\right) = \frac{39}{2}\pi \text{ (куб.ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 12. Вычислить площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте (рисунок 11.20).

◀Используем формулу

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy. \qquad (11.17)$$

В нашем случае

$$z = 6-3x-\frac{3}{2}y,\ z'_x = -3,\ z'_y = -\frac{3}{2} \text{ и } \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+9+\frac{9}{4}} = \frac{7}{2}.$$

Проекцией данной плоскости на плоскость xOy является треугольник, ограниченный координатными осями Ox, Oy и прямой $6x+3y=12$ (последняя получается из уравнения данной плоскости при $z=0$).

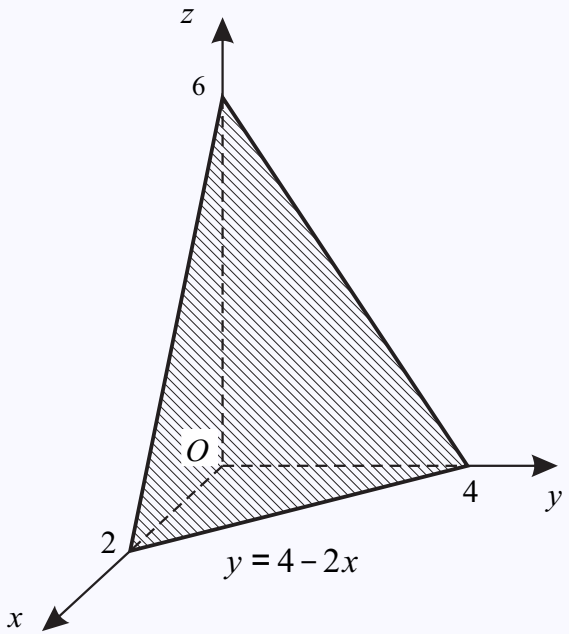


Рисунок 11.20

Получим:

$$S = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} \frac{7}{2} dy = \frac{7}{2} \int\limits_0^2 y\Big|_0^{4-2x} dx = \frac{7}{2} \int\limits_0^2 (4-2x)dx =$$

$$= \frac{7}{2} \left(4x - x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{7}{2} \cdot 4 = 14 \text{ (кв.ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 13. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

◀Контуром проекции вырезанной части на плоскость xOy является лемниската (рисунок 11.21). Цилиндр вырезает из параболоида два равных куска поверхности. Чтобы вычислить их общую площадь, воспользуемся формулой (11.17). Из уравнения параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ получим подынтегральную функцию.

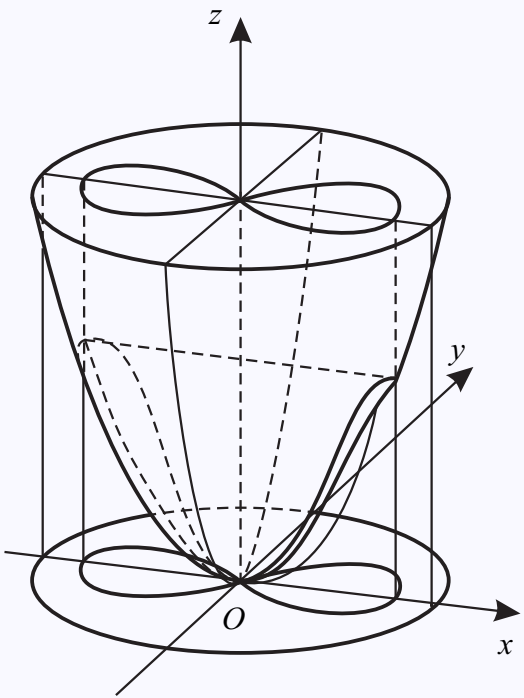


Рисунок 11.21

$$z'_x = x, \quad z'_y = y, \quad \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx dy.$$

Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Подынтегральная функция запишется в виде $\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + r^2}$, а уравнение лемнискаты – в виде

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi, \; r^4 = r^2\cos 2\varphi, \quad r = \pm\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Так как параболоид и цилиндр симметричны относительно плоскостей xOz и yOz, то достаточно вычислить интеграл по одной четвертой части лемнискаты, расположенной в первой четверти плоскости xOy. Следовательно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\cos 2\varphi}$.

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1 + r^2}\, r dr = \frac{5}{9} - \frac{\pi}{12}, \; S = 4 \cdot \left(\frac{5}{9} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3} \text{ (кв. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 14. Найти площадь части цилиндрической поверхности

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \, (a > 0) \, ,$$

вырезанной цилиндрической поверхностью $y^2 = ax$.

◀Поверхность, площадь которой необходимо найти, расположена в первом, четвертом, седьмом и восьмом октантах. Для обоснования указанного утверждения вначале построим сечение цилиндрической поверхности $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ плоскостью $y = 0$ при $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (рисунок 11.22), а также сечение цилиндрической поверхности $y^2 = ax$ плоскостью $z = 0$ при $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (рисунок 11.23).

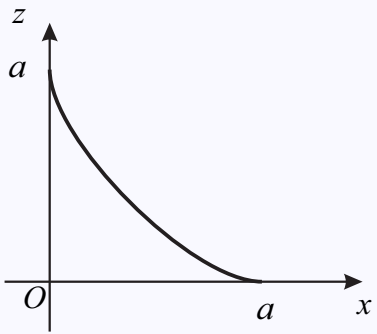


Рисунок 11.22

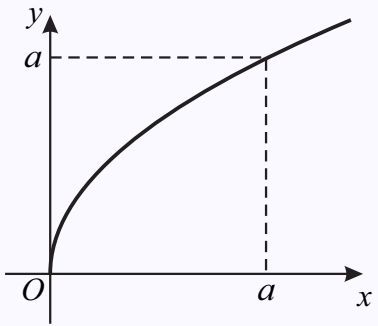


Рисунок 11.23

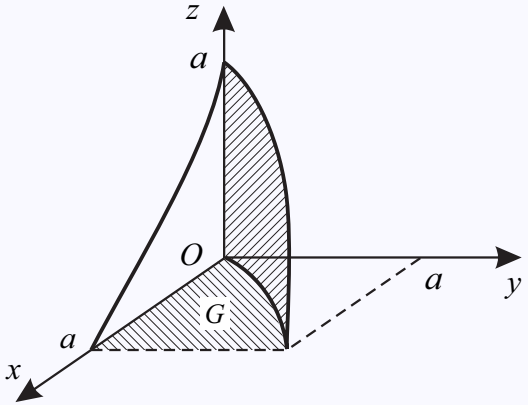


Рисунок 11.24

Дальше изобразим на рисунке в первом октанте часть поверхности $x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, площадь которой необходимо найти (рисунок 11.24).

Искомую площадь находим по формуле

$$S = 4 \iint\limits_G \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy.$$

$$z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}; \quad z = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда

$$z'_x = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right); \; z'_y = 0;$$

$$(z'_x)^2 = \left(-x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) = a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}} - 1.$$

$$S = 4 \iint\limits_G \sqrt{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}}\, dxdy = 4 \iint\limits_G a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\, dxdy =$$

$$= 4 \int\limits_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{a}}^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\, dx = 4a^{\frac{1}{3}} \int\limits_0^a \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_{\frac{y^2}{a}}^a dy =$$

$$= 6a^{\frac{1}{3}} \int\limits_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - \frac{y^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) dy = 6a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}}y\Big|_0^a - \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{y^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\Bigg|_0^a\right) = 6a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{7} \cdot \frac{a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right) =$$

$$= 6a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{7}a^{\frac{5}{3}}\right) = 6a^2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{7}a^2 \text{ (кв.ед.). } \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти площади плоских фигур, ограниченных заданными ниже кривыми:

   1.1 $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$;

   1.2 $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = m$, $y = n$;

   1.3 $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$;

   1.4 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x + y = a$;

   1.5 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

   1.6 $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

2. Вычислить площади плоских фигур, ограниченных заданными кривыми, с помощью преобразования к полярным координатам:

   2.1 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$;

   2.2 $(x^2 + 2y^2)^3 = xy^4$;

   2.3 $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) = x^2 y$;

   2.4 $(x^2 + y^2)^2 = a (x^3 - 3xy^2)$ $(a > 0)$;

   2.5 $(x + y)^3 = xy$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$.

   Указание. Ввести новые переменные u и v, положив $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12} = \frac{xy}{c^2}$.

6. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостями $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$.

7. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

8. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $2x + 3y - 12 = 0$ и цилиндром $z = \frac{y^2}{2}$.

9. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z = 0$.

10. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + y^2 = r^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ и плоскостью $z = 0$ $(z \geqslant 0)$.

11. Вычислить объем тела, расположенного в первом октанте и ограниченного гиперболическим параболоидом $z = \frac{xy}{a}$, цилиндром $x^2 + y^2 = ax$ и плоскостью $z = 0$.

12. Найти объем тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = rx$ из сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

13. Найти объем тела, вырезанного параболоидом вращения

$$x^2 + y^2 = z \quad (z \geqslant 0)$$

из цилиндра $x^2 + y^2 = x$.

14. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом

$$z = \frac{1}{a}\left(a^2 - x^2 - 4y^2\right)$$

и плоскостью $z = 0$.

15. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$, $x + z = 6$.

16. Вычислить объем частей, на которые эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ рассекается конусом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$.

17. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

18. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = x^2 + y^2$, $2x = x^2 + y^2$, $z = 0$.

19. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$.

20. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 = -a^2.$$

21. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z = 0$, цилиндром

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

и поверхностью прямого кругового конуса, вершина которого расположена в начале координат, ось совпадает с осью Oz и угол осевого сечения при вершине равен $90°$.

22. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью шара радиуса a и поверхностью прямого кругового цилиндра, радиус поперечного сечения которого равен $\frac{a}{2}$ и одна из образующих которого проходит через центр шара.

23. Найти объем тела, заключенного между параболоидом вращения $x^2+z^2 = az$, цилиндром $x^2+y^2 = ay$ и плоскостью $z = 0$.

24. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 = z.$$

25. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{9}+y^2+\frac{z^2}{4}=1,\quad \frac{x^2}{9}+y^2+\frac{(z-2)^2}{4}=1.$$

26. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{z}{3},\ x+\frac{z}{3}=2.$$

27. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$2az=x^2+y^2,\quad x^2+y^2+z^2=3a^2.$$

28. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=a^2\ (x^2-y^2).$$

29. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2.$$

30. Найти площадь части плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, заключенную между координатными плоскостями.

31. Найти площадь части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=100$, заключенной между плоскостями $x=-8$ и $x=6$.

32. Вычислить площадь части поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащей над плоскостью xOy и отрезанной плоскостью $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.

33. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

34. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

35. Вычислить площадь части поверхности параболоида

$$y^2 + z^2 = 4ax,$$

вырезанной цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = 3a$.

36. Вычислить площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b \leqslant a)$.

37. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, содержащуюся между плоскостью xOy и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и расположенную в первом октанте.

38. Вычислить площадь части поверхности параболоида $z^2 = 2px$, вырезанной параболоидом $y^2 = 2qx$ и плоскостью $x = a$.

39. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

40. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, расположенной внутри цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

41. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостью $y + z = a$.

42. Шар радиуса a порезан двумя круглыми цилиндрами, диаметры оснований которых равны радиусу шара и которые касаются друг друга вдоль одного из диаметров шара. Вычислить площадь поверхности оставшейся части шара.

43. Доказать, что площади частей поверхностей параболоидов

$$x^2 + y^2 = 2az \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = 2az,$$

вырезанных цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, равны.

44. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

Физические приложения двойного интеграла

Задание 1. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

◀Пластинку естественно расположить в прямоугольной системе координат таким образом, чтобы точка пересечения диагоналей совпадала с началом координат, а стороны были параллельны координатным осям (рисунок 11.25).

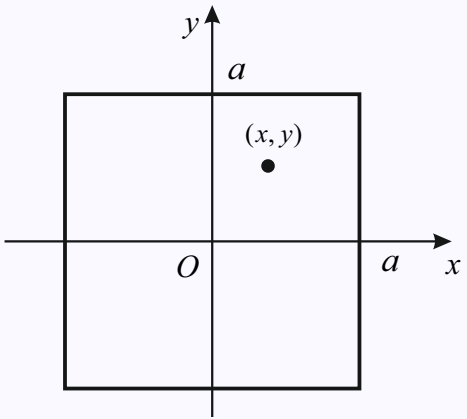


Рисунок 11.25

Теперь составим функцию плотности γ материала пластинки по условиям задачи. Пусть (x, y) – произвольная точка квадрата ($|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a$). Тогда квадрат расстояния от точки пересечения диагоналей (начала координат) будет равен $x^2 + y^2$. Следовательно, плотность в точке (x, y) представится в виде

$$\gamma(x, y) = k(x^2 + y^2),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Чтобы найти числовое значение этого коэффициента k, используем известное значение плотности на углах квадрата. Возьмем, например, вершину угла квадрата (a, a). Тогда

$$1 = k(a^2 + a^2),\ k = \frac{1}{2a^2}.$$

Подставляя найденное значение k в выражение функции плотности, окончательно получим:

$$\gamma(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2a^2}.$$

Теперь остается вычислить двойной интеграл

$$m = \frac{1}{2a^2} \iint\limits_P (x^2 + y^2)dxdy.$$

Учитывая, что подынтегральная функция четная относительно x и y (т. е. плотность симметрична относительно начала координат), можем ограничиться вычислением интеграла только по одной четвертой части области (P), расположенной в первой четверти

$$m = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x^2 + y^2)dy = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^a dx =$$

$$= \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right) dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3 x}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{2a^4}{3} = \frac{4}{3} a^2 \text{ (ед. массы). } \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти массу пластинки плотности $\gamma = x$, ограниченной кривыми $x^2+y^2 = 4x$ и $x^2+y^2 = 4y$, при условии $xy \geqslant 0$.

◀Изобразим пластинку в системе координат xOy (рисунок 11.26).

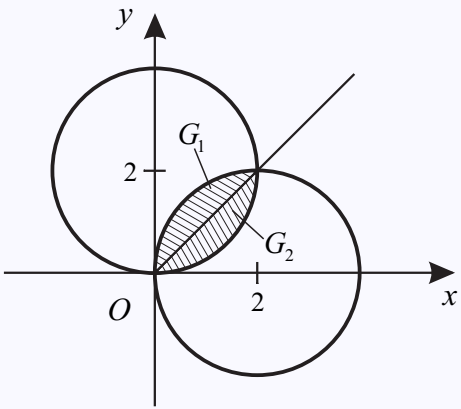


Рисунок 11.26

Преобразуем уравнения окружностей к каноническому виду:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4; \quad (x-2)^2 + y^2 = 2^2;$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4; \; x^2 + (y-2)^2 = 2^2.$$

Для вычисления массы пластинки используем формулу

$$m_G = \iint\limits_G \gamma(x,y)\,dxdy, \; (G = G_1 \cup G_2).$$

В нашем случае

$$m_G = \iint\limits_G x dx dy = \iint\limits_{G_1} x dx dy + \iint\limits_{G_2} x dx dy.$$

Для вычисления указанных интегралов перейдем к полярным координатам. Вначале запишем уравнения наших кривых в полярных координатах.

$$\begin{array}{lll} x^2 + y^2 = 4x; & r^2 = 4r\cos\varphi; & r = 4\cos\varphi; \\ x^2 + y^2 = 4y; & r^2 = 4r\sin\varphi; & r = 4\sin\varphi. \end{array}$$

Тогда

$$m_G = \iint\limits_{D_1} r\cos\varphi \cdot r dr d\varphi + \iint\limits_{D_2} r\cos\varphi \cdot r dr d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r^2 dr +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} r^2 dr = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{4\cos\varphi} d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{4\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 64\cos^4\varphi d\varphi + \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 64\cos\varphi \cdot \sin^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{64}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi + \frac{64}{3}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\varphi d(\sin\varphi) = \frac{64}{3}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi + \frac{64}{3}\cdot\frac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right) + \frac{4}{3} = 2\pi - 4 \text{ (ед. масс)}. \blacktriangleright .$$

Задание 3. Найти статические моменты относительно осей координат сегмента эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ограниченного прямой $bx+ay=ab$ (рисунок 11.27).

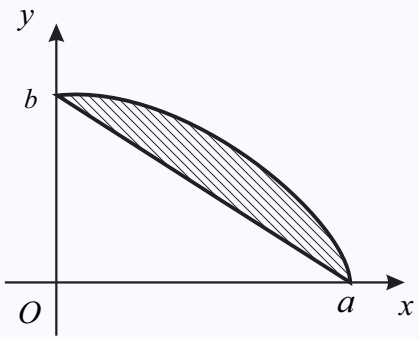


Рисунок 11.27

◀В данной задаче о плотности ничего не упоминается. Следовательно, она предполагается постоянной и равной единице, а масса фигуры численно равна ее площади.

$$M_{Ox}=\iint\limits_P y\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy=\int\limits_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^a\left(\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)-\frac{b^2}{a^2}(a-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{b^2}{2a^2}\int\limits_0^a\left(a^2-x^2-a^2+2ax-x^2\right)dx=\frac{b^2}{2a^2}\int\limits_0^a\left(2ax-2x^2\right)dx=\frac{b^2}{2a^2}\left(2a\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{ab^2}{6},$$

$$M_{Oy}=\iint\limits_P x\,dx\,dy=\int\limits_0^a x\,dx\int\limits_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy=\int\limits_0^a xy\Big|_{\frac{b}{a}(a-x)}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\limits_0^a x\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{b}{a}(a-x)\right)dx=$$

$$= \int_0^a \left(\frac{b}{a} x\sqrt{a^2 - x^2} - bx + \frac{b}{a} x^2 \right) dx = \left(-\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - b\frac{x^2}{2} + \frac{b}{a} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^a = \frac{b}{3a} a^3 - \frac{a^2 b}{2} + \frac{a^2 b}{3} = \frac{a^2 b}{6}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти момент инерции круга радиуса R относительно точки, лежащей на окружности.

◀Составим уравнение окружности, проходящей через начало координат:

$$x^2 + y^2 = 2Rx,$$

и вычислим момент инерции по формуле

$$I_O = \iint_P \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Вычислим интеграл I_O в полярных координатах. В полярной системе координат уравнение окружности представится в виде $r = 2R\cos\varphi$. Получим:

$$I_0 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^3 dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2R\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16R^4 \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 8R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = 2R^4 \left(\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{2}\pi R^4. \blacktriangleright$$

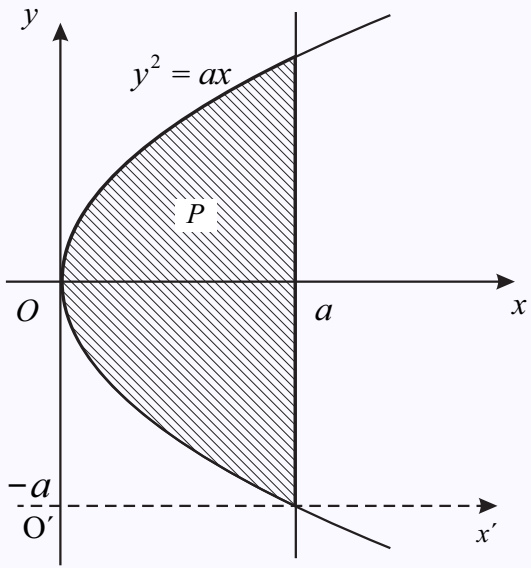


Рисунок 11.28

Задание 5. Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной параболой $y^2 = ax$ и прямой $x = a$ относительно прямой $y = -a$.

◀Как видно из рисунка 11.28, расстояние любой точки (x, y) фигуры P до оси $O'x'$ будет равно $y + a$, а квадрат расстояния – $(y + a)^2$. Следовательно,

$$I_{O'x'} = \iint\limits_P (y+a)^2 dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} (y+a)^2 dy = \int\limits_0^a \frac{(y+a)^3}{3}\Big|_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} dx = \int\limits_0^a \left(\frac{(\sqrt{ax}+a)^3}{3} - \frac{(-\sqrt{ax}+a)^3}{3} \right) dx =$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
319
Приложение
Закрыть

$$= \frac{1}{3}\int_0^a \left(ax\sqrt{ax} + 3a^2x + 3a^2\sqrt{ax} + a^3 - a^3 + 3a^2\sqrt{ax} - 3a^2x + ax\sqrt{ax}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^a \left(2ax\sqrt{ax} + 6a^2\sqrt{ax}\right) dx = \frac{2a\sqrt{a}}{3}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{6a^2\sqrt{a}}{3}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{2a\sqrt{a}}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a + 2a^2\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a = \frac{4}{15}a^4 + \frac{4}{3}a^4 = \frac{8}{5}a^4. \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной двумя параболами $y^2 = x$ и $x^2 = y$.

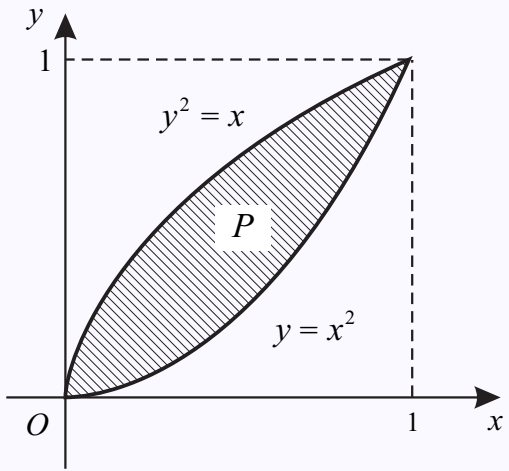


Рисунок 11.29

◄Для нахождения координат центра тяжести (x_c, y_c) достаточно вычислить по заданной области интегрирования три интеграла, определяющие массу и статические моменты фигуры (рисунок 11.29). В силу однородности фигуры плотность $\gamma = 1$, поэтому масса будет равна площади фигуры:

$$m = \iint\limits_P dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^1 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx = \frac{1}{3}.$$

В силу симметрии и однородности фигуры $M_{Ox} = M_{Oy}$.

$$M_{Ox} = \iint\limits_P ydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy = \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{3}{20}.$$

Координаты x_c, y_c центра тяжести равны:

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}, \quad y_c = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

Следовательно, $x_c = y_c = \frac{9}{20}$. ►

Задание 7. Для треугольника

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geqslant a,\ a \geqslant x \geqslant 0,\ a \geqslant y \geqslant 0\right\}$$

с плотностью $\gamma\,(x, y) = x$, найти массу, координаты центра масс, моменты инерции относительно осей Ox и Oy.

◄Изобразим треугольник на рисунке 11.30.

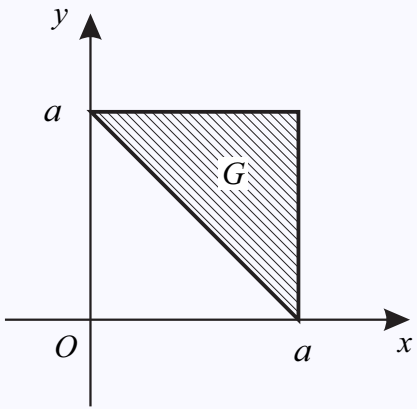


Рисунок 11.30

Дальше находим значения искомых величин.

$$m_G = \iint\limits_G x dx dy = \int\limits_0^a x dx \int\limits_{a-x}^a dy = \int\limits_0^a xy \Big|_{a-x}^{a} dx = \int\limits_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 \ .$$

Если точка (x_c, y_c) – центр тяжести треугольника G, то

$$x_c = \frac{M_{0y}}{m_G} = \frac{\iint\limits_G x^2 dx dy}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{\int\limits_0^a x^2 dx \int\limits_{a-x}^a dy}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{\int\limits_0^a x^2 y \Big|_{a-x}^{a} dx}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{3}{4}a;$$

$$y_c = \frac{M_{0x}}{m_G} = \frac{\iint\limits_G xy dx dy}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{\int\limits_0^a x dx \int\limits_{a-x}^a y dy}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{5}{8}a;$$

$$I_{Ox} = \iint\limits_G xy^2 dxdy = \int\limits_0^a xdx \int\limits_{a-x}^a y^2 dy = \frac{3a^5}{20};$$

$$I_{Oy} = \iint\limits_G x^3 dxdy = \int\limits_0^a x^3 dx \int\limits_{a-x}^a dy = \int\limits_0^a x^4 dx = \frac{a^5}{5}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти координаты центра масс однородной плоской фигуры

$$r \leqslant a\,(1 + \sin\varphi)\,.$$

◀Изобразим фигуру на рисунке 11.31.

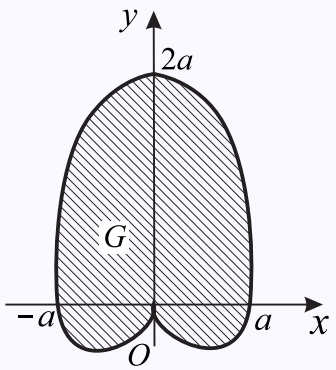


Рисунок 11.31

Если (x_c, y_c) – точка центра масс, то $x_c = 0$, так как фигура симметрична относительно оси Oy, а масса фигуры численно равна ее площади в силу ее однородности ($\gamma = 1$), а y_c находим по формуле

$$y_c = \frac{M_{Ox}}{m_G}.$$

$$m_G = \iint\limits_G dxdy = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\sin\varphi)} rdr = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a(1+\sin\varphi)} d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\varphi)^2 \, d\varphi = a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$M_{Ox} = \iint\limits_G ydxdy = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\sin\varphi)} r^2 \sin\varphi dr = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, \frac{r^3}{3}\Big|_0^{a(1+\sin\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left(1 + 3\sin\varphi + 3\sin^2\varphi + \sin^3\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{2a^3}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \cdot \frac{1-\cos 2\varphi}{2} + \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right) d\varphi = \frac{2a^3}{3} \left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi\right) =$$

$$= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\pi\right) = \frac{5\pi a^3}{4}; \; y_c = \frac{\frac{5\pi a^3}{4}}{\frac{3}{2}\pi a^2} = \frac{5}{6}a. \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотностью γ, ограниченной линиями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad 3x+2y=6,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0.$$

◀Изобразим фигуру на рисунке 11.32.

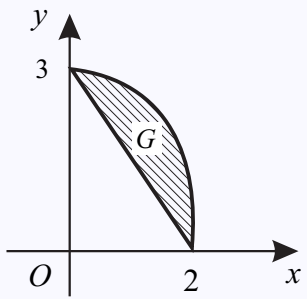


Рисунок 11.32

Вначале найдем массу плоской фигуры.

$$m_G=\iint\limits_G \gamma dxdy=$$

$$=\left[\begin{cases} x=2r\cos\varphi, \\ y=3r\sin\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} 3\cdot 2r\cos\varphi+2\cdot 3r\sin\varphi=6, \\ r=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi,} \end{matrix} \quad \frac{(2r\cos\varphi)^2}{4}+\frac{(3r\sin\varphi)^2}{9}=1,\ r=1\right]=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\gamma d\varphi \int\limits_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{1} rdr=\gamma\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^2}{2}\Big|_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{1}d\varphi=\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2}\right)d\varphi=$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\right) = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\gamma}{4}\left(\pi + (-1-1)\right) = \frac{\gamma}{4}\left(\pi - 2\right).$$

Дальше находим статические моменты относительно координатных осей.

$$M_{Ox} = \iint\limits_G \gamma y dx dy = \gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\varphi d\varphi \int\limits_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{1} r^2 dr = 3\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left.\frac{r^3}{3}\right|_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{1} d\varphi =$$

$$= \gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{(\sin\varphi+\cos\varphi)^3}\right)\sin\varphi d\varphi = \gamma\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^3}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right) =$$

$$= \gamma\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}\varphi d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}\varphi)^3}\right) = \left[\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\varphi, \\ t_{\text{н}}=0, \\ t_{\text{в}}=+\infty \end{array}\right] = \gamma\left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{tdt}{(1+t)^3}\right) =$$

$$= \gamma\left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{t+1-1}{(t+1)^3}dt\right) = \gamma\left(1 - \left.\frac{(t+1)^{-1}}{-1}\right|_0^{+\infty} + \left.\frac{(t+1)^{-2}}{-2}\right|_0^{+\infty}\right) =$$

$$= \gamma\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Тогда

$$y_c = \frac{M_{Ox}}{m_G} = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma}{4}(\pi - 2)} = \frac{2}{\pi - 2}.$$

$$M_{Oy} = \iint\limits_G \gamma x dx dy = \gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi d\varphi \int\limits_{(\cos\varphi+\sin\varphi)^{-1}}^{1} r^2 dr =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^3}\right) \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi \cdot \cos^2\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^3} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \left(\sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^3} = \frac{2}{3}\gamma \left(1 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^3} \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \left(1 - \frac{(t+1)^{-2}}{-2} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{2}{3}\gamma \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\gamma.$$

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m_G} = \frac{\frac{\gamma}{3}}{\frac{\gamma}{4}(\pi - 2)} = \frac{4}{3\pi - 6}. \blacktriangleright$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

327

Приложение

Закрыть

Задания для самостоятельного решения

1. Найти массу круга, плотность которого в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до контура круга.

2. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых r и R $(r < R)$. Найти массу кольца, если известно, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей и плотность на окружности внутреннего круга равна единице.

3. На фигуре, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, распределена масса так, что плотность ее пропорциональна расстоянию от оси абсцисс, причем при $y = 1$ она равна γ. Найти массу всей фигуры.

4. Найти массу прямоугольной фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, если плотность в каждой точке равна кубу абсциссы, умноженному на квадрат ординаты этой точки.

5. Найти статические моменты относительно координатных осей четверти круга радиуса R.

6. Найти статические моменты относительно координатных осей части плоскости, ограниченной линиями $y = x^2$, $y + x = 2$, $y = 0$.

7. Найти статический момент полукруга относительно его диаметра.

8. Найти статический момент круга относительно его касательной.

9. Найти координаты центров тяжести указанных однородных плоских фигур:

   9.1 полукруга радиуса R;

   9.2 фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^3$ и $y^2 = 2x$;

   9.3 фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - 3x^2$ и осью Ox;

   9.4 сектора архимедовой спирали $r = a\varphi$, получаемого при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$;

9.5 кругового сектора с радиусом r и углом при вершине $2a$, симметричного относительно оси Ox;

9.6 фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой $x = \frac{\pi}{4}$;

9.7 фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a\,(1 + \cos\varphi)$;

9.8 фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geqslant 0)$.

10. Вычислить момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.

11. Вычислить момент инерции квадрата со стороной a относительно одной из вершин.

12. Вычислить момент инерции полукруга относительно его диаметра.

13. Вычислить момент инерции круга относительно его центра.

14. Вычислить момент инерции круга относительно касательной.

15. Вычислить момент инерции фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$ относительно начала координат.

16. Найти массу пластинки плотности γ, ограниченной линиями:

16.1 $y + x^2$, $x + y = 2$, $y - x = 2$, $(x > 0)$, если $\gamma = x + 2$;

16.2 $x = y$, $x - 3y = 1$, $y = 1$, $y = 3$, если $\gamma = y$;

16.3 $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4y$ $(xy \geqslant 0)$, если $\gamma = x$;

16.4 $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4 - x$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$, если $\gamma = y$;

16.5 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$, если $\gamma = 4x^2 + 9y^2$;

16.6 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, если $\gamma = x + y$;

16.7 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $(x \geqslant 0)$, если $0 = x^2$.

17. Найти массу пластинки, имеющей форму кольца, радиусы внутренней и внешней окружности которого равны, соответственно, r и R, если плотность пластинки в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра кольца.

18. Вычислить момент инерции однородного круга массой M и радиусом R относительно точки на его окружности.

19. Вычислить моменты инерции относительно заданной прямой однородной пластинки массой M, ограниченной линиями:

    19.1 $x^2 + y^2 = R^2$ относительно прямой, проходящей через центр круга и лежащей в его плоскости;

    19.2 $x^2 + y^2 = R^2$ относительно касательной к окружности этого круга;

    19.3 $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y = 0$ относительно прямой $y = 1$;

    19.4 $ay = x^2$, $x + y = 2a$ относительно каждой из осей координат;

    19.5 $x^2 = 2py$, $y^2 = 2px$ относительно каждой из осей координат;

    19.6 $r = a(1 + \cos\varphi)$ относительно полярной оси;

    19.7 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ относительно полярной оси;

    19.8 $xy = 4$, $xy = 8$, $x = 2y$, $x = y$, $(y > 0)$ относительно оси Oy.

20. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму кругового сектора с углом α и радиусом R.

21. Найти координаты центра масс однородной пластинки плотности γ, ограниченной линиями:

    21.1 $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 3x$;

    21.2 $y = 2x - 1$, $y^2 = x$, $y = 0$;

    21.3 $y = 4 - x^2$, $y + 3x = 4$;

21.4 $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$;

21.5 $y = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;

21.6 $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$;

21.7 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$;

21.8 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $(y \geqslant 0)$;

21.9 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $3x + 2y = 6$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

21.10 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $\frac{3x}{a} = \frac{y}{b}$.

22. С какой силой плоский диск радиусом R и массой M притягивает материальную точку массой m, которая лежит на прямой, перпендикулярной диску и проходящей через его центр, на расстоянии a от центра.

23. Прямой круговой цилиндр погружен в наполненный жидкостью сосуд так, что его середина – точка M – находится на глубине c под поверхностью жидкости, а ось цилиндра составляет с вертикалью угол α. Длина цилиндра равна l, радиус основания a. Вычислить давление на нижнее и верхнее основания цилиндра, если плотность жидкости равна γ_0.

24. Пластинка, имеющая форму полукруга радиусом a, погружена вертикально в жидкость так, что горизонтальный диаметр AB, служащий ее основанием, находится внутри жидкости, а вершина O полукруга соприкасается с поверхностью жидкости. Вычислить давление на пластинку, если плотность жидкости равна γ_0.

25. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 12
Тройные интегралы

В [2, лекция 13] были рассмотрены понятия кубируемости и объема тела (ограниченного множества точек пространства $\mathbb{R}^3$), а также определение множества объема нуль (ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *множеством объема нуль*, если все точки S принадлежат простейшему телу какого угодно малого объема (под простейшим телом понималось тело, представляющее собой объединение параллелепипедов, не имеющих общих внутренних точек, с гранями, параллельными координатным плоскостям). Отметим, что тело будет кубируемым тогда и только тогда, когда его граница является множеством объема нуль.

При рассмотрении понятия тройного интеграла нами будут использованы такие же подходы, как и при рассмотрении понятия двойного интеграла.

Определение 12.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом. Система непустых множеств $\tau = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ называется* ***разбиением множества*** *Ω, если выполнены следующие условия:*

1) Ω_k $(k = \overline{1,n})$ – *кубируемые множества положительного объема;*
2) $\mathrm{Int}\Omega_k \cap \mathrm{Int}\Omega_i = \emptyset$ *при* $k \neq i$;
3) $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$.

Множества Ω_k $(k = \overline{1,n})$ называются **частичными множествами**.
Объем частичного множества будем обозначать ΔV_k.
Число $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \mathrm{diam}\{\Omega_k\}$ назовем **мелкостью разбиения** τ множества Ω.

12.1 Задача о массе материального кубируемого тела

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом; функция $\gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ (физический смысл функции γ – это плотность, с которой масса распределена по $\overline{\Omega}$).

Необходимо дать понятие массы указанного материального тела и указать метод ее вычисления.

◀Если плотность $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, то масса тела $m_\Omega = \gamma_0 V_\Omega$, где V_Ω – объем тела.

В дальнейшем предположим, что тело неоднородное, то есть $\gamma \neq \text{const}$.

Рассмотрим произвольное разбиение τ множества Ω. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k, z_k) \in \overline{\Omega}_k$. Считаем, что для любых точек $(x, y, z) \in \overline{\Omega}_k$ плотность будет постоянной и равной $\gamma_k = \gamma(x, y, z)$.

Тогда масса материального тела Ω

$$m_\Omega \approx \sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k. \tag{12.1}$$

Если существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$, не зависящий от разбиения τ_F и выбора точек $(x_k, y_k, z_k) \in \overline{\Omega}_k$, то его называют **массой материального тела Ω.** ▶

Замечание 12.1. Можно привести и другие задачи, методы решения которых аналогичны методу решения предыдущей задачи, например задача о моменте инерции материального тела, задача о притяжении материальной точки телом и другие задачи (методы решения некоторых из этих задач будут показаны ниже).

12.2 Понятие тройного интеграла

Отвлекаясь от конкретного содержания предыдущей задачи, но повторяя аналогичные рассуждения, мы приходим к понятию тройного интеграла.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом.

Рассмотрим произвольное разбиение τ множества Ω. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(x_k, y_k, z_k) \in \overline{\Omega}_k$. Пусть

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k. \tag{12.2}$$

Будем называть σ_τ **интегральной суммой Римана** функции f по множеству Ω, соответствующей разбиению τ.

Определение 12.2. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют **пределом интегральной суммы Римана** функции f по множеству Ω, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \tau \;\; \lambda_\tau < \delta \;\; \forall (x_k, y_k, z_k) \in \Omega_k \;\; |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Указанный предел будем обозначать $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$.

Определение 12.3. *Если для функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$, то его называют **тройным интегралом** функции f по множеству Ω и обозначают $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$, а функцию f называют **интегрируемой** по множеству Ω.*

Функцию f называют **подынтегральной функцией**, $f(x,y,z)\,dxdydz$ – **подынтегральным выражением**, множество Ω – **областью интегрирования**.

Замечание 12.2. Аналогично, как и для двойного интеграла, для тройного интеграла справедливо необходимое условие интегрируемости: если функция f интегрируема по ограниченному кубируемому множеству Ω с положительным объемом, то она ограничена на этом множестве.

12.3 Суммы Дарбу. Условия существования тройного интеграла

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом; функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ограничена на Ω. Рассмотрим любое разбиение τ множества Ω.

Так как f ограничена на Ω, то она будет ограниченной на каждом частичном множестве Ω_k $(k = \overline{1,n})$. Пусть для каждого $k = 1, \ldots, n$

$$M_k = \sup_{(x,y,z)\in\Omega_k} f(x,y,z), \;\; m_k = \inf_{(x,y,z)\in\Omega_k} f(x,y,z).$$

Составим суммы

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta V_k, \;\; s_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta V_k.$$

Сумма S_τ называется **верхней суммой Дарбу**, s_τ – **нижней суммой Дарбу** функции f для разбиения τ.

Свойства сумм Дарбу исследуются аналогично, как и свойства сумм Дарбу функции одной переменной. В частности, можно показать, что множество верхних сумм Дарбу ограничено снизу, а нижних – сверху по всем разбиениям τ. Тогда

$I^* = \inf\limits_{\tau} \{S_\tau\}$ называют **верхним интегралом Дарбу**,

$I_* = \sup\limits_{\tau} \{s_\tau\}$ – **нижним интегралом Дарбу** функции f по множеству Ω.

Теорема 12.1 (первый критерий интегрируемости). *Ограниченная на Ω функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$.

Теорема 12.2 (критерий Дарбу). *Ограниченная на Ω функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω тогда и только тогда, когда $I_* = I^* = I$.*

Теорема 12.3 (критерий Римана). *Ограниченная на Ω функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует τ, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.*

Теорема 12.4. *Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω, а функция $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ограничена на Ω, причем*

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : \;\; f(x, y, z) \neq g(x, y, z)\}$$

есть множество объема нуль. Тогда функция функция g также будет интегрируемой по Ω, причем

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint\limits_{\Omega} g(x, yz) dx dy dz.$$

Теорема 12.5. *Если функция $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то она интегрируема по множеству $\overline{\Omega}$.*

Теорема 12.6. *Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ограничена на Ω и непрерывна на Ω, за исключением, может быть, множества точек объема нуль, то f будет интегрируемой по множеству Ω.*

12.4 Основные свойства тройных интегралов

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом.

Теорема 12.7 (свойство линейности). *Если функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируемы по множеству Ω, а α, β – любые действительные числа, то функция $\varphi = \alpha f + \beta g$ также интегрируема по множеству Ω и справедлива формула*

$$\iiint\limits_{\Omega} \varphi(x,y,z)\,dxdydz = \alpha \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz + \beta \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.3}$$

Теорема 12.8 (свойство аддитивности). *Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω, то для любого разбиения τ_Ω функция f будет интегрируемой по каждому частичному множеству, причем*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{k=1}^{n} \iiint\limits_{\Omega_k} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.4}$$

Если же функция f интегрируема по каждому частичному множеству Ω_k, то она будет интегрируемой и по множеству Ω, и также будет справедливо равенство (12.4).

Теорема 12.9 (свойство монотонности). *Если функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $g : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируемы по множеству Ω и для любой точки $(x,y,z) \in \Omega$ $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, то*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \leqslant \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.5}$$

Теорема 12.10 (оценка интеграла по модулю). *Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω, то и функция $|f|$ интегрируема по Ω, и*

$$\left| \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz \right| \leqslant \iiint\limits_{\Omega} |f(x,y,z)|\,dxdydz. \tag{12.6}$$

Теорема 12.11 (теорема о среднем). *Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по множеству Ω,*

$$m = \inf_{(x,y,z)\in\Omega}\{f(x,y,z)\}, \quad M = \sup_{(x,y,z)\in\Omega}\{f(x,y,z)\},$$

то

$$mV_\Omega \leqslant \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \leqslant MV_\Omega,$$

где V_Ω – объем тела Ω, причем существует $\mu \in [m,M]$, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \mu \cdot V_\Omega. \tag{12.7}$$

Следствие 12.1. *Если функция $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то существует точка $(x_0,y_0,z_0) \in \overline{\Omega}$, что*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V_\Omega. \tag{12.8}$$

12.5 Способы вычисления тройных интегралов

Сначала рассмотрим случай, когда область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \\ l \leqslant z \leqslant p \end{array} \right\}$, где $a, b, c, d, l, p \in \mathbb{R}$. Пусть $G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b, \\ c \leqslant y \leqslant d \end{array} \right\}$, $F = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b, \\ l \leqslant z \leqslant p \end{array} \right\}$, $K = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d, \\ l \leqslant z \leqslant p \end{array} \right\}$.

Теорема 12.12. *Пусть функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по Ω.*

Если для любой точки $(x,y) \in G$ существует $\int\limits_l^p f(x,y,z)dz = I(x,y)$, то существует

$$\iint\limits_G dxdy \int\limits_l^p f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_l^p f(x,y,z)dz = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz. \tag{12.9}$$

Если для любой точки $(x,z) \in G$ существует $\int\limits_c^d f(x,y,z)dz = J(x,z)$, то существует

$$\iint\limits_F dxdy \int\limits_c^d f(x,y,z)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_l^p dz \int\limits_c^d f(x,y,z)dy = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz. \tag{12.10}$$

Если для любой точки $(y,z) \in K$ существует $\int\limits_a^b f(x,y,z)dx = Q(y,z)$, то существует

$$\iint\limits_K dxdy \int\limits_a^b f(x,y,z)dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_l^p dz \int\limits_a^b f(x,y,z)dx = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz. \tag{12.11}$$

◀Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 10.1.▶
Интегралы в левых частях равенств (12.9)–(12.11) называют **повторными интегралами**.

Замечание 12.3. Если функция $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то все повторные интегралы в равенствах (12.9)–(12.11) будут равны.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; функции

$$z_1 : \overline{G} \to \mathbb{R}, \quad z_2 : \overline{G} \to \mathbb{R}$$

непрерывны на $\overline{G}$, причем для любой точки $(x, y) \in \overline{G}$ $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$.

Множество $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{G},\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\}$ **называется простейшим цилиндрическим телом первого типа** или z**-цилиндрической областью** (рисунок 12.1).

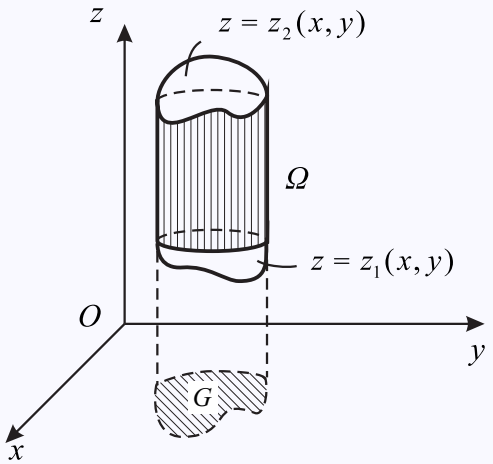


Рисунок 12.1

Теорема 12.13. *Пусть Ω – простейшее цилиндрическое тело первого типа. Если функция $f:\Omega\to\mathbb{R}$ интегрируема по Ω и для любой точки $(x,y)\in\overline{G}$ существует интеграл*

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = I(x,y),$$

то существует повторный интеграл

$$\iint\limits_G I(x,y)dxdy = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz. \tag{12.12}$$

◀Доказательство теоремы во многом аналогично доказательству теоремы 10.2.▶

Аналогичные теоремы будут справедливы и для так называемых простейших цилиндрических тел второго и третьего типа (y-цилиндрической и x-цилиндрической области соответственно). Приведем соответствующее утверждение для y-цилиндрической области.

Пусть $F\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченное квадрируемое множество с положительной площадью; функции

$$y_1:\overline{F}\to\mathbb{R},\ \ y_2:\overline{F}\to\mathbb{R}$$

непрерывны на $\overline{F}$, причем для любой точки $(x,z)\in\overline{F}$

$$y_1(x,z)\leqslant y_2(x,z).$$

Множество

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,z)\in\overline{F},\ \ y_1(x,z)\leqslant z\leqslant y_2(x,z)\right\}$$

будем называть **простейшим цилиндрическим телом второго типа** или **y-цилиндрической областью** (рисунок 12.2).

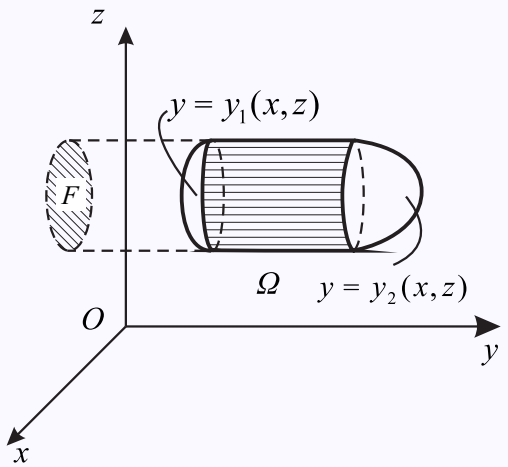


Рисунок 12.2

Теорема 12.14. *Пусть Ω – простейшее цилиндрическое тело второго типа. Если функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ интегрируема по Ω и для любой точки $(x, z) \in \overline{F}$ существует интеграл*

$$\int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dz = J(x, z),$$

то существует повторный интеграл

$$\iint\limits_F J(x, z)dxdz = \iint\limits_F dxdy \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)dy = \iiint\limits_\Omega f(x, y, z)dxdydz. \qquad (12.13)$$

Определение и соответствующую теорему для x-цилиндрической области сформулируйте самостоятельно.

Пример 12.1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} z dx dy dz$, где Ω – тело, ограниченное поверхностями $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

◀Изобразим область интегрирования на рисунке 12.3. Видно, что область интегрирования есть простейшее цилиндрическое тело как первого, так и второго и третьего типов.

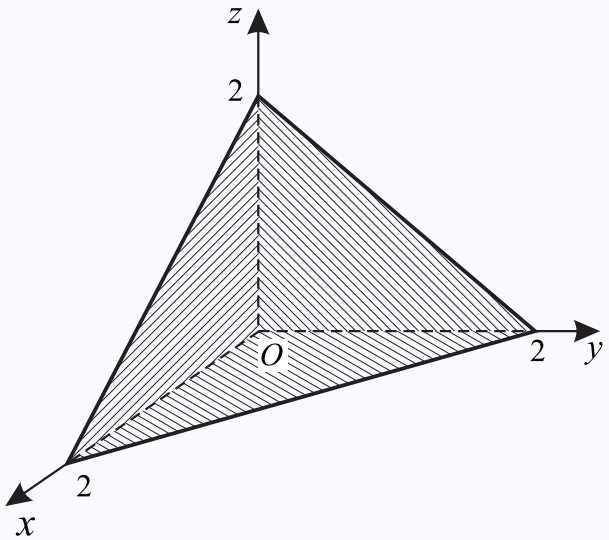


Рисунок 12.3

$$I = \iiint\limits_{\Omega_3} z dx dy dz = \int\limits_0^2 z dz \int\limits_0^{2-z} dy \int\limits_0^{2-y-z} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 z dz \int\limits_0^{2-z} x\Big|_0^{2-y-z} dy = \int\limits_0^2 z dz \int\limits_0^{2-z} (2-y-z) dy = \int\limits_0^2 z \left(2y - \frac{y^2}{2} - zy\right)\Big|_0^{2-z} dz =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(4z - 2z^2 - \frac{1}{2}z(4 - 4z + z^2) - 2z^2 + z^3\right) dz =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(4z - 2z^2 - 2z + 2z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 2z^2 + z^3\right) dz = \int\limits_0^2 \left(2z - 2z^2 + \frac{1}{2}z^3\right) dz = \frac{2}{3}. \blacktriangleright$$

12.6 Замена переменных в тройном интеграле

Теорема о замене переменных в тройном интеграле формулируется и доказывается во многом аналогично, как и теорема о замене переменных в двойном интеграле.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и $\Psi \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченные кубируемые области с положительными объемами.

Теорема 12.15. *Пусть функции $x = x(u,v,t)$, $y = y(u,v,t)$, $z = z(u,v,t)$, $(u,v,t) \in \overline{\Psi}$, непрерывны на $\overline{\Psi}$ и биективно отображают область Ψ на область Ω, а границу $\partial\Psi$ на границу $\partial\Omega$, а их частные производные первого порядка ограничены и непрерывны на Ψ. Якобиан $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,t)} \neq 0$ на Ψ.*

Если функция $f = f(x,y,z)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint\limits_{\Psi} f(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t)) \, |J| \, du dv dt. \tag{12.14}$$

12.6.1 Цилиндрические координаты

Пусть роль функций x, y и z играют, соответственно, функции

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z, \tag{12.15}$$

где r и φ – полярные координаты проекции точки $M'(r,\varphi,z)$ пространства $Oxyz$ на плоскость $z = 0$ ($0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$). Величины r, φ, z называются **цилиндрическими координатами** точки $M'(r,\varphi,z)$ (рисунок 12.4).

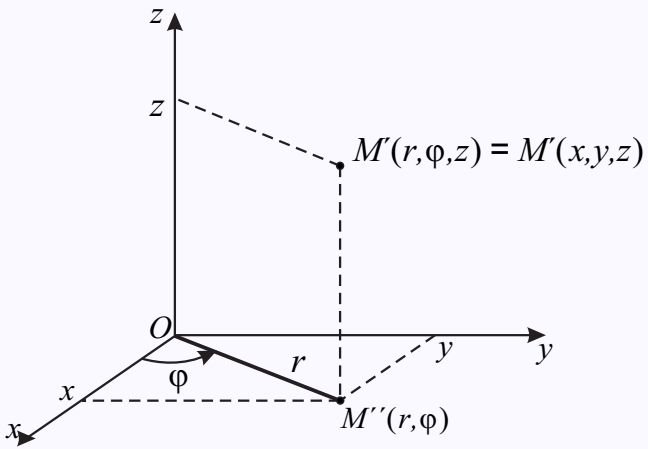


Рисунок 12.4

Якобиан

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} (r\cos\varphi)'_r & (r\cos\varphi)'_\varphi & (r\cos\varphi)'_z \\ (r\sin\varphi)'_r & (r\sin\varphi)'_\varphi & (r\sin\varphi)'_z \\ z'_r & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►
344
Приложение
Закрыть

12.6.2 Сферические координаты

Пусть теперь роль функций x, y и z играют, соответственно, функции

$$x = \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z = \rho\cos\theta, \tag{12.16}$$

где точка $M'(\rho,\varphi,\theta)$ из пространства $Oxyz$. Причем ρ – расстояние от точки $M'(\rho,\varphi,\theta)$ до начала координат, φ – полярная координата, θ – угол между осью Oz и вектором $\overrightarrow{OM'}$ (рисунок 12.5).

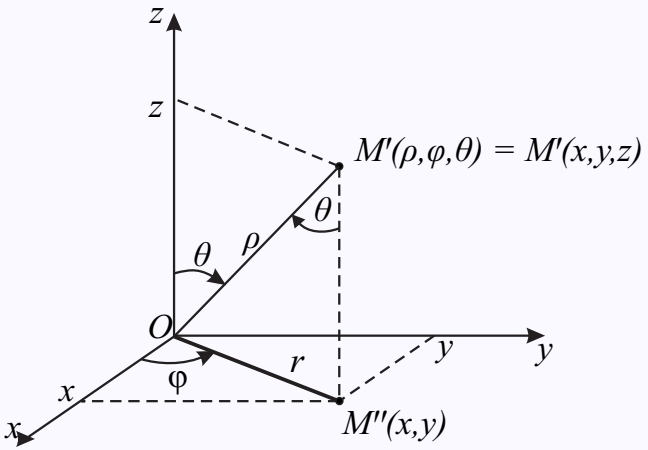


Рисунок 12.5

Координаты указанной точки $M'(\rho,\varphi,\theta)$ называются **сферическими координатами**, причем

$$0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Найдем якобиан указанного отображения.

$$J = \begin{vmatrix} (\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta)'_\rho & (\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta)'_\rho & (\rho\cos\theta)'_\rho \\ (\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta)'_\varphi & (\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta)'_\varphi & (\rho\cos\theta)'_\varphi \\ (\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta)'_\theta & (\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta)'_\theta & (\rho\cos\theta)'_\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta & \sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta & \rho\cos\varphi\cdot\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cdot\cos\theta & \rho\sin\varphi\cdot\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta & \sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cdot\cos\theta & \sin\varphi\cdot\cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\sin\theta\left((-1)^{1+3}\cos\theta\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cdot\cos\theta & \sin\varphi\cdot\cos\theta \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +(-1)^{3+3}(-\sin\theta)\begin{vmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta & \sin\varphi\cdot\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) = \rho^2\sin\theta(-\cos^2\theta-\sin^2\theta) = -\rho^2\sin\theta.$$

Замечание 12.4. Если рассматривать точки вида $M'(\rho,\theta,\varphi)$, то $J=\rho^2\sin\theta$, но в обоих случаях $|J|=\rho^2\sin\theta$.

Замечание 12.5. Формула (12.14) в случае перехода от прямоугольных декартовых координат к криволинейным цилиндрическим и сферическим координатам примет, соответственно, вид (12.17) и (12.18).

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Psi f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rd\varphi drdz, \tag{12.17}$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Psi f(\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta, \rho\sin\varphi\cdot\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho. \tag{12.18}$$

Пример 12.2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$, где область интегрирования Ω ограничена поверхностями $2z=x^2+y^2$ и $z=2$.

◀Изобразим область интегрирования (рисунок 12.6), показывая ее только в первом октанте с учетом ее симметрии относительно координатных плоскостей $x=0$ и $y=0$, а также симметрии подынтегральной функции относительно осей Ox, Oy и Oz.

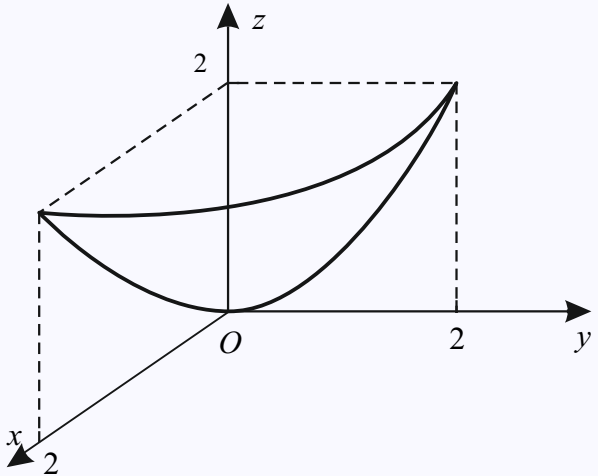


Рисунок 12.6

В тройном интеграле перейдем от декартовых координат к цилиндрическим.

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\iiint\limits_{\Psi}r^2rdrd\varphi dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr\int\limits_{\frac{r^2}{2}}^2 dz=2\pi\int\limits_0^2 r^3z\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2dr=\frac{16}{3}\pi.\ \blacktriangleright$$

Пример 12.3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$, где область интегрирования Ω ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $R>0$.

◀Изобразим область интегрирования Ω в первом октанте с учетом симметрии ее относительно координатных плоскостей $x=0$ и $y=0$, а также симметрии и подынтегральной функции $z^2=z^2+0\cdot x^2+0\cdot y^2$ относительно этих плоскостей (рисунок 12.7).

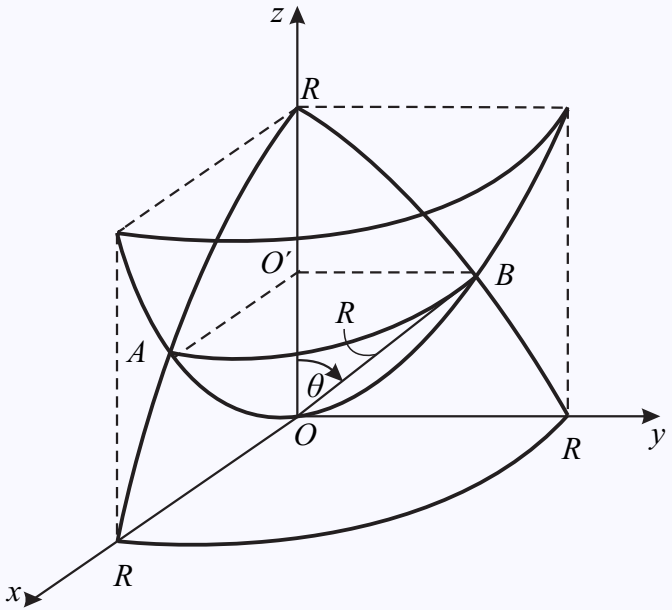


Рисунок 12.7

Вначале находим аппликату точек пересечения сфер, решая систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2+z^2=2R^2z. \end{cases}$

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
348
Приложение
Закрыть

Тогда $R^2 = 2Rz$, $z = \frac{R}{2}$ $\left(OO' = \frac{R}{2}\right)$. Угол θ определяем из $\triangle O'OB$ $(OB = R)$:

$$\cos\theta = \frac{R}{2R},\ \cos\theta = \frac{1}{2},\ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Перейдем к сферическим координатам. При этом надо учесть, что при $z \geqslant 0$ лучи, выходящие из начала координат (точки O), при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ пересекают границу области интегрирования Ω, представленную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а при $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ – уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. По этой причине представляем область интегрирования в виде объединения двух частичных множеств $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 – для $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, Ω_2 – для $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Дальше воспользуемся свойством аддитивности тройного интеграла

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_1} z^2 dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\Psi_1} \rho^4 \cos^2\theta \cdot \sin\theta d\rho d\varphi d\theta + \iiint\limits_{\Psi_2} \rho^4 \cos^2\theta \cdot \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= 4\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta \cdot \cos^2\theta d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos^2\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^4 d\rho\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{R} + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^{2R\cos\theta} d\theta\right) =$$

$$= 2\pi\left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)\frac{R^5}{5} - \frac{32}{5}R^5 \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta d(\cos\theta)\right) = 2\pi\left(\frac{7R^5}{120} - \frac{32R^5}{5}\frac{\cos^8\theta}{8}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{59\pi R^5}{480}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие тройного интеграла.
2. Сформулируйте критерии интегрируемости функции трех переменных.
3. Сформулируйте свойства тройного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному в случае, когда область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед.
5. Дайте определения простейших цилиндрических тел первого, второго и третьего типа.
6. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному в случае, когда область интегрирования представляет собой простейшее цилиндрическое тело первого типа.
7. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.
8. Запишите якобиан перехода от декартовой системы координат к цилиндрической и сферической системам координат.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

Вычисление тройных интегралов и их геометрические приложения

Задание 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho d\rho \int\limits_R^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} dz$.

$$\blacktriangleleft \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho d\rho \int\limits_R^{R+\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = 2\pi \int\limits_0^{R} \rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho = -2\pi \left(\frac{(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_G xdxdydz$, где

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ 0 \leqslant y \leqslant h;\ x+z \leqslant a,\ a>0;\ x \geqslant 0\right\}.$$

◀Изобразим область интегрирования G на рисунке 12.8.

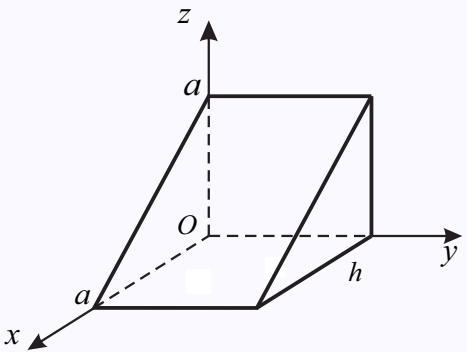


Рисунок 12.8

Тогда область интегрирования можно представить в виде

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant h; \ 0 \leqslant z \leqslant a - x\right\}.$$

Тогда

$$\iiint\limits_G x dx dy dz = \int\limits_0^a x dx \int\limits_0^h dy \int\limits_0^{a-x} dz = h \int\limits_0^a x\,(a - x) \cdot dx = \frac{ha^3}{6}. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить тройной, интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, где область интегрирования V ограничена поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

$\blacktriangleleft$Уравнение $x + y + z = 1$ определяет плоскость, отсекающую на осях отрезки, равные 1; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – координатные плоскости. Область интегрирования V есть пирамида (рисунок 12.9).

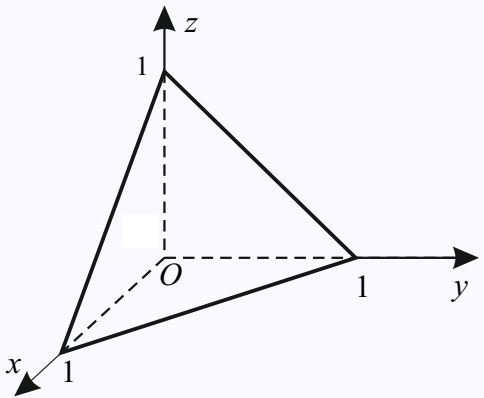


Рисунок 12.9

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in G,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y\right\},$$

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\right\}.$$

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \iint\limits_G dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}. \blacktriangleright$$

Если в задаче о массе материального тела положить $\rho(x,y,z) = 1$, то масса такого тела Ω будет численно равна объему этого тела. Получим **формулу вычисления объема тела** через тройной интеграл:

$$V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz. \tag{12.19}$$

Задание 4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$ и $3z=x^2+y^2$.

◀Изобразим поверхности только в первом октанте с учетом симметрии тела относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$ (рисунок 12.10).

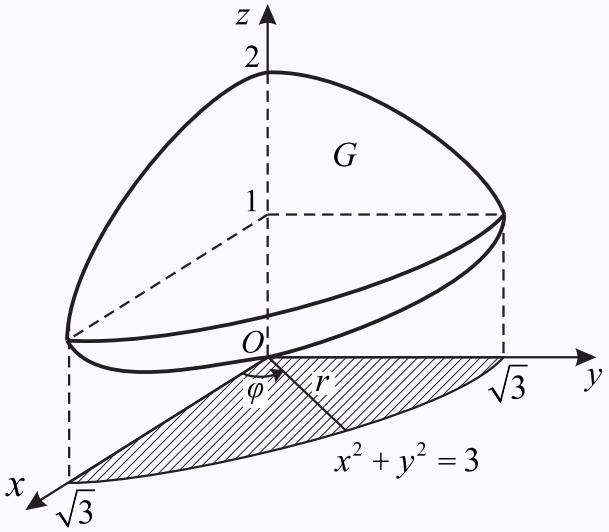


Рисунок 12.10

В силу симметрии достаточно вычислить объем тела, находящегося в первом октанте, и результат умножить на 4.

Найдем проекцию линии пересечения сферы и параболоида на плоскость xOy. Для этого из системы уравнений $z^2=4-(x^2+y^2)$, $z^2=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{9}$ исключим переменную z. В результате получим уравнение

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{9}=4-\left(x^2+y^2\right) \text{ или } \left(x^2+y^2\right)^2+9\left(x^2+y^2\right)-36=0.$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Следовательно, уравнением проекции будет окружность $x^2+y^2=3$. Так как проекция данного тела на плоскость xOy есть круг $x^2+y^2\leqslant 3$, то для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к цилиндрическим координатам.

После преобразования по формулам (12.15) уравнения окружности $x^2+y^2=3$, параболоида $3z=x^2+y^2$ и сферы $x^2+y^2+z^2=4$, соответственно, принимают вид $r=\sqrt{3}$, $z=\frac{1}{3}r^2$ и $z=\sqrt{4-r^2}$. Из рисунка 12.10 видно, что в области интегрирования (G) угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, r – от 0 до $\sqrt{3}$, а z – от $z=\frac{1}{3}r^3$ до $z=\sqrt{4-r^2}$. Потому

$$V_\Omega=4\iiint\limits_\Omega dxdydz=4\iiint\limits_G rdrd\varphi dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}rz\Big|_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}dr=2\pi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)dr=$$

$$=2\pi\left(\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\sqrt{4-r^2}dr-\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{r^3}{3}dr\right)=2\pi\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-r^2}d(4-r^2)-\frac{r^4}{12}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{2}\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{9}{12}\right)=\frac{19\pi}{6}\text{ (ед. объема). }\blacktriangleright$$

Задание 5. Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

◀Задача сводится к вычислению тройного интеграла по области, ограниченной эллипсоидом. Учитывая, что область симметрична относительно координатных плоскостей, можем записать:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=8\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int\limits_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz=8c\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy=\frac{4}{3}\pi abc\text{ (куб. ед.). }\blacktriangleright$$

Задание 6. Найти с помощью тройного интеграла объем тела

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz;\ z^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4z^2,\ (R > 0)\right\}.$$

◀Изобразим тело G на рисунке 12.11 в первом октанте.

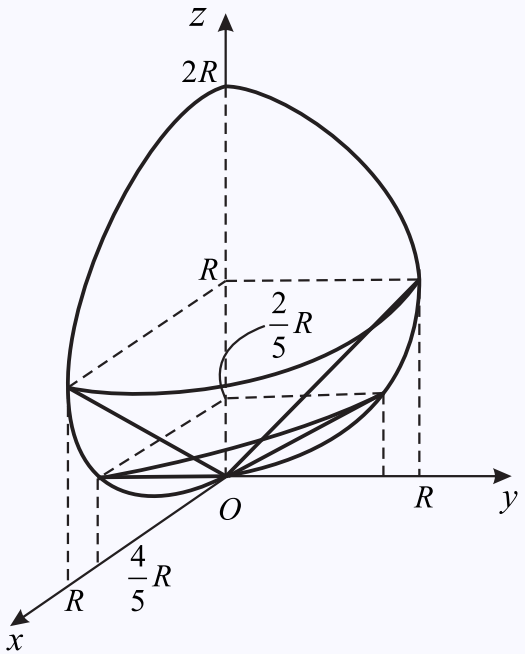


Рисунок 12.11

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz + R^2 \leqslant R^2; \quad x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leqslant R^2;$$

$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant z^2, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} \leqslant z^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rz, \\ x^2+y^2=z^2; \end{cases}$ $2z^2=2Rz,$ $z=R.$ $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rz, \\ x^2+y^2=4z^2; \end{cases}$ $5z^2=2Rz,$ $z^2=\frac{2}{5}Rz,\ z=\frac{2}{5}R.$

Вычисление тройного интеграла $V=\iiint\limits_G dxdydz$ будем проводить в сферических координатах:

$$x=\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Тело G ограничено поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=2Rz;\quad x^2+y^2=z^2\ \text{ и }\ x^2+y^2=4z^2.$$

Оно симметрично по объему относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Дальше найдем значения углов θ (рисунки 12.12, 12.13).

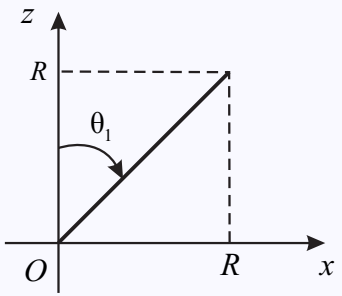


Рисунок 12.12

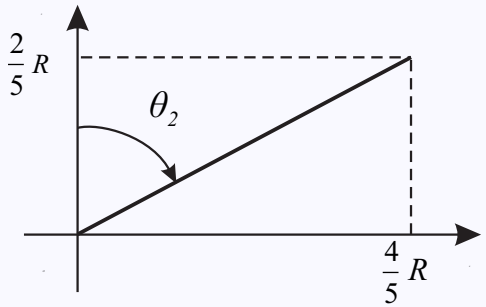


Рисунок 12.13

$$\theta_1=\frac{\pi}{4},\ x^2+y^2=4z^2,\quad z=\frac{2}{5}R,\quad x^2+y^2=\frac{16}{25}R^2.$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\frac{4}{5}R}{\frac{2}{5}R};\quad \operatorname{tg}\theta_2 = 2,\quad \theta_2 = \operatorname{arctg} 2.$$

Запишем уравнение сферы в сферических координатах:

$$\rho = 2R\cos\theta.$$

Вычисляем объем тела:

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = 2\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \sin\theta \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2R\cos\theta} d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} \sin\theta \cdot 8R^3\cos^3\theta d\theta = -\left.\frac{16R^3\pi}{3}\cdot\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} =$$

$$= -\frac{4R^3\pi}{3}\left(\cos^4(\operatorname{arctg} 2) - \frac{1}{4}\right) = \left[\cos^4\alpha = \frac{\cos^4\alpha}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2} = \frac{1}{\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)^2}\right] =$$

$$= -\frac{4R^3\pi}{3}\left(\frac{1}{\left(\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg} 2+1\right)^2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{R^3\pi}{3} - \frac{4R^3\pi}{3\cdot 25} = \frac{21R^3\pi}{3\cdot 25} = \frac{7R^3\pi}{25}.\ \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + z^4 = 6^3 z.$$

◀Изобразим в системе координат $Oxyz$ заданную поверхность, перейдя предварительно к сферическим координатам.

$$\rho^4\sin^4\theta + \rho^4\cos^4\theta = 6^3\rho\cos\theta;\ \rho^3 = \frac{6^3\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta};\ \rho = 6\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}.$$

Тело симметрично относительно координатных осей $x = 0$ и $y = 0$. По этой причине изобразим тело только в первом октанте (рисунок 12.14).

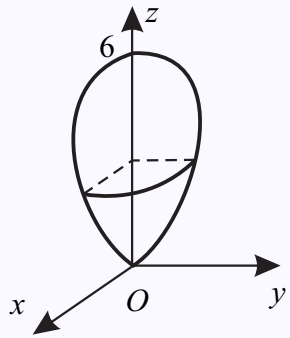


Рисунок 12.14

$$V = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{6\sqrt[3]{\frac{\cos\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}} \rho^2 d\rho = \frac{2\cdot 6^3}{3}\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta} = \frac{2\cdot 6^3\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{2\cdot 6^3\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^4\theta+1} d(\operatorname{tg}\theta) = \left[\begin{array}{c} u=\operatorname{tg}\theta, \\ u_{\text{н}}=0, \\ u_{\text{в}}=+\infty \end{array}\right] = \frac{2\cdot 6^3\pi}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{udu}{u^4+1} = \frac{6^3\pi}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(u^2)}{(u^2)^2+1} = \left[\begin{array}{c} t=u^2, \\ t_{\text{н}}=0, \\ t_{\text{в}}=+\infty \end{array}\right] =$$

$$= \frac{6^3\pi}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+1} = \frac{6^3\pi}{3}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} = 36\pi^2 \text{ (куб. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2\right)^2=z^2,\ z\geqslant 0$.

◀Преобразуем аналитическое выражение поверхности с помощью перехода от декартовых координат к обобщенным сферическим координатам:

$$x=a\rho\cos\varphi\cdot\sin\theta;\ y=b\rho\sin\varphi\cdot\sin\theta;\ z=\rho\cos\theta.$$

$$\left(\frac{\rho^2a^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2b^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\theta}{b^2}+\rho^2\cos^2\theta\right)^2=\rho^2\cos^2\theta;\ \rho^4=\rho^2\cos^2\theta;\quad \rho=\cos\theta.$$

С учетом симметричности объема тела относительно координатных плоскостей $x=0$ и $y=0$ изобразим поверхность на рисунке 12.15 только в первом октанте.

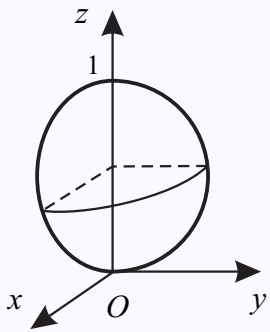


Рисунок 12.15

Якобиан перехода от декартовых координат к обобщенным сферическим координатам $J=\rho^2ab\sin\theta$. Дальше вычисляем объем тела:

$$V=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}\rho^2d\rho=2ab\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{2ab\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos^3\theta d\theta=\frac{ab\pi}{6}\ \text{(куб. ед.)}.\ ▶$$

Задание 9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2+y^2+z^2=a^2;\ \left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right),\ a>0,\ |x|\geqslant|y|.$$

◀Будем использовать цилиндрические координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и $z=z$ с якобианом перехода от декартовых координат к цилиндрическим $J=r$.

$$x^2+y^2+z^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi+z^2=r^2+z^2;\ r^2+z^2=a^2;$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right);\ r^4=a^2r^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right);\ r=a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Построим в плоскости xOy кривую $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рисунок 12.16).

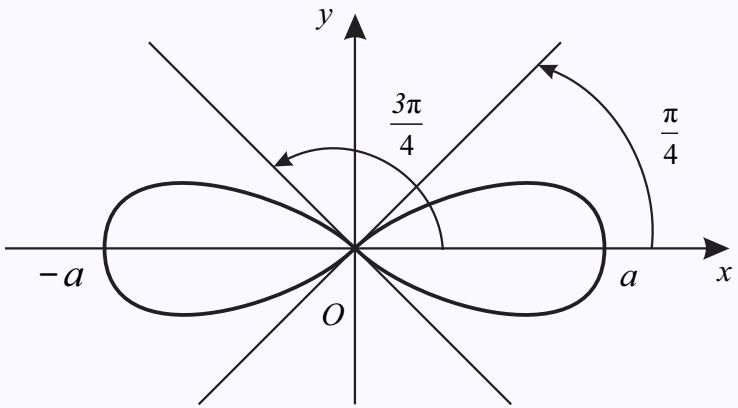


Рисунок 12.16

$$\cos 2\varphi\geqslant 0;\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ -\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k\in\mathbb{Z}.$$

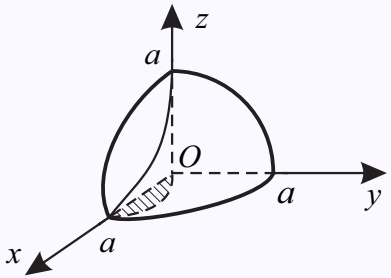


Рисунок 12.17

Тело симметрично относительно всех координатных плоскостей, поэтому на рисунке 12.17 его изображаем только в первом октанте.

С учетом неравенства $|x| \geqslant |y|$ рассматриваем тело, связанное с внутренностью цилиндрической поверхности $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Вычисляем тройной интеграл, равный величине искомого объема тела:

$$V = 8\iiint\limits_G dxdydz = 8\iiint\limits_D rd\varphi drdz = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr \int\limits_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = -4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \left(a^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(a^2-r^2\right) =$$

$$= -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(a^2-a^2\cos 2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - \left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) d\varphi = -\frac{8}{3}a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) d\varphi = -\frac{8}{3}a^3\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2^{\frac{3}{2}}\sin^3\varphi d\varphi - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3}a^3\left(-2^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2\varphi\right) d(\cos\varphi) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^3}{9}\left(6\pi + 40 - 32\sqrt{2}\right) \text{ (куб. ед.). } \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\quad z=0.$$

◀Изобразим тело на рисунке 12.18 только в первом октанте, так как оно симметрично относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$.

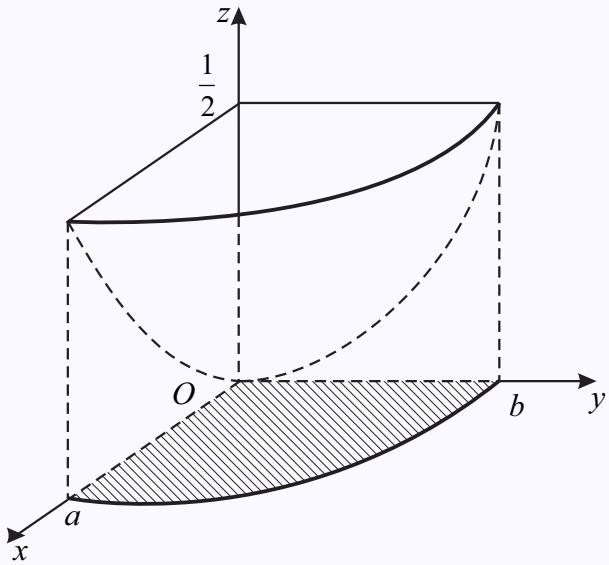


Рисунок 12.18

При вычислении объема тела воспользуемся обобщенными цилиндрическими координатами

$$x=ar\cos\varphi,\ \ y=br\sin\varphi,\ \ z=z.$$

Вначале найдем якобиан перехода от декартовых координат к обобщенным цилиндрическим координатам: $J = abr$.

Вычисляем искомый объем:

$$V = 4\iiint\limits_G dxdydz = 4ab\iiint\limits_D rd\varphi drdz =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};\ 2z = \frac{a^2r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\varphi}{b^2}; \\ 2z = r^2,\ z = \frac{r^2}{2};\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ r^2 = 1,\ r = 1 \end{array}\right] =$$

$$= 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_0^{\frac{r^2}{2}} dz = 2ab\pi\int\limits_0^1 rz\Big|_0^{\frac{r^2}{2}} dz = 2ab\pi\int\limits_0^1 \frac{r^3}{2}dr = \frac{ab\pi}{4}\ \text{(куб. ед.).}\ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить следующие тройные интегралы:

1.1 $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 xyzdz$;

1.2 $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy}(x+y+z)dz$;

1.3 $\int\limits_1^2 dy\int\limits_y^2 dx\int\limits_0^{\frac{1}{xy}} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)}$;

1.4 $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_y^0 dz\int\limits_0^{zy} y^2\cos xdx$;

1.5 $\int\limits_0^4 dz\int\limits_{-z}^z dx$;

1.6 $\int\limits_1^3 dz\int\limits_{1-z}^{3-z} dy\int\limits_0^{3-y-z} \frac{1}{(x+y+z)^2}dx$.

2. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в следующих тройных интегралах в декартовой системе координат:

2.1 $\int\limits_{1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{0}^{1-x-y} f(x,y,z)dz;$

2.2 $\int\limits_{1}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y,z)dz;$

2.3 $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{4-x} dy \int\limits_{0}^{4-x-y} f(x,y,z)dz;$

2.4 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1-|y-1|} f(x,y,z)dz;$

2.5 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{0}^{2-|x-1|} f(x,y,z)dz;$

2.6 $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$

3. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в цилиндрической системе координат в интеграле $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dx$, если

3.1 $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\};$

3.2 $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant k^2z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\};$

3.3 $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2\};$

3.4 $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az,\ x^2+y^2 \leqslant z^2\};$

3.5 $V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2,\ z \geqslant R\}.$

4. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в сферической системе координат в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dx$, если

   4.1 $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leqslant 4az,\ x^2+y^2\leqslant 3z^2\}$;

   4.2 $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ z^2\geqslant R/3\}$;

   4.3 $V=\{(x,y,z): x^2+y^2\leqslant R^2,\ 0\leqslant z\leqslant H,\ (H\geqslant R)\}$.

5. Вычислить тройные интегралы по заданным областям интегрирования:

   5.1 $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$, где $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$;

   5.2 $\iiint\limits_V \rho\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, где $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$; $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$;

   5.3 $\iiint\limits_V xdxdydz$, где область V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+z=a$;

   5.4 $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$;

   5.5 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\leqslant 2z,\ \ 0\leqslant z\leqslant 2)\}$;

   5.6 $\iiint\limits_V (x^2-4xy+y^2)dxdydz$, где $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ 0\leqslant y\leqslant 1,\ \ 0\leqslant z\leqslant 1\}$;

   5.7 $\iiint\limits_V xdxdydz$, где $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 0\leqslant y\leqslant h,\ \ x+z\leqslant a,\ \ x\geqslant 0,\ \ z\geqslant 0\}$;

   5.8 $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\leqslant a\sqrt{3}x,\ \ x^2+y^2+z^2\leqslant ay,\ \ z\geqslant 0\}$;

   5.9 $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, где $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ y^2+z^2\leqslant x^2,\ x\geqslant 0\}$;

   5.10 $\iiint\limits_V zdxdydz$, где $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ \ z\geqslant 0\right\}$.

6. Вычислить с помощью тройного интеграла объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

6.1 $x^2+y^2+4z^2=1$;

6.2 $x+y+z=a$, $x+y+z=2a$, $x+y=z$, $x+y=2z$;

6.3 $y^2=4a^2-3ax$, $y^2=ax$, $z=\pm h$;

6.4 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$, $x=a$;

6.5 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2z$;

6.6 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2xyz$;

6.7 $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$;

6.8 $(x^2+y^2+z^2)^2=az(x^2+y^2)$;

6.9 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2z^4$;

6.10 $(x^2+y^2+z^2)^3=az(x^2+y^2)^2$;

6.11 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2$;

6.12 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^2)$;

6.13 $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3z(x^3-y^2)$;

6.14 $(x^2+y^2+z^2)^4=a^3z\,(x^4+y^4)$;

6.15 $(x^2+y^2)^3+z^6=a^3xyz$;

6.16 $r=a\sin\varphi\,(1+\cos\psi)$;

6.17 $r=a\sin\varphi\sqrt[3]{\cos\varphi}$;

6.18 $r=\sin\varphi\left(a\sin^2\psi+b\cos^2\psi\right)$.

7. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

Физические приложения тройных интегралов

Из задачи о массе материального кубируемого тела и понятия тройного интеграла следует, что если плотность в каждой точке указанного в задаче тела Ω равна значению функции $\gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}_+$, непрерывной на $\overline{\Omega}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное кубируемое множество с положительным объемом, то **масса тела** вычисляется по формуле

$$m_\Omega = \iiint\limits_\Omega \gamma(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.20}$$

Задание 1. Определить массу тела, ограниченного поверхностями

$$z = h \ \ (h > 0) \ \text{ и } x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

если плотность в каждой точке тела пропорциональна аппликате этой точки, а в точке $(0,0,h)$ эта плотность равна h.

◀Плотность тела $\gamma = kz$. Найдем коэффициент пропорциональности из начальных данных

$$\gamma(0,0,h) = h, \ \ h = kh, \ \ k = 1.$$

Искомую массу вычисляем по формуле (12.20), выполнив переход к цилиндрическим координатам (рисунок 12.19), учитывая симметрию γ и Ω относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$.

$$m_\Omega = \iiint\limits_\Omega z\,dxdydz = \iiint\limits_\Omega zrdrd\varphi dz = \left[x^2 + y^2 = z^2, r^2 = z^2, z = r\right] =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^h rdr \int\limits_r^h zdz = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \int\limits_0^h r \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_r^h dr =$$

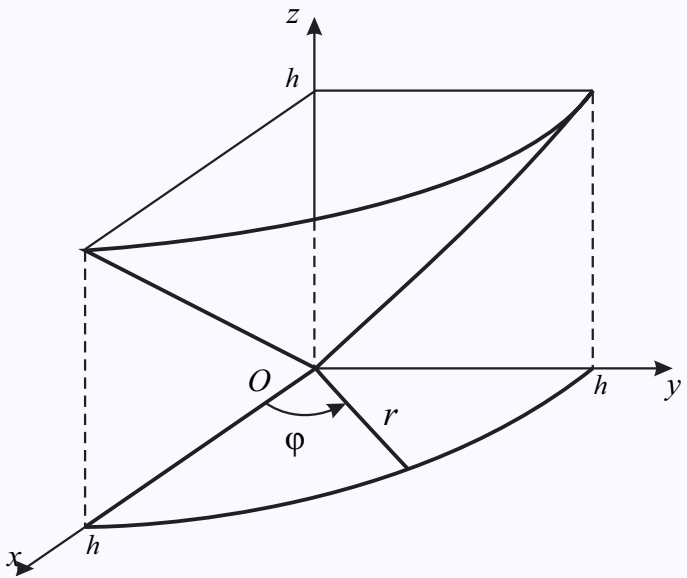


Рисунок 12.19

$$= \pi \int_0^h r\left(h^2 - r^2\right) dr = \pi\left(h^2 \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^h - \frac{r^4}{4}\Big|_0^h\right) = \pi\left(\frac{h^4}{2} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{\pi h^4}{4} \text{ (ед. массы). } \blacktriangleright$$

Задание 2. Определить массу сферического слоя между поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad (a < 0)\,,$$

если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

◀Изобразим поверхности только в первом октанте (рисунок 12.20) с учетом симметрии тела и подынтегральной функции относительно всех координатных плоскостей.

Вычисляем искомую массу по формуле (12.20), переходя к сферическим координатам, с учетом того, что плотность $\gamma(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где k – коэффициент пропорциональности.

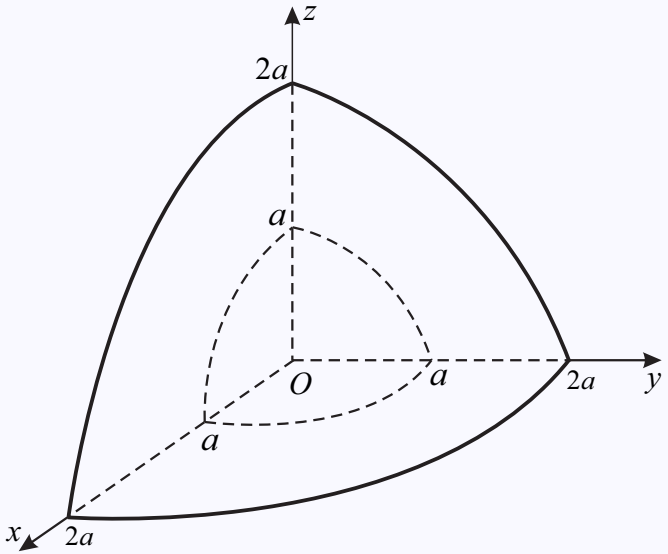


Рисунок 12.20

$$m_\Omega=\iiint\limits_\Omega \gamma(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=k\iiint\limits_\Omega \frac{1}{r}r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta=$$

$$=k\iiint\limits_\Omega r\sin\theta dr d\varphi d\theta=8k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_a^{2a}rdr=8k\frac{\pi}{2}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\frac{r^2}{2}\Big|_a^{2a}=6k\pi a^2 \text{ (ед. массы). } \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z^2 \geqslant x^2 + y^2$, $z \geqslant 0$, если плотность $\gamma = z$.

◀По массе тело симметрично относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$. По этой причине изображаем тело только в первом октанте (рисунок 12.21).

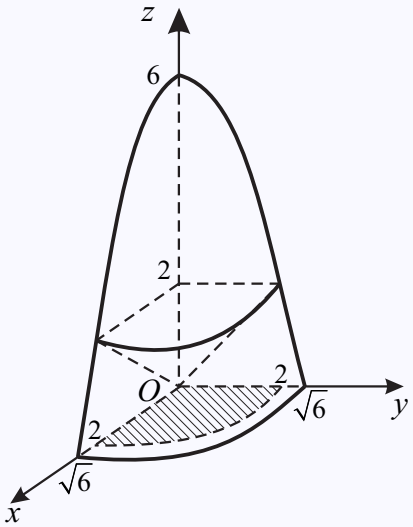


Рисунок 12.21

Находим аппликату точек пересечения параболоида вращения и конуса. Имеем $z = 6 - z^2$, $z^2 + z - 6 = 0$, $z_1 = -3$, $z_2 = 2$. У нас $z_2 = 2$. Вычисление проводим в цилиндрической системе координат.

$$m = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_r^{6-r^2} z dz = 2\pi \int\limits_0^2 r \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_r^{6-r^2} dr = \pi \int\limits_0^2 r \left(\left(6 - r^2\right)^2 - r^2 \right) dr =$$

$$= \pi \int_0^2 r\left(36 - 12r^2 + r^4 - r^2\right) dr = \pi \int_0^2 \left(36r - 13r^3 + r^5\right) dr =$$

$$= \pi \left(18r^2 \Big|_0^2 - 13 \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 + \frac{r^6}{6}\Big|_0^2 \right) = \pi \left(72 - \frac{13}{4} \cdot 16 + \frac{32}{3} \right) = \frac{92\pi}{3} \text{ (ед. массы). } \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти массу шара радиуса R, если плотность его в каждой точке равна удвоенному расстоянию этой точки от поверхности шара.

◀Поместим шар в систему координат $Oxyz$ так, чтобы центр шара совпадал с началом координат. Так как шар в этом случае будет симметричен по массе относительно всех координатных плоскостей, то изображаем тело только в первом октанте (рисунок 12.22).

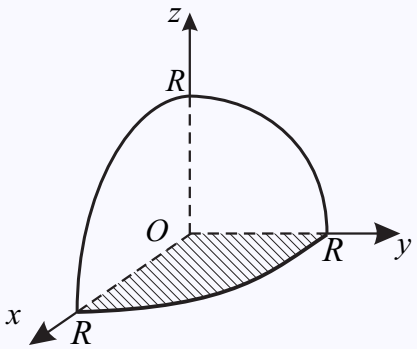


Рисунок 12.22

Находим массу шара.

$$m = 8 \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz = 8 \cdot 2 \iiint\limits_G \left(R - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz =$$

$$= 8 \cdot 2 \iiint\limits_G (R-\rho)\,\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = 16 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R \left(R\rho^2 - \rho^3\right) d\rho =$$

$$= 8\pi\,(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R \right) = \frac{2}{3}\pi R^4 \text{ (ед. массы). } \blacktriangleright$$

Аналогично, как и при выводе формул для вычисления статических моментов материальной пластинки через двойной интеграл, можно получить следующие формулы:

Статический момент материального тела Ω **относительно плоскости** xOz:

$$M_{xOz} = \iiint\limits_\Omega y\gamma(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.21}$$

Статический момент материального тела Ω **относительно плоскости** yOz:

$$M_{yOz} = \iiint\limits_\Omega x\gamma(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.22}$$

Статический момент материального тела Ω **относительно плоскости** xOy:

$$M_{xOy} = \iiint\limits_\Omega z\gamma(x,y,z)\,dxdydz. \tag{12.23}$$

Момент инерции материального тела Ω **относительно оси** Oz:

$$I_{Oz} = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz. \tag{12.24}$$

Момент инерции материального тела Ω **относительно оси** Ox:

$$I_{Ox} = \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz. \tag{12.25}$$

Момент инерции материального тела Ω **относительно оси** Oy:

$$I_{Oy} = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \gamma\left(x, y, z\right) dxdydz. \tag{12.26}$$

По аналогии с выводом формул для вычисления координат центра тяжести материальной пластинки получаем формулы для нахождения центра тяжести материального тела Ω.

Если точка (x_c, y_c, z_c) – центр тяжести материального тела Ω, то

$$x_c = \frac{M_{y0z}}{m_\Omega},\ y_c = \frac{M_{x0z}}{m_\Omega},\ z_c = \frac{M_{x0y}}{m_\Omega}, \tag{12.27}$$

где m_Ω – масса тела Ω.

Задание 5. Найти координаты центра масс однородного тела ($\gamma = 1$), ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}z\ \left(x^2 + y^2 \leqslant 2\sqrt{3}z\right).$$

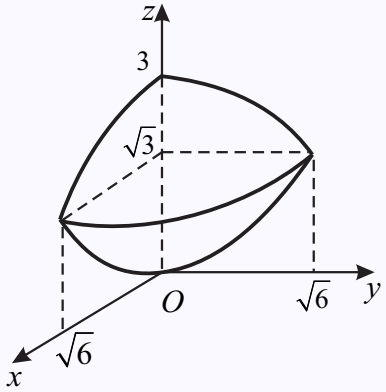


Рисунок 12.23

◀Изобразим тело на рисунке 12.23 в первом октанте (тело симметрично как по объему, так и по массе относительно плоскостей xOz и yOz). Находим аппликату точек поверхностей тела (по окружности пересечения).

$$z^2 + 2\sqrt{3}z - 9 = 0,\ \frac{D}{4} = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 9 = 12,\ z = \sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Дальше определяем радиус окружности пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 6,\ R = \sqrt{6}.$$

Из условий указанной выше симметрии первые две координаты центра тяжести тела равны нулю, то есть $x_c = y_c = 0$.

Координату z_c находим по третьей формуле (12.27). Учитываем также, что подынтегральные функции тройных интегралов в указанной формуле симметричны относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$.

При вычислении используем переход к цилиндрической системе координат.

$$m_\Omega = \iiint\limits_\Omega dxdydz = \iiint\limits_D rdrd\varphi dz = \Big[x^2+y^2+z^2=9,\ r^2=9-z^2,\ z=\sqrt{9-r^2},$$

$$x^2+y^2=2\sqrt{3}z,\ r^2=2\sqrt{3}z,\ z=\frac{r^2}{2\sqrt{3}}\Big] = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} rdr \int\limits_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{6}} rz\Big|_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dr = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{6}} r\left(\sqrt{9-r^2}-\frac{r^2}{2\sqrt{3}}\right)dr =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{6}}\right) = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}}-27\right)-\frac{36}{2\sqrt{3}\cdot 4}\right) =$$

$$= 2\pi\left(9-\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = 2\pi\left(9-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)\ \text{(ед. массы)}.$$

$$M_{xOy} = \iiint\limits_\Omega zdxdydz = \iiint\limits_D zrdrd\varphi dz = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6}} rdr \int\limits_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} zdz = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{6}} r\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{r^2}{2\sqrt{3}}}^{\sqrt{9-r^2}} dr =$$

$$= \pi\int\limits_0^{\sqrt{6}} r\left(9-r^2-\frac{r^4}{4\cdot 3}\right)dr = \pi\left(\frac{9}{2}\,r^2\Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{6}} - \frac{1}{12}\cdot\frac{r^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{6}}\right) = \pi\left(\frac{9}{2}6-9-\frac{6^3}{2\cdot 6^2}\right) = 15\pi.$$

Тогда

$$z_c = \frac{15\pi}{\pi\left(18-5\sqrt{3}\right)} = \frac{15\left(18+5\sqrt{3}\right)}{249} = \frac{5}{83}\left(18+5\sqrt{3}\right). \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $3z = x^2+y^2$.

◀Объем V данного тела вычислен в задании 4 практического занятия 12: $V = \frac{19}{6}\pi$. Так как данное тело симметрично относительно оси Oz и тело однородно, то центр тяжести его лежит на оси Oz, следовательно, $x_c = y_c = 0$. Остается найти аппликату центра тяжести тела, то есть $z_c = \frac{M_{xOy}}{m_\Omega}$. В нашем случае, считая тело однородным с плотностью равной единице (в этом случае $m_\Omega = V$), переходя к цилиндрическим координатам, найдем статический момент M_{xOy}:

$$M_{xOy} = \iiint\limits_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D zr\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int\limits_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} dr = \pi\int\limits_0^{\sqrt{3}} r\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)dr = \pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{54}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{13}{4}\pi.$$

Следовательно, $z_c = \frac{39}{38}$. Таким образом, центр тяжести данного тела находится в точке $\left(0,0,\frac{39}{38}\right)$.▶

Задание 7. Найти момент инерции однородного тела плотности γ, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=3, \quad x^2+y^2=2z, \quad z\geqslant 0,$$

относительно оси Oz. $(x^2+y^2\leqslant 2z)$.

◀Тело симметрично относительно координатных плоскостей $x=0$ и $y=0$. Изобразим на рисунке 12.24 тело в первом октанте.

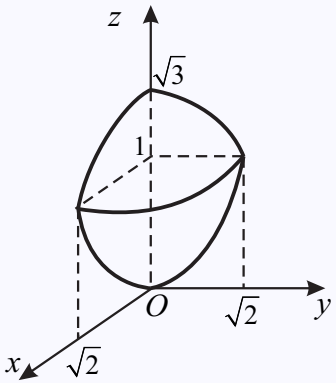


Рисунок 12.24

Найдем аппликату пересечения поверхностей

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^2+y^2=2z. \end{cases}$$

$$z^2+2z-3=0, \quad z=1.$$

Тогда $x^2+y^2=2$. Круг $x^2+y^2\leqslant 2$ есть проекция тела на плоскость $z=0$. Квадрат расстояния точек тела G до оси Oz определяется формулой $\rho^2\left((x,y,z)\in G, Oz\right)=x^2+y^2$.

Находим момент инерции I_{Oz} в цилиндрических координатах.

$$I_{Oz}=\gamma\iiint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\gamma\iiint\limits_G r^3drd\varphi dz=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=3; & r^2+z^2=3, \quad z=\sqrt{3-r^2}; \\ x^2+y^2=2z; & z=\frac{r^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$= \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} dz = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3 \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{2}\right) dr = 2\pi\gamma \left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{3-r^2} dr^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^5 dr\right) =$$

$$= \pi\gamma \left(\left[\begin{array}{l} t = r^2, \\ t_{\text{н}} = 0, \end{array} \; t_{\text{в}} = 2 \right] \int\limits_0^2 t\sqrt{3-t} dt - \frac{r^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \pi\gamma \left(\left[\begin{array}{l|c} u = \sqrt{3-t} & u_{\text{н}} = \sqrt{3} \\ u^2 = 3 - t, & u_{\text{в}} = 1 \\ t = 3 - u^2 & dt = -2udu \end{array} \right] \int\limits_{\sqrt{3}}^1 \left(3 - u^2\right) u \left(-2u\right) du - \frac{4}{3} \right) =$$

$$= \pi\gamma \left(-2 \int\limits_{\sqrt{3}}^1 \left(3u^2 - u^4\right) du - \frac{4}{3} \right) = \pi\gamma \left(-2 \left(u^3\Big|_{\sqrt{3}}^1 - \frac{u^5}{5}\Big|_{\sqrt{3}}^1 \right) - \frac{4}{3} \right) =$$

$$= \pi\gamma \left(-2 \left(\left(1 - 3\sqrt{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1 - 9\sqrt{3}\right) \right) - \frac{4}{3} \right) =$$

$$= \pi\gamma \left(-2 + 6\sqrt{3} + \frac{2}{5} - \frac{8\sqrt{3}}{5} - \frac{4}{3} \right) = \pi\gamma \frac{-30 + 90\sqrt{3} + 6 - 54\sqrt{3} - 20}{15} = \pi\gamma \frac{36\sqrt{3} - 44}{15}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \; y = 0, \; y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (x \geqslant 0, \; y \geqslant 0),$$

если плотность γ в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

◀Изобразим на рисунке 12.25 тело в первом октанте, так как оно симметрично относительно плоскости $z = 0$.

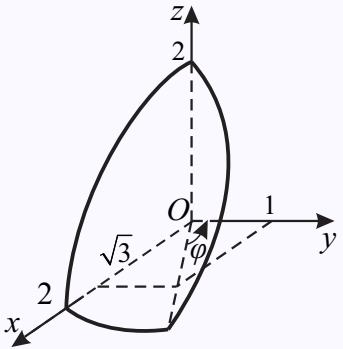


Рисунок 12.25

Уравнение $x = \sqrt{3}y$ определяет полуплоскость, проходящую через ось Oz в первом и восьмом октантах. Определим угол φ, который она образует с плоскостью $x = 0$: $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Вычисление момента инерции будем выполнять в сферических координатах. Плотность

$$\gamma(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{или} \quad \gamma(\varphi, \rho, \theta) = \frac{k}{\rho},$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Тогда

$$I_O = 2k \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{2} \rho^2 \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{2k\pi}{3} (-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{4\pi k}{3}. \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти координаты центра масс однородного тела плотностью $\gamma = 1$, ограниченного поверхностями

$$2z - z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\ \left(z^2 > \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a > 0,\ b > 0\right).$$

◀Тело симметрично относительно координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$, поэтому изображаем его только в первом октанте (рисунок 12.26).

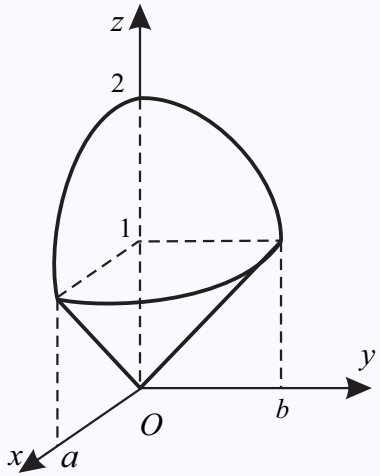


Рисунок 12.26

Вычисления будем проводить в обобщенных цилиндрических координатах

$$x = ra\cos\varphi,\ y = rb\sin\varphi,\ z = z.$$

Якобиан перехода от декартовых координат к обобщенным цилиндрическим координатам $J = abr$.

Вначале найдем статический момент тела относительно плоскости xOy

$$M_{xOy} = 4ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_r^{1+\sqrt{1-r^2}} zdz = \left[\begin{array}{c} z^2 - 2z + r^2 = 0 \\ \frac{D}{4} = 1 - r^2 \\ z = 1 + \sqrt{1-r^2} \end{array} \right] =$$

$$= 2\pi ab \int\limits_0^1 r \frac{z^2}{2}\Big|_r^{1+\sqrt{1-r^2}} dr = \pi ab \int\limits_0^1 r \left(1 + 2\sqrt{1-r^2} + 1 - r^2 - r^2\right) dr =$$

$$= \pi ab \left(r^2\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-r^2\right) - \frac{1}{2} r^4\Big|_0^1 \right) = \pi ab \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \right) = \pi ab \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}\pi ab.$$

Находим массу тела.

$$m = 4ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^r rdr \int\limits_r^{1+\sqrt{1-r^2}} dz = 2\pi ab \int\limits_0^1 r \left(1 + \sqrt{1-r^2} - r\right) dr =$$

$$= 2\pi ab \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-r^2\right) \right) = 2\pi ab \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \right) = \pi ab.$$

Тогда $z_c = \frac{M_{z=0}}{m} = \frac{\frac{7}{6}\pi ab}{\pi ab} = \frac{7}{6}$.

Абсцисса и ордината центра масс будут равны нулю ввиду симметрии тела по массе относительно оси Oz.

Точка $\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$ – центр масс тела.▶

Задание 10. Найти ньютонов потенциал в точке $(0,0,0)$, создаваемый шаром $x^2+y^2+z^2=4$ с плотностью $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

◀Изобразим на рисунке 12.27 шар только в первом октанте, так как он симметричен относительно всех координатных плоскостей.

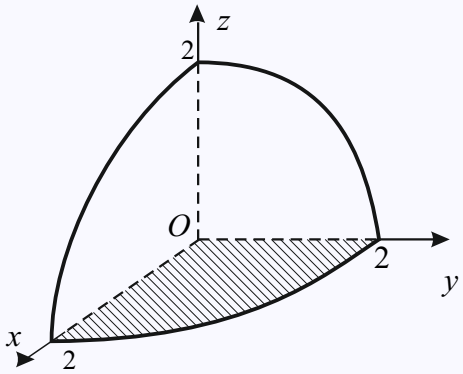


Рисунок 12.27

Ньютоновым потенциалом в точке $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ называется интеграл

$$U(x_0,y_0,z_0)=k\iiint\limits_G\frac{\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

где $k=\text{const}$, γ – плотность. Если γ – плотность масс, то ньютонов потенциал есть потенциал гравитационного поля материального тела. В нашем случае вычисляем в сферических координатах.

$$U(0,0,0)=8k\iiint\limits_G\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=8k\iiint\limits_D\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=8k\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^2\rho^2d\varphi=\frac{32k\pi}{3}.\ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Из октанта шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ вырезано тело, ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a \leqslant c,\ b \leqslant c)$. Найти массу этого тела, если плотность его в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

2. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна аппликате этой точки.

3. Определить массу тела, ограниченного поверхностями $z=h$ и $x^2+y^2-z^2=0$, если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

4. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиуса R, высоты H, если его плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

5. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x^2+y^2+z^2=4a^2$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

6. Найти массу тела плотностью γ, ограниченного поверхностями:

   6.1 $z=x^2+y^2,\ z^2+x^2+y^2=6,\ z \geqslant 0$, если $\gamma=z$;

   6.2 $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9},\ z=3$, если $\gamma=x^2$;

   6.3 $z=x^2+y^2,\ z=2y$, если $\gamma=y$;

   6.4 $x+y+z=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ \gamma=x+y+z$;

   6.5 $x=y^2,\ x=4,\ z=2,\ z=5$, если $\gamma=|y|$;

   6.6 $z=6-x^2-y^2,\ z^2=x^2+y^2,\ z \geqslant 0$, если $\gamma=z$;

   6.7 $2x+z=2a,\ x+z=a,\ y^2=ax,\ y=0\ (y \geqslant 0)$, если $\gamma=y$.

7. Найти массу прямого кругового цилиндра, высота которого равна H, а радиус R, если плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

8. Найти статический момент относительно плоскости xOy однородного тела плотностью γ, ограниченного поверхностями.

9. Найти момент инерции относительно заданной оси однородного тела плотностью γ, ограниченного заданными поверхностями:

   9.1 $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$ относительно осей координат;

   9.2 $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $z + x = 4$ относительно осей координат;

   9.3 $x^2 + y^2 - ax = 0$, $z^2 = 2ax$, $z = 0$ $(z > 0)$ относительно осей координат;

   9.4 $z = \frac{1}{2}(y^2 + x^2)$, $z = 1$ относительно оси Ox;

   9.5 $x + y + z = 2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ $(z > 0)$ относительно оси Oz;

   9.6 $x^2 + y^2 = cz$, $z = c$ относительно оси Oz;

   9.7 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2z$, $z \geqslant 0$ относительно оси Oz;

   9.8 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ относительно оси Oz.

10. Найти момент инерции относительно заданных плоскостей однородного тела плотностью γ, ограниченного заданными поверхностями:

    10.1 $x^2 + y^2 = k^2 z^2$, $z = h$ относительно xOz и xOy;

    10.2 $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$ относительно xOz и xOy;

    10.3 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ относительно yOz;

    10.4 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$, $x > 0$, $y > 0$ относительно xOy.

11. Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса плотностью γ, радиус основания которого равен R, а высота равна H, относительно его оси.

12. Найти момент инерции однородного шара массой M и радиусом R относительно точки на его сфере.

13. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного заданными поверхностями:

    13.1 $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$;

    13.2 $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$;

    13.3 $x + y = 1$, $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

    13.4 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$;

    13.5 $x^2 + y^2 = 3z^2$, $z = H$;

    13.6 $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$ $(z > 0)$;

    13.7 $x + y + z = 2a$, $x = a$, $y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

    13.8 $x + y = z$, $x^2 + y^2 = 2z$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 2x$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

14. Ответьте на вопросы теста.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3 Вариант 4

Итоговый тест по разделу «Двойные и тройные интегралы»

Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 13
Криволинейные интегралы первого рода

На этой лекции мы перенесем понятие одномерного определенного интеграла Римана, взятого по прямолинейному отрезку, на случай, когда областью интегрирования является некоторая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$ или в пространстве $\mathbb{R}^3$.

В [2, лекция 15] рассматривались понятия спрямляемой кривой и ее длины. Приведем здесь некоторые сведения, рассмотренные на указанной лекции.

Пусть $\varphi,\ \psi \in C[\alpha,\beta]$. Образ Γ отрезка $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ при взаимно однозначном отображении

$$\chi : t \to (\varphi(t), \psi(t)),\ t \in [\alpha,\beta], \tag{13.1}$$

называют плоской **кривой** или плоской **жордановой кривой**, а пару функций (φ,ψ) – **параметризацией этой кривой**.

Точки $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$, $(\varphi(\beta),\psi(\beta))$ называются **концами** кривой Γ.

Если функции $\varphi,\ \psi \in C^1[\alpha,\beta]$, то кривую Γ называют **гладкой кривой**. Если же функции $\varphi,\ \psi$ – кусочно-гладкие на отрезке $[\alpha,\beta]$, то кривую Γ называют **кусочно-гладкой кривой**.

Замечание 13.1. Очевидно, что параметризация кривой не определяется однозначно. Например, две параметризации $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)$, $x \in [-1,1]$, и $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$, задают в $\mathbb{R}^2$ одну и ту же кривую – полуокружность $x^2+y^2=1$, $y \geqslant 0$.

Вообще говоря, если $\omega : [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha,\beta]$ – любая непрерывная строго монотонная функция, то пара сложных функций (композиций функций) $(\varphi\circ\omega, \psi\circ\omega)$ также является параметризацией кривой Γ.

Зададим произвольное разбиение $\tau :\ \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha,\beta]$ на n частичных отрезков $[t_{k-1},t_k]$ $(k=\overline{1,n})$.

Положим

$$l(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2}.$$

Геометрический смысл $l(\tau)$ – длина ломаной, вписанной в кривую в точках $(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ $(k = \overline{0,n})$.
Длиной кривой Γ называется

$$l_\Gamma = \sup_\tau \{l(\tau)\}.$$

Если $l_\Gamma < \infty$, то кривую Γ называют **спрямляемой**.
Напомним, что гладкая кривая Γ будет спрямляемой, и ее длина вычисляется по формуле

$$l_\Gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{13.2}$$

Для произвольного разбиения $\tau:\ \alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ образ Γ_k отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1,n})$ при отображении (13.1) будем называть **частичной кривой**. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ длину частичной кривой Γ_k будем обозначать l_{Γ_k}.

Определение 13.1. *Совокупность τ частичных кривых Γ_k $(k = \overline{1,n})$ называют* ***разбиением кривой*** Γ.

Для спрямляемой кривой Γ обозначим $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \{l_{\Gamma_k}\}$. λ_τ будем называть **мелкостью разбиения** τ кривой Γ.

Замечание 13.2. Аналогичные рассмотренным выше понятия можно ввести для кривой в пространстве $\mathbb{R}^3$ – образа Γ отрезка $[\alpha, \beta]$ при взаимно однозначном отображении

$$\chi : t \to (\varphi(t), \psi(t), \omega(t)),\ \varphi, \psi, \omega \in C[\alpha, \beta].$$

Напомним также некоторые важные свойства спрямляемых кривых:
1. Длина спрямляемой кривой не зависит от параметризации этой кривой.
2. Если Γ – спрямляемая кривая, то каждая из частичных кривых Γ_k $(k = \overline{1,n})$ будет спрямляемой и

$$l_\Gamma = \sum_{k=1}^n l_{\Gamma_k}.$$

13.1 Задача о массе материальной кривой

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – спрямляемая кривая, функция $\gamma : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на Γ.

Будем считать, что по кривой Γ распределена масса с плотностью $\gamma(x, y, z)$. В таком случае кривую будем называть **материальной кривой**. Необходимо дать понятие массы кривой Γ и указать способ ее вычисления.

◀Рассмотрим любое разбиение τ кривой Γ на частичные кривые Γ_k $(k = \overline{1,n})$.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k$ и считаем, что в любой точке $(x, y) \in \Gamma_k$ плотность равна $\gamma(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$. Тогда масса частичной кривой Γ_k будет $\Delta m_k \approx \gamma(\overline{x}_k, \overline{y}_k) l_{\Gamma_k}$, а вся масса кривой Γ будет приближенно равна

$$\sigma_\tau \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(\overline{x}_k, \overline{y}_k) l_{\Gamma_k}. \tag{13.3}$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$ и этот предел не зависит от способа разбиения τ материальной кривой Γ на частичные кривые Γ_k, а также от выбора точек $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k$, то он называется **массой материальной кривой** Γ. ▶

13.2 Понятие криволинейного интеграла первого рода

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – спрямляемая кривая, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$.

Рассмотрим любое разбиение τ кривой Γ на частичные кривые Γ_k $(k = \overline{1,n})$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k$ и составляем сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k) l_{\Gamma_k}. \tag{13.4}$$

Сумму σ_τ называют **интегральной суммой** функции f по кривой Γ, соответствующей разбиению τ.

Определение 13.2. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральной суммы σ_τ функции f по кривой Γ, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \tau \;\; \lambda_\tau < \delta \;\; \forall (\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k \;\; |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Указанный предел будем обозначать $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$.

Определение 13.3. *Если для функции $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$, то его называют* ***криволинейным интегралом первого рода*** *функции f по кривой Γ и обозначают $\int\limits_\Gamma f(x,y)\,dl$, а функцию f называют* ***интегрируемой*** *по кривой Γ.*

Функция f называется **подынтегральной функцией**, выражение $f(x,y)\,dl$ – **подынтегральным выражением**.

Можно показать (покажите самостоятельно), что необходимым условием существования криволинейного интеграла первого рода является ограниченность функции f на спрямляемой кривой Γ.

Замечание 13.3. Важным свойством криволинейного интеграла по кривой Γ является его независимость от параметризации кривой Γ (следует из определения криволинейного интеграла и независимости длины кривой от ее параметризации).

13.3 Существование и вычисление криволинейного интеграла первого рода

Теорема 13.1. *Пусть функция $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ непрерывна на гладкой кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \; \alpha < \beta, \tag{13.5}$$

и для любых $t \in [\alpha, \beta]$

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0. \tag{13.6}$$

Тогда функция f будет интегрируемой по кривой Γ и справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \tag{13.7}$$

◀Так как кривая Γ гладкая, то она спрямляемая, и ее длина l_Γ находится по формуле (13.2). Для любого $t \in [\alpha,\beta]$ существует

$$l(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}du. \tag{13.8}$$

Значит, на отрезке $[\alpha,\beta]$ задана функция $l = l(t)$.

Так как кривая Γ гладкая, то $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)} \in C[\alpha,\beta]$. А тогда [1, теорема 10.2] для любого $t \in [\alpha,\beta]$ существует $l'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$, причем согласно (13.6) для любого $t \in [\alpha,\beta]$ $l'(t) > 0$. Значит, функция $l = l(t)$ строго возрастает на $[\alpha,\beta]$. Поэтому существует единственная обратная ей функция $t = t(l)$, которая также строго возрастает на отрезке $[0, l_\Gamma]$, причем для любого $l \in [0, l_\Gamma]$ существует

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} > 0.$$

Таким образом, $t = t(l)$ – непрерывная и строго монотонная функция, которая отрезок $[0, l_\Gamma]$ взаимно однозначно отображает на отрезок $[\alpha,\beta]$. Согласно замечанию 13.1, пара сложных функций

$$\begin{cases} x = \varphi(t(l)) = x(l), \\ y = \psi(t(l)) = y(l), \end{cases} \quad l \in [0, l_\Gamma], \tag{13.9}$$

также является параметризацией кривой Γ (в роли параметра выступает l – переменная длина (13.8)). Отметим, что функции (13.9) непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[0, l_\Gamma]$.

Теперь рассмотрим любое разбиение $\tau_{[0,l_\Gamma]}: \ 0 = l_0 < \ldots < l_n = l_\Gamma$ отрезка $[0, l_\Gamma]$ на n частичных отрезков $[l_{k-1}, l_k]$ $(k = \overline{1,n})$. Разбиение $\tau_{[0,l_\Gamma]}$ определяет разбиение τ кривой Γ на n частичных кривых Γ_k. Произвольно выбранной точке $\bar{l}_k \in [l_{k-1}, l_k]$ отображение (13.9) ставит в соответствие точку $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) = \big(x(\bar{l}_k), y(\bar{l}_k)\big) \in \Gamma_k$. Длина частичной кривой $l_{\Gamma_k} = \Delta l_k = l_k - l_{k-1}$ $(k = \overline{1,n})$.

Составляем интегральную сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) l_{\Gamma_k} = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\bar{l}_k), y(\bar{l}_k)\right) \Delta l_k. \tag{13.10}$$

Правая часть последнего равенства есть интегральная сумма Римана функции одной переменной $F(l) = f(x(l), y(l))$, $l \in [0, l_\Gamma]$, причем в силу непрерывности функции f на кривой Γ и непрерывности функций $x = x(l)$ и $y = y(l)$ на отрезке $[0, l_\Gamma]$ функция $F(l) \in C[0, l_\Gamma]$. Значит, функция $F(l)$ будет интегрируемой по отрезку $[0, l_\Gamma]$, а поэтому существует

$$\lim_{\lambda_{\tau_{[0,l_\Gamma]}} \to 0} \sigma_\tau = \int_0^{l_\Gamma} f(x(l), y(l)) dl.$$

Покажем, что если мелкость разбиения отрезка $[0, l_\Gamma]$ $\lambda_{\tau_{[0,l_\Gamma]}} \to 0$, то и мелкость разбиения кривой Γ $\lambda_\tau \to 0$.

$$\Delta l_k = l_k - l_{k-1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t) + \psi'(t)} dt; \ \min_{[\alpha,\beta]} \left\{ \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \right\} = m > 0.$$

Так как $\Delta l_k \geqslant m \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k$, то $0 \leqslant \Delta t_k \leqslant \frac{\Delta l_k}{m} \to 0$. Из последнего неравенства следует, что если $\lambda_{\tau_{[0,l_\Gamma]}} \to 0$, то и $\lambda_\tau \to 0$.

С учетом этого и с учетом равенства (13.10) получаем существование предела

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(\bar{l}_k), y(\bar{l}_k)\right) l_{\Gamma_k} = \int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{0}^{l_\Gamma} f(x(l), y(l))dl. \tag{13.11}$$

В последнем интеграле выполним замену переменной $l = l(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Заметив, что

$$dl = dl(t) = d\left(\int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(u) + \psi'^2(u)}du\right) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

получим формулу (13.7).▶

Замечание 13.4. Если кривая Γ есть график функции $y = y(x)$, непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, то, параметризуя кривую, используя в качестве параметра переменную x, получим:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x). \end{cases}$$

Тогда формула (13.7) будет иметь вид

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{13.12}$$

Если кривая Γ задана в полярной системе координат как график непрерывно-дифференцируемой функции $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то, используя параметризацию кривой

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

получим формулу (13.7) в виде

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (13.13)$$

Замечание 13.5. Из формулы (13.11) следует, что если функция непрерывна на спрямляемой кривой, то она интегрируема по этой кривой.

Кроме того, заключение теоремы 13.1 и формула (13.11) не изменятся, если кривая Γ будет кусочно-гладкой, а функция f – кусочно-непрерывной на этой кривой.

Пример 13.1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} y^2 dl,$$

где Γ – дуга одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

◀Криволинейный интеграл вычисляем, заменив его определенным, по формуле (13.11).

$$\int\limits_{\Gamma} y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt = -16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right) = -16a^3\left(\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5}\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{256}{15}a^3. \blacktriangleright$$

Замечание 13.6. Аналогично случаю кривой на плоскости вводится криволинейный интеграл первого рода по кривой в пространстве. Также справедлива теорема, аналогичная теореме 13.1.

Теорема 13.2. *Пусть функция* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *непрерывна на гладкой кривой* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, *заданной параметрически:*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \ \alpha < \beta, \\ z = \omega(t), \end{cases} \tag{13.14}$$

и для любых $t \in [\alpha, \beta]$

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t) > 0. \tag{13.15}$$

Тогда функция f *будет интегрируемой по кривой* Γ *и справедлива формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}dt. \tag{13.16}$$

13.4 Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

Свойства криволинейного интеграла первого рода во многом аналогичны свойствам определенного интеграла. Их обоснование следует из формулы (13.7). В связи с этим перечислим эти свойства.

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – спрямляемая кривая.

Теорема 13.3 (свойство линейности). *Если функции* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *и* $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ *интегрируемы по кривой* Γ, *а* α *и* β – *любые фиксированные действительные числа, то функция* $\alpha f + \beta g$ *также интегрируема по кривой* Γ *и справедлива формула*

$$\int\limits_{\Gamma} (\alpha f + \beta g)dl = \alpha \int\limits_{\Gamma} f dl + \beta \int\limits_{\Gamma} g dl. \tag{13.17}$$

Теорема 13.4 (свойство аддитивности). *Если функция $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ интегрируема по кривой Γ, то f будет интегрируемой по любой частичной кривой Γ_k и*

$$\int\limits_{\Gamma} f dl = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f dl. \tag{13.18}$$

Если же функция f интегрируема по каждой частичной кривой Γ_k, то она будет интегрируемой и по кривой Γ, и также будет справедливо равенство (13.18).

Теорема 13.5 (свойство монотонности). *Если функция $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ интегрируема по Γ и для любых $(x, y) \in \Gamma$ $f(x, y) \geqslant 0$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f dl \geqslant 0. \tag{13.19}$$

Следствие 13.1. *Если функции $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ и $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ интегрируемы по кривой Γ и для любых $(x, y) \in \Gamma$ $f(x, y) \geqslant g(x, y)$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f dl \geqslant \int\limits_{\Gamma} g dl. \tag{13.20}$$

Теорема 13.6 (оценка по модулю). *Если функция $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ интегрируема по кривой Γ, то функция $|f|$ будет интегрируемой по кривой Γ и справедлива оценка*

$$\left| \int\limits_{\Gamma} f dl \right| \leqslant \int\limits_{\Gamma} |f| \, dl. \tag{13.21}$$

Теорема 13.7 (теорема о среднем). *Если функция* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *интегрируема по кривой* Γ *и*

$$m = \inf_{(x,y)\in\Gamma} \{f(x,y)\}, \ M = \sup_{(x,y)\in\Gamma} \{f(x,y)\},$$

то

$$m \cdot l_\Gamma \leqslant \int\limits_\Gamma f dl \leqslant M \cdot l_\Gamma,$$

где l_Γ *– длина кривой* Γ*, и существует* $\mu \in [m, M]$*, что*

$$\int\limits_\Gamma f dl = \mu \cdot l_\Gamma. \tag{13.22}$$

Следствие 13.2. *Если функция* $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ *непрерывна на кривой* Γ*, то существует такая точка* $(x_0, y_0) \in \Gamma$*, что*

$$\int\limits_\Gamma f dl = f(x_0, y_0) \cdot l_\Gamma. \tag{13.23}$$

13.5 Криволинейный интеграл первого рода по контуру

Определение 13.4. ***Контуром (замкнутой жордановой кривой)*** *на* $\mathbb{R}^2$ *называют образ отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ *при отображении* $\chi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, *которое обладает следующими свойствами:*

1) $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$;

2) *сужение* $\chi\Big|_{[\alpha,\beta)}$ – *биекция.*

Длина контура и криволинейный интеграл первого рода по контуру определяются точно так же, как и для кривой.

Криволинейный интеграл первого рода функции f по контуру $K \subset \mathbb{R}^2$ иногда обозначают так:

$$\oint\limits_K f(x, y)dl.$$

Пример 13.2. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\oint\limits_K \sqrt{x^2 + y^2}dl$ по окружности

$$x^2 + y^2 = ax, \ a > 0.$$

◀Изобразим на рисунке контур K (рисунок 13.1), предварительно преобразовав уравнение окружности к каноническому виду:

$$x^2 + y^2 - ax = x^2 - 2x\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{a^2}{4};$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

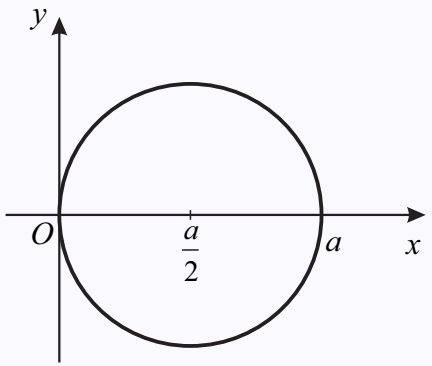


Рисунок 13.1

Перейдем к полярной системе координат. Уравнение окружности будет иметь вид: $r = a\cos\varphi$, подынтегральная функция: $r(\varphi) = r$. Воспользуемся формулой (13.7).

$$\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = a.$$

$$\int\limits_K f(x,y)dl = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi \cdot a d\varphi = a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
2. Сформулируйте теорему о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода.
3. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла первого рода.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 14

Криволинейные интегралы первого рода и их приложения

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{y} dl,$$

где Γ – дуга параболы $y^2 = 2x$, лежащая между точками $\left(1, \sqrt{2}\right)$ и $(2, 2)$.

◀Воспользуемся формулой (13.7), где $y(x) = \sqrt{2x}$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{2x}}.$$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{y} dl = \int\limits_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{2x}} \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{6} \left(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right). ▶$$

Задание 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} |y| \, dl,$$

где Γ – лемниската $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 - y^2\right)$, $a > 0$.

◀Перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим уравнение лемнискаты в полярной системе координат: $r^4 = r^2 a^2 \cos 2\varphi$, $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Изобразим кривую на рисунке 13.2.

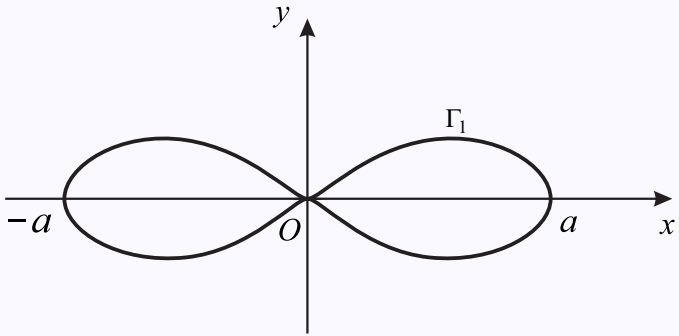


Рисунок 13.2

$$\cos 2\varphi \geqslant 0,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ввиду симметрии относительно координатных осей:

$$\int\limits_{\Gamma} |y|\,dl = 4\int\limits_{\Gamma_1} y dl$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} y dl = \left[\begin{array}{c} r = a\sqrt{\cos 2\varphi},\ x = r\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, \\ x' = a\left(\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\,(-\sin\varphi)\right) = -a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}; \end{array}\right.$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi,\ y' = a\left(\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right) = a\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$dl = \sqrt{x'^2+y'^2}d\varphi = \sqrt{a^2\frac{\sin^2 3\varphi}{\cos 2\varphi} + a^2\frac{\cos^2 3\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi\Bigg] = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} (x+y)\,dl,$$

где Γ – пространственная кривая $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y=x, \end{cases}$ расположенная в первом октанте.

◀Изобразим кривую на рисунке 13.3.

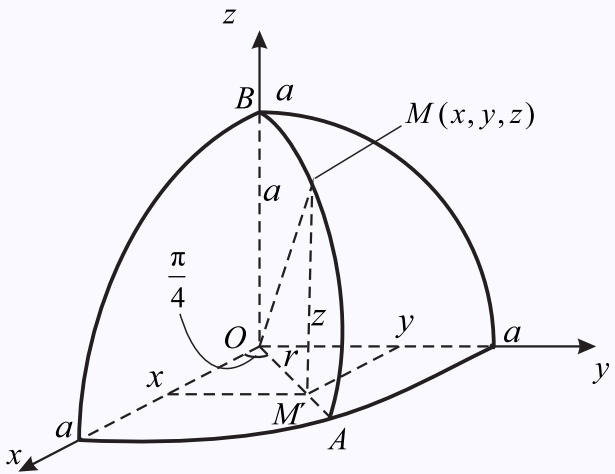


Рисунок 13.3

Кривая Γ есть дуга AMB окружности. Параметризуем кривую, выбрав в качестве параметра r переменную длину отрезка, соединяющего в плоскости xOy точку $(0,0)$ и любую точку (x,y) отрезка OM (рисунок 13.3).

Имеем:

$$x = r\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}r;\ \ y = r\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}r;\ \ z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \ y' = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ \ z' = \frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}};$$

$$dl = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right)^2}\,dr = \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2 - r^2}}\,dr = \frac{a\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}};$$

$$x + y = \sqrt{2}r.$$

$$\int\limits_\Gamma (x+y)\,dS = \sqrt{2}\int\limits_0^a r\frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}dr = -\frac{\sqrt{2}a}{2}\int\limits_0^a \left(a^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(a^2 - r^2\right) = -\frac{\sqrt{2}a}{2}\,\frac{\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^a = \sqrt{2}a^2. \blacktriangleright$$

Из задачи о массе материальной кривой следует, что если $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – спрямляемая кривая, по которой распределена масса с плотностью $\gamma(x, y, z)$, причем функция $\gamma : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на Γ, то **масса материальной кривой** находится по формуле

$$m_\Gamma = \int\limits_\Gamma \gamma(x, y, z)dl. \tag{13.24}$$

Если в формуле (13.24) $\gamma(x, y, z) = 1$, то с геометрической точки зрения

$$l_\Gamma = \int\limits_\Gamma dl \tag{13.25}$$

есть **длина спрямляемой кривой** Γ.

Задание 4. Найти с помощью криволинейного интеграла длину астроиды

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$$

◀Воспользуемся формулой (13.25), где $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$.

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t,\quad y'_t = -3a\sin^2 t\cos t,$$

$$dl = \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = \frac{3a}{2}\sin 2tdt.$$

Поскольку кривая симметрична относительно осей координат, то

$$l_\Gamma = \int\limits_\Gamma dl = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a}{2}\sin 2tdt = 6a\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.\ (\text{ед. длины}).\ \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти массу материальной пространственной кривой Γ, заданной соотношениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax,\ a > 0,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0.$$

Плотность кривой $\gamma = z$.

◀Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

исключим z, получим $x^2 + y^2 = ax$. Значит, проекция кривой Γ на плоскость $z = 0$ будет окружность

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}. \qquad (13.26)$$

Уравнение окружности (13.26) можно записать параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \\ y = \frac{a}{2}\sin t, \end{cases} \tag{13.27}$$

где $t \in [-\pi, \pi]$.

Из уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ при $z \geqslant 0$ находим $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}(1 + 2\cos t + 1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos t)} = \sqrt{\frac{a^2}{2} 2\cos^2\frac{t}{2}} = a\cos\frac{t}{2}.$$

Тогда масса кривой Γ будет

$$m_\Gamma = \int\limits_\Gamma \gamma dl = \int\limits_\Gamma z dl =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} a\cos\frac{t}{2}\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2 + \left(-\frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}\right)^2} dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a\cos\frac{t}{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \left[d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}dt\right] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} a^2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = \left[u = \sin\frac{t}{2}\middle|\begin{array}{c} u_н = -1 \\ u_в = 1 \end{array}\right] =$$

$$= a^2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}du = 2a^2\int\limits_0^1\sqrt{1+u^2}du = a^2\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \text{ (ед. масс). } \blacktriangleright$$

Напомним, что статическим моментом M_l материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на расстояние d указанной точки до оси l.

Для нахождения формул для статических моментов материальной кривой относительно координатных осей применим метод, аналогичный методу определенного интеграла ([2], лекция 15).

Зная, что элемент массы кривой Γ есть $\gamma(x,y)dl$, где $\gamma(x,y)$ – плотность кривой Γ, а dl – элемент длины этой кривой. Тогда элементы искомых статистических моментов будут: $y\gamma(x,y)dl$ – относительно оси Ox и $x\gamma(x,y)dl$ – относительно оси Oy. А **статические моменты материальной кривой** относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_{Ox} = \int\limits_{\Gamma} y\gamma(x,y)dl, \tag{13.28}$$

$$M_{Oy} = \int\limits_{\Gamma} x\gamma(x,y)dl. \tag{13.29}$$

Задание 6. Найти статистический момент однородной дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ плотности γ, расположенной в первом квадрате, относительно оси Ox $(a > b)$.

◀Воспользуемся формулой (13.28). Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$M_{Ox} = b\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = -b\gamma \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}d(\cos t) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \cos t, \\ u_{\text{н}} = 1, \\ u_{\text{в}} = 0 \end{array} \right] = b\gamma \int\limits_0^1 \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)u^2}du = b\gamma \int\limits_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}du =$$

$$= \left[\int \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}du = \left[\begin{array}{ll} h = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}, & dh = \frac{-(a^2-b^2)udu}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)u^2}} \\ dv = du, & v = u \end{array} \right] = \right.$$

$$= u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} - \int \frac{-(a^2 - b^2)u^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}}du =$$

$$\left. = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}u}{a} \right) \right] =$$

$$= \frac{b\gamma}{2}\left(u\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}\Big|_0^1 + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}u\Big|_0^1 \right) = \gamma\left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right). \blacktriangleright$$

Напомним, что **центром тяжести (центром масс) материальной кривой** $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ называют такую точку $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$, что если в этой точке сосредоточить всю массу кривой Γ, то статистические моменты точки (x_c, y_c) относительно координатных осей будут равны, соответственно, статистическим моментам самой кривой Γ относительно этих осей:

$$\begin{array}{l} M_{Ox} = m_\Gamma \cdot y_c, \\ M_{Oy} = m_\Gamma \cdot x_c, \end{array} \tag{13.30}$$

то есть

$$\begin{array}{l} x_c = \frac{M_{Oy}}{m_\Gamma}, \\ y_c = \frac{M_{Ox}}{m_\Gamma}. \end{array} \tag{13.31}$$

Задание 7. Найти координаты центра масс, распределенных по плоской кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $y \geqslant 0$ с плотностью $\gamma = 1$.

◀Кривая есть астроида, которую зададим параметрически в виде $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \pi]$ (рисунок 13.4).

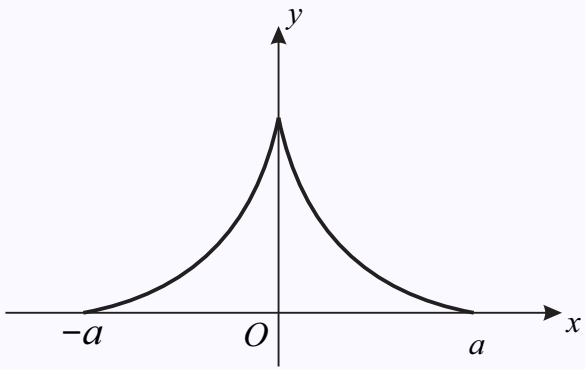


Рисунок 13.4

В силу симметрии кривой относительно оси Oy $x_c = 0$. Ординату центра тяжести кривой Γ находим по формуле

$$y_c = \frac{\int\limits_\Gamma y dl}{\int\limits_\Gamma dl}. \tag{13.32}$$

Находим

$$\sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{(3a\cos^2 t \cdot (-\sin t))^2 + (3a\sin^2 t \cdot \cos t)^2} = 3a\sin t \cdot |\cos t|\,.$$

Тогда

$$y_c = \frac{\int\limits_0^{\pi} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot |\cos t|\, dt}{\int\limits_0^{\pi} 3a\sin t \cdot |\cos t|\, dt} = \frac{a\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 t d(\sin t)\right)}{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t d(\sin t)} = \frac{a\left(\frac{\sin^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^5 t}{5}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)}{\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}} = \frac{2}{5}a. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти координаты центра масс, распределенных по пространственной кривой (винтовой линии)

$$\Gamma:\ x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = \varphi\ \ (R > 0),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Плотность $\gamma = 1$.

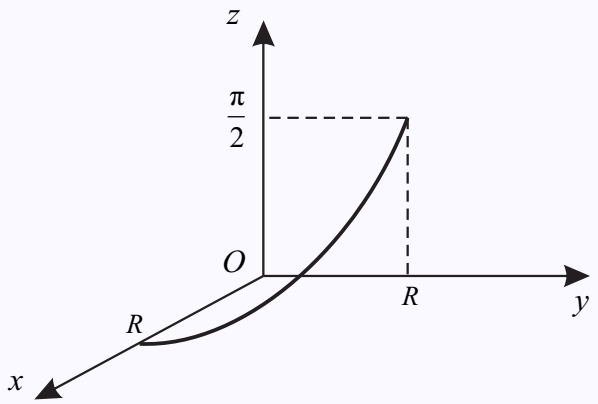


Рисунок 13.5

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄
►
◄◄
►►
410
Приложение
Закрыть

◀Найдем массу кривой:

$$m_\Gamma = \int\limits_\Gamma \gamma dl = \int\limits_\Gamma dl = \Big[dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}d\varphi =$$

$$= \sqrt{R^2\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi + 1^2}d\varphi = \sqrt{R^2+1}d\varphi\Big] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2+1}d\varphi = \frac{\pi\sqrt{R^2+1}}{2}.$$

Находим статические моменты относительно координатных плоскостей.

$$M_{xOy} = \int\limits_\Gamma z dl = \sqrt{R^2+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi = \sqrt{R^2+1}\,\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{R^2+1}}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2\sqrt{R^2+1}}{8};$$

$$M_{yOz} = \int\limits_\Gamma x dl = R\sqrt{R^2+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = R\sqrt{R^2+1}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R\sqrt{R^2+1};$$

$$M_{xOz} = \int\limits_\Gamma y dl = R\sqrt{R^2+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = -R\sqrt{R^2+1}\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R\sqrt{R^2+1}.$$

Теперь находим координаты центра масс:

$$x_c = \frac{M_{yOz}}{m_\Gamma} = \frac{R\sqrt{R^2+1}}{\frac{\pi\sqrt{R^2+1}}{2}} = \frac{2R}{\pi};\ y_c = \frac{M_{xOz}}{m_\Gamma} = \frac{R\sqrt{R^2+1}}{\frac{\pi\sqrt{R^2+1}}{2}} = \frac{2R}{\pi};\ z_c = \frac{M_{xOy}}{m_\Gamma} = \frac{\frac{\pi^2\sqrt{R^2+1}}{8}}{\frac{\pi\sqrt{R^2+1}}{2}} = \frac{\pi}{4}.\ ▶$$

Напомним, что моментом инерции I_l материальной точки массы m относительно оси l называют произведение массы m на квадрат расстояния указанной точки до оси l.

Снова применим аналог метода определенного интеграла. Элемент момента инерции материальной кривой Γ относительно оси Ox: $dI_{Ox} = y^2\gamma(x,y)dl$, а относительно оси Oy: $dI_{Oy} = x^2\gamma(x,y)dl$. Тогда **моменты инерции материальной кривой** относительно координатных осей находятся по формулам

$$I_{Ox} = \int\limits_{\Gamma} y^2\gamma(x,y)dl, \tag{13.33}$$

$$I_{Oy} = \int\limits_{\Gamma} x^2\gamma(x,y)dl. \tag{13.34}$$

Задание 9. Найти момент инерции I_{Ox} одной арки циклоиды $x = a(t+\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $a > 0$, $|t| \leqslant \pi$, $\gamma = 1$.

$$\blacktriangleleft\ I_{Ox} = \int\limits_{\Gamma} y^2 dl$$

$$dl = \sqrt{(a(1+\cos t))^2 + (a\sin t)^2}dt = a\sqrt{1+2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt =$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos t)}dt = a\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{t}{2}}dt = 2a\cos\frac{t}{2}dt.$$

$$I_{Ox} = 2a^3\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^2\cos\frac{t}{2}dt = 2a^3\int\limits_0^{\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)\cos\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a^3\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}\cos\frac{t}{2} - 2\cos t\cdot\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\cdot\cos\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 2a^3 \left(3 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{t}{2} + \cos \frac{3}{2} t \right) dt + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{3}{2} t + \cos \frac{5}{2} t \right) dt \right) =$$

$$= 2a^3 \left(3 - 2 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \sin \frac{5}{2} t \Big|_0^{\pi} \right) = 2a^3 \left(3 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right) = \frac{16}{5} a^3. \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти момент инерции относительно оси ординат окружности

$$x^2 + y^2 = 2Rx, \ R > 0.$$

Плотность $\gamma = 1$.

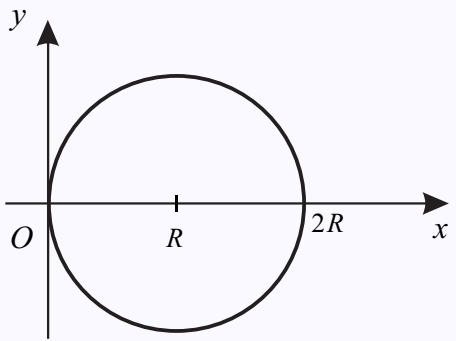


Рисунок 13.6

◀Момент инерции I_{Oy} относительно оси ординат вычисляем по формуле

$$I_{Oy} = \oint_K \gamma x^2 dl.$$

Переходим к полярной системе координат. Уравнение заданного контура K (окружности) в полярной системе координат имеет вид

$$r = 2R\cos\varphi.$$

Тогда $x = 2R\cos^2\varphi$, $y = R\sin 2\varphi$, $x^2 = 4R^2\cos^4\varphi$.

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}d\varphi = \sqrt{(4R\cos\varphi\,(-\sin\varphi))^2 + (2R\cos 2\varphi)^2}d\varphi = 2Rd\varphi.$$

$$I_{Oy} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4R^2\cos^4\varphi \cdot 2Rd\varphi = 16R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= 4R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = 4R^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3R^3\pi. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить криволинейные интегралы первого рода:

1.1 $\int\limits_{\Gamma} \frac{dl}{x+y}$, где Γ – отрезок прямой $y = x + 2$, соединяющий точки $(2, 4)$ и $(1, 3)$;

1.2 $\int\limits_{\Gamma} \frac{dl}{x-y}$, где Γ – отрезок прямой $y = \frac{x}{2} - 2$, соединяющий точки $(0, -2)$ и $(4, 0)$;

1.3 $\int\limits_{\Gamma} ydl$, где Γ – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, \sqrt{2})$;

1.4 $\int\limits_{\Gamma} x^2 dl$, где Γ – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$;

1.5 $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где Γ – кривая, заданная параметрически уравнениями

$$x = a(\cos t + \sin t),\ y = a(\sin t - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi);$$

1.6 $\int\limits_{\Gamma} xydl$, где Γ – прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$;

1.7 $\int\limits_{\Gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где Γ – отрезок прямой $y = \frac{x}{2} - 2$, соединяющий точки $(0, -2)$ и $(4, 0)$;

1.8 $\int\limits_{\Gamma} xdl$, где Γ – отрезок прямой, соединяющий точки $(0, 0)$ и $(1, 2)$;

1.9 $\int\limits_{K} (x + y)dl$, где заданный контур K – правый лепесток лемнискаты

$$\gamma^2 = a^2 \cos 2\varphi;$$

1.10 $\int\limits_{K} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где K – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

2. Вычислить с помощью криволинейного интеграла длины заданных кривых:

2.1 $ay^2 = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 5a$;

2.2 $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$;

2.3 $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$;

2.4 $x = \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{2}\ln y$ $(0 \leqslant y \leqslant e)$;

2.5 $y = 1 - \ln\cos x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Найти массу дуги эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, если плотность ее в точке (x, y) равна $\gamma(x, y) = |y|$.

4. Найти массу дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $(2, 2)$, если плотность $\gamma(x, y) = \frac{y}{x}$.

5. Вычислить массу кривой $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$ на участке от $t = 0$ до $t = 1$, если плотность ее $\gamma(x, y) = \frac{y}{e^x}$.

6. Вычислить массу четвертой части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, если плотность $\gamma(x, y) = xy$.

7. Вычислить массу всей цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, если плотность ее $\gamma(x, y) = \frac{1}{y^2}$.

8. Вычислите с помощью криволинейного интеграла координаты центров тяжести заданных кривых:

8.1 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$;

8.2 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$;

8.3 $y^2 = ax^3 - x^4$.

9. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 14
Криволинейные интегралы второго рода

Криволинейные интегралы первого рода определялись по любой спрямляемой кривой. Криволинейные интегралы второго рода определяются только по так называемым ориентированным спрямляемым прямым.

Определение 14.1. *Задать* ***ориентацию*** *кривой – это значит задать порядок во множестве ее концов. Кривая с заданной ориентацией называется* ***ориентированной****.*

Пусть $\varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$; кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – образ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при взаимно однозначном отображении

$$\chi : t \to (\varphi(t), \psi(t)), \ t \in [\alpha, \beta].$$

Зададим ориентацию кривой Γ. Конец кривой $\chi(\alpha)$ будем считать первым концом (начальной точкой) кривой, конец кривой $\chi(\beta)$ – вторым концом (конечной точкой). В этом случае ориентированную кривую Γ будем обозначать $\Gamma(\chi(\alpha), \chi(\beta))$. Если же $\chi(\beta)$ назвать первым концом кривой, а $\chi(\alpha)$ – вторым концом, то кривую Γ будем обозначать $\Gamma(\chi(\beta), \chi(\alpha))$.

Как мы уже знаем из предыдущей лекции, параметризация кривой не определяется однозначно. Но выбор другой параметризации ориентированной кривой может привести к изменению ориентации кривой. Так, например, для кривой, являющейся графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0, 1]$, зададим ориентацию, выбрав в качестве начальной точки кривой точку $(0, 1)$, а в качестве конечной точки – точку $(1, 0)$. Если же параметризовать кривую парой функций $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то указанная параметризация поменяет ориентацию кривой: точка $(1, 0)$ станет начальной точкой кривой, а точка $(0, 1)$ – конечной. Поэтому в случае ориентированной кривой все ее параметризации будем делить на два класса: сохраняющие и меняющие ориентацию.

Рассматривая разбиение τ ориентированной кривой Γ на частичные кривые Γ_k $(k = \overline{1, n})$, будем задавать ориентацию частичных кривых таким же образом, как и ориентацию кривой Γ. Например, если

кривая $\Gamma = \Gamma(\chi(\alpha), \chi(\beta))$, а частичная кривая Γ_k есть образ частичного отрезка $[t_{k-1}, t_k]$ разбиения $\tau_{[\alpha,\beta]}$ при отображении χ, то точка $(\varphi(t_{k-1}), \psi(t_{k-1})) = (x_{k-1}, y_{k-1})$ будет начальной точкой кривой Γ_k, а точка $(\varphi(t_k), \psi(t_k)) = (x_k, y_k)$ – конечной $(k = \overline{1,n})$.

14.1 Задача о работе плоского силового поля

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^2$ декартовой плоскости задано силовое поле, то есть в каждой точке $(x, y) \in G$ приложена сила $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Необходимо найти работу этой силы при перемещении материальной точки единичной массы по спрямляемой ориентированной кривой $\Gamma \subset G$ из точки $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ в точку $M_n(x_n, y_n) \in \Gamma$ (рисунок 14.1).

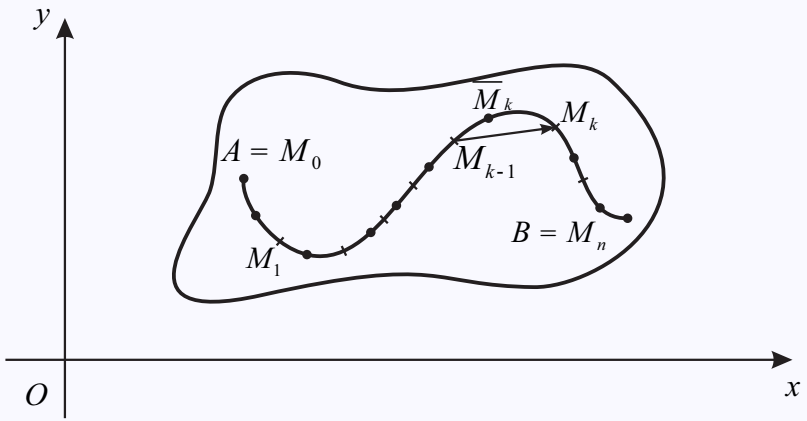


Рисунок 14.1

◀Рассмотрим любое разбиение τ кривой Γ на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных кривых Γ_k $(k = \overline{1,n})$, обозначая концы частичных кривых $M_k(x_k, y_k)$ $(k = \overline{0,n})$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $\overline{M}_k\,(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k$. Считаем, что указанная в задаче материальная точка движется по отрезкам $M_{k-1}M_k$ – звеньям ломаной l_τ,

вписанной в кривую Γ. Предполагаем, что при движении точки по звену ломаной $M_{k-1}M_k$ сила F постоянная и равна $F\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) = \left(P\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right), Q\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right)\right)$. Тогда работа силы F по перемещению материальной точки по кривой Γ из точки M_{k-1} в точку M_k будет приближенно равна скалярному произведению векторов $F(\overline{M}_k)$ и $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$, т. е.

$$A_k \approx P(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta x_k + Q(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta y_k, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}. \tag{14.1}$$

А вся искомая работа

$$A \approx \sigma_\tau(F, \overline{M}_k) = \sum_{k=1}^{n} P(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta x_k + Q(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\Delta y_k. \tag{14.2}$$

Точное значение работы будет равно $A = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(F, \overline{M}_k)$, где $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \{l_{\Gamma_k}\}$ (l_{Γ_k} – длина частичной кривой Γ_k) – мелкость разбиения τ, при условии, что указанный предел существует и конечен, а также не зависит от разбиения τ и выбора точек $\overline{M}_k \in \Gamma_k$. ▶

14.2 Понятие криволинейного интеграла второго рода

Пусть $\varphi, \psi \in C[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$; ориентированная кривая $\Gamma = \Gamma(\chi(\alpha), \chi(\beta)) \subset \mathbb{R}^2$ есть образ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при взаимно однозначном отображении (13.1). На кривой Γ определена вектор-функция $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, $(x, y) \in \Gamma$.

Рассмотрим разбиение τ кривой Γ на n частичных кривых Γ_k с концами (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k) $(k = \overline{1, n})$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ $(k = \overline{1, n})$.

Для каждого $k = 1, \ldots, n$ зафиксируем точку $(\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k$ и составляем сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} P\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) \Delta x_k + Q\left(\overline{x}_k, \overline{y}_k\right) \Delta y_k.$$

Сумму σ_τ называют **интегральной суммой** вектор-функции F, соответствующей разбиению τ кривой $\Gamma(A, B)$.

Определение 14.2. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют пределом интегральной суммы σ_τ вектор-функции F по ориентированной кривой Γ, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \tau \ \ \lambda_\tau < \delta \ \ \forall (\overline{x}_k, \overline{y}_k) \in \Gamma_k \ \ |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Указанный предел будем обозначать $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$.

Определение 14.3. *Если для вектор-функции F существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = I$, то его называют* ***криволинейным интегралом второго рода*** *вектор-функции F по кривой Γ и обозначают*

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{14.3}$$

а вектор-функцию F называют ***интегрируемой*** *по кривой Γ.*

Функции P и Q также называют **интегрируемыми** по кривой Γ.

Замечание 14.1. Из определения криволинейного интеграла второго рода следует, что

$$\int\limits_{\Gamma(\chi(\alpha),\chi(\beta))} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = - \int\limits_{\Gamma(\chi(\beta),\chi(\alpha))} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода *зависит от выбора ориентации кривой.*

В самом деле, при разбиении кривой $\Gamma(\chi(\beta),\chi(\alpha))$ будет $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k-1} - y_k$. Поэтому интегральные суммы вектор-функции F, соответствующие разбиению τ кривой $\Gamma(\chi(\alpha),\chi(\beta))$ и кривой $\Gamma(\chi(\beta),\chi(\alpha))$, будут отличаться только знаком.

Но криволинейный интеграл второго рода *не зависит от параметризации* кривой Γ, *сохраняющей ориентацию* кривой.

Можно показать (покажите самостоятельно), что необходимым условием существования криволинейного интеграла второго рода является ограниченность функций P и Q на ориентированной спрямляемой кривой Γ.

14.3 Теорема о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода

Теорема 14.1. *Пусть гладкая ориентированная спрямляемая кривая* $\Gamma = \Gamma(\chi(\alpha), \chi(\beta)) \subset \mathbb{R}$ *задана параметрически*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}, \ t \in [\alpha, \beta] \ \ (\alpha < \beta), \ \chi(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \ \chi(\beta) = (\varphi(\beta), \psi(\beta)),$$

и для любых $t \in [\alpha, \beta]$

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0.$$

Если функции $P : \Gamma \to \mathbb{R}$ *и* $Q : \Gamma \to \mathbb{R}$ *непрерывны на* Γ, *то существует криволинейный интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))\, dt. \tag{14.4}$$

◀Для доказательства теоремы достаточно показать существование криволинейных интегралов и справедливость равенств

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt, \tag{14.5}$$

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)dt. \tag{14.6}$$

Докажем равенство (14.5); равенство (14.6) доказывается аналогично.

Рассмотрим любое разбиение $\tau_{[\alpha,\beta]}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных отрезков $[t_{k-1},t_k]$ ($k=\overline{1,n}$). Указанному разбиению соответствует разбиение τ кривой Γ на n частичных ориентированных кривых Γ_k ($k=\overline{1,n}$). Произвольно выбираем $\bar{t}_k \in [t_{k-1},t_k]$. Составим интегральную сумму:

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} P(\overline{x}_k,\overline{y}_k)\Delta x_k, \tag{14.7}$$

где $(\overline{x}_k,\overline{y}_k) = (\varphi(\bar{t}_k),\psi(\bar{t}_k))$;

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)dt. \tag{14.8}$$

Так как $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) \in C[\alpha,\beta]$, то интеграл $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt$ существует. А тогда

$$I = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt. \tag{14.9}$$

Оценим сверху $|\sigma_\tau - I|$.

$$\sigma_\tau - I = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (P(\varphi(\bar{t}_k),\psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t),\psi(t)))\varphi'(t)dt. \tag{14.10}$$

Пусть l_{Γ_k} – длина частичной кривой Γ_k.

$$l_{\Gamma_k} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'(t)+\psi'(t)}dt;\ \min_{[\alpha,\beta]}\left\{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\right\} = m > 0.$$

Так как $l_{\Gamma_k} \geqslant m \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k$, то $0 \leqslant \Delta t_k \leqslant \frac{l_{\Gamma_k}}{m}$. Из последнего неравенства следует, что при $\lambda_\tau \to 0$ будет и $\lambda_{\tau_{[\alpha,\beta]}} \to 0$. С учетом этого и того, что P непрерывна на Γ, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall \tau_{\tau_{[\alpha,\beta]}} \;\; \lambda_{\tau_{[\alpha,\beta]}} < \delta \;\; \left| P(\varphi(\bar{t}_k), \psi(\bar{t}_k)) - P(\varphi(t_k), \psi(t_k)) \right| < \varepsilon.$$

Так как $\varphi' \in C\,[\alpha, \beta]$, то φ' ограничена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то есть существует $D > 0$, что для любого $t \in [\alpha, \beta]$ $|\varphi'(t)| \leqslant D$. Тогда

$$|\sigma_\tau - I| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1},}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leqslant D\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \varepsilon D\,(\beta - \alpha)\,,$$

то есть существует

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx = I. \blacktriangleright$$

Замечание 14.2. Заключение теоремы 14.1 и формула (14.4) не изменятся, если кривая Γ будет кусочно-гладкой, а функции P и Q – кусочно-непрерывными на этой кривой.

Пример 14.1. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первой координатной четверти (рисунок 14.2).

$$\blacktriangleleft F = (-kx, -ky), \;\; |F| = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$A = \int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma} -kxdx - kydy = -k \int\limits_{\Gamma} xdx - k \int\limits_{\Gamma} ydy = I_1 + I_2.$$

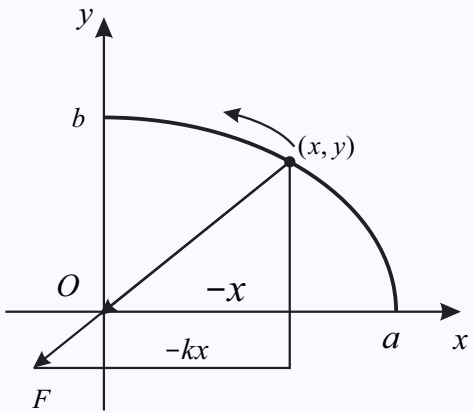


Рисунок 14.2

Для неполного криволинейного интеграла I_1 параметризуем кривую Γ, используя в качестве параметра x, для I_2 – используя в качестве параметра y. Тогда

$$A = k\left(\int\limits_a^0 -x\,dx + \int\limits_0^b -y\,dy\right) = k\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)\ (\text{Дж.}).\ \blacktriangleright$$

Пример 14.2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_\Gamma (2a-y)\,dx + (y-a)\,dy, \tag{14.11}$$

где Γ – одна арка циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, ориентированная в направлении возрастания параметра t.

$$\blacktriangleleft\ I = \int\limits_0^{2\pi} ((2a - a + a\cos t)a(1 - \cos t) + (a - a\cos t - a)a\sin t)\, dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t - \frac{\sin 2t}{2}\right) dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{\sin 2t}{2}\right) dt = \pi a^2. \blacktriangleright$$

Замечание 14.3. Аналогично случаю кривой на плоскости вводится криволинейный интеграл второго рода по кривой в пространстве. Также в этом случае будет справедлива теорема, аналогичная теореме 14.1.

Пример 14.3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой

$$I = \int\limits_\Gamma x dx + y dy + (x + y - 1) dz, \tag{14.12}$$

где Γ – отрезок, проходящий от точки $(1, 1, 1)$ к точке $(2, 3, 4)$.

$\blacktriangleleft$Запишем уравнение отрезка в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

Тогда

$$I = \int\limits_0^1 (1 + t) dt + 2 \int\limits_0^1 (1 + 2t) dt + 3 \int\limits_0^1 (1 + 3t) dt = 13. \blacktriangleright$$

14.4 Основные свойства криволинейного интеграла второго рода

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода доказываются аналогично свойствам определенного интеграла Римана, поэтому мы приведем эти свойства без доказательств. Для краткости записей будем рассматривать неполные криволинейные интегралы второго рода, что не теряет общности рассуждений.

Теорема 14.2 (свойство линейности). *Если функции* $P_1 : \Gamma \to \mathbb{R}$ *и* $P_2 : \Gamma \to \mathbb{R}$ *интегрируемы по ориентированной спрямляемой кривой* Γ, *а* α *и* β – *любые фиксированные действительные числа, то и функция* $\alpha P_1 + \beta P_2$ *интегрируема по кривой* Γ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} (\alpha P_1 + \beta P_2)\, dx = \alpha \int\limits_{\Gamma} P_1 dx + \beta \int\limits_{\Gamma} P_2 dx. \tag{14.13}$$

Теорема 14.3 (свойство аддитивности). *Если функция* $P : \Gamma \to \mathbb{R}$ *интегрируема по ориентированной спрямляемой кривой* Γ, *то* P *будет интегрируемой по любой частичной кривой* Γ_k $(k = \overline{1,n})$, *и*

$$\int\limits_{\Gamma} P dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} P_k dx. \tag{14.14}$$

Если же функция P *интегрируема по каждой частичной кривой* Γ_k, *то она будет интегрируемой и по кривой* Γ, *и также будет справедливо равенство* (14.14).

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение ориентированной кривой.
2. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.
3. Сформулируйте теорему о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода.
4. Сформулируйте свойства криволинейного интеграла второго рода.

ЛЕКЦИЯ 15
Криволинейный интеграл второго рода по контуру. Формула Грина

Выше нами рассмотрено понятие контура (замкнутой жордановой кривой). Для определения криволинейного интеграла второго рода вдоль контура необходимо определить его ориентацию.

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ – контур, то ориентацию его можно задать «порядком прохождения» трех его точек

$$(x_1, y_1) \to (x_2, y_2) \to (x_3, y_3) \to (x_1, y_1) \text{ или } (x_1, y_1) \to (x_3, y_3) \to (x_2, y_2) \to (x_1, y_1),$$

где (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3) \in \Gamma$.

Все параметризации контура разбиваются на два класса – сохраняющие ориентацию и меняющие ориентацию.

Задание ориентации не зависит от выбора точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3) \in \Gamma$ в том смысле, что если параметризация «проходит» какие-то три точки в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

Теперь криволинейный интеграл второго рода вдоль ориентированного контура определяется точно так же, как и для ориентированной кривой (определение 14.3).

Если Γ – спрямляемый контур, то его можно ориентировать двумя способами, поэтому одну из ориентаций можно назвать **положительной**, а другую – **отрицательной**. При этом в качестве положительной принято выбирать ту, при которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»). Это определение не является, конечно, строгим, но оно интуитивно понятно в случае, когда контур является гладким или кусочно-гладким.

В случае положительно ориентированного контура криволинейный интеграл второго рода по контуру принято обозначать так:

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{15.1}$$

в случае же отрицательно ориентированного контура:

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{15.2}$$

Замечание 15.1. Из задачи о работе плоского силового поля следует, что значение работы вдоль замкнутого контура разбивает силовые поля на два класса:

1-й класс – **потенциальные силовые** поля при условии, что работа по замкнутому контуру равна нулю;

2-й класс – **непотенциальные силовые** поля (работа по замкнутому контуру не равна нулю).

15.1 Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по спрямляемому ориентированному контуру и двойным интегралом по области, границей которой является указанный контур.

Пусть кусочно-гладкий положительно ориентированный контур Γ есть граница области интегрирования первого типа $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$ (рисунок 15.1):

$$\overline{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\right\},$$

функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – кусочно-гладкие на отрезке $[a,b]$.

Теорема 15.1. *Пусть функция $P : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{G}$, а ее частная производная первого порядка $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна и ограничена на G. Тогда справедлива* ***формула Грина***

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx. \tag{15.3}$$

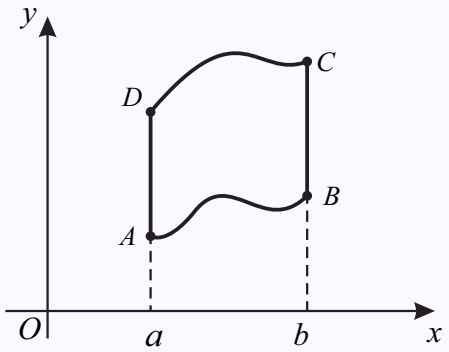


Рисунок 15.1

◀При условиях теоремы как двойной, так и криволинейный интегралы в равенстве (15.3) существуют.

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dx =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))dx = \int\limits_{\Gamma(D,C)} P(x,y)dx - \int\limits_{\Gamma(A,B)} P(x,y)dx =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma(C,D)} P(x,y)dx - \int\limits_{\Gamma(A,B)} P(x,y)dx. \qquad (15.4)$$

Если $x = a = \text{const}$, то $dx = 0$; также при $x = b = \text{const}$ будет $dx = 0$. Тогда

$$-\int\limits_{\Gamma(D,A)} P(x,y)dx = -\int\limits_{\Gamma(B,C)} P(x,y)dx = 0. \tag{15.5}$$

С учетом (15.4) и (15.5) получим справедливость заключения теоремы.▶

Замечание 15.2. Аналогично рассматривается простейшая область второго типа $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$ (рисунок 15.2). Пусть контур Γ – граница множества

$$\overline{G} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\right\},$$

функции $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ – кусочно-гладкие на отрезке $[c,d]$.

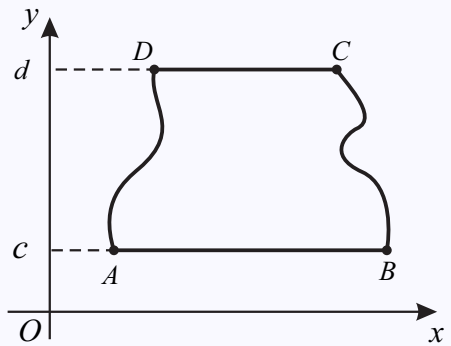


Рисунок 15.2

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
430
Приложение
Закрыть

Теорема 15.2. *Если функция $Q : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{G}$, а ее частная производная первого порядка $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывна и ограничена на G, то справедлива* ***формула Грина***

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \oint\limits_\Gamma Q(x,y)dy. \tag{15.6}$$

Замечание 15.3. Доказательство теоремы 15.2 аналогично доказательству теоремы 15.1.

По свойству аддитивности для двойных и криволинейных интегралов, а также с учетом того, что сумма криволинейных неполных интегралов от одной и той же функции по одной и той же кривой, но в противоположных направлениях равны нулю, получим справедливость формул (15.3) и (15.6), если область G допускает представление в виде конечного числа простейших областей как первого, так и второго типов (другие условия теорем 15.1 и 15.2 должны сохраниться). В этом случае будет справедлива и **полная формула Грина**

$$\oint\limits_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy. \tag{15.7}$$

Областями, допускающими выше указанное разбиение на простейшие области как первого, так и второго типов, будут многоугольные области. Но можно показать, что любая область G с кусочно-гладкой границей Γ допускает аппроксимацию многоугольными областями со сколь угодно малой ошибкой по величине площади. По этой причине будет справедлива формула Грина вида (15.7) для более общего случая.

Теорема 15.3. *Если функции $P : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $Q : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывны на $\overline{G}$, а их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны и ограничены на области G с кусочно-гладкой границей Γ, то справедлива формула Грина* (15.7).

15.2 Приложения формулы Грина к вычислению площадей плоских фигур

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – область с кусочно-гладкой границей Г. Тогда по формуле (15.6) имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma} x dy = \iint\limits_{G} dx dy = S_G, \tag{15.8}$$

где S_G – площадь плоской фигуры G. Аналогично

$$S_G = -\oint\limits_{\Gamma} y dx. \tag{15.9}$$

Сложим (15.8) и (15.9), получим

$$S_G = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma} x dy - y dx. \tag{15.10}$$

Пример 15.1. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

◀ Используем параметрическое задание эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Тогда по формуле (15.10)

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma} x dy - y dx = 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t))\, dt = 2ab \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi ab \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleright$$

15.3 Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода

Определение 15.1. *Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется* ***односвязной****, если любой кусочно гладкий контур $\Gamma \subset G$ является границей области, содержащейся в G.*

Другими словами, область односвязна, если для любой области D с кусочно-гладкой границей ∂D

$$\partial D \subset G \Rightarrow D \subset G.$$

Иначе говоря, в области G «нет дыр».

Теорема 15.4. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей ∂G, функции $P : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $Q : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывны на $\overline{G}$, а их частные производные первого порядка $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны и ограничены на G. Тогда равносильны следующие условия:*

1. *Для любого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset G$*

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{15.11}$$

2. *Для любых точек B и C из области G криволинейный интеграл*

$$\int_{\Gamma(B,C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{15.12}$$

не зависит от выбора кусочно-гладкой кривой Γ с начальной точкой B и конечной точкой C.

3. *Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции, определенной на области G.*

4. *Для любых точек $(x,y) \in G$ выполняется равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \tag{15.13}$$

◀Доказательство теоремы проведем по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

а) $1 \to 2$ (дано условие 1, докажем справедливость заключения 2). Для наглядности рассмотрим рисунок 15.3.

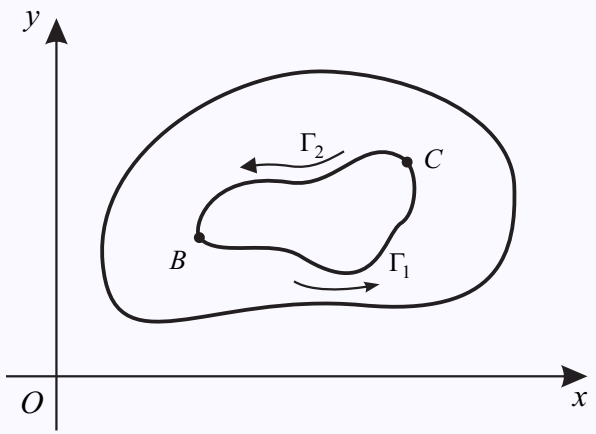


Рисунок 15.3

Возьмем любые кусочно-гладкие кривые Γ_1 и Γ_2 из области G, концами которых будут точки B и C. Указанные кривые образуют кусочно-гладкий контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Согласно условию 1

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{15.14}$$

Из свойства аддитивности для криволинейных интегралов $\oint_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = 0$.

Тогда $\int_{\Gamma_1} = -\int_{\Gamma_2}$, то есть $\int_{\Gamma_1(B,C)} = \int_{\Gamma_2(B,C)}$. Утверждение 2 доказано.

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
434
Приложение
Закрыть

Замечание 15.4. При выполнении условия 2 криволинейный интеграл (15.12) можно обозначать так:

$$\int\limits_B^C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

б) $2 \to 3$ (дано условие 2, докажем справедливость утверждения 3).

Фиксируем точку $B(x_0, y_0)$, а точка $C(x, y)$ пусть будет текущей в области G. Через Γ обозначим переменную кусочно-гладкую кривую, началом которой будет точка B и концом точка C.

Тогда для любой точки $C(x, y)$ криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma(B,C)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{15.15}$$

есть функция $u = u(x, y)$ координат x и y точки C, определенная на области G. Покажем, что функция u дифференцируема в области G и ее полный дифференциал

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy. \tag{15.16}$$

Для наглядности используем рисунок 15.4.

Вначале докажем существование на области G $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$. Придаем абсциссе x точки C любое приращение $\Delta x \neq 0$, но такое, что точка $C_1(x + \Delta x, y) \in G$. Тогда частное приращение

$$\Delta_x u(x,y) = u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_C^{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{15.17}$$

причем $dy = 0$ (криволинейный интеграл берем по отрезку, параллельному оси Ox, $y = \text{const}$).

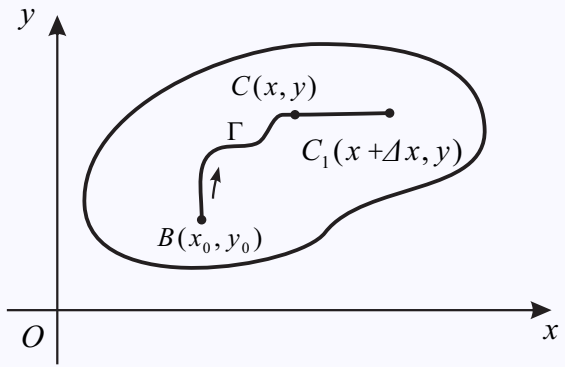


Рисунок 15.4

Разделим левую и правую части (15.17) на Δx и, применяя теорему о среднем, получим:

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x}(x,y) = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx = P(x+\theta\Delta x, y),\ \theta \in (0,1).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y). \tag{15.18}$$

При доказательстве (15.18) учитываем, что функция P непрерывна в области G. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ в области G.

Так как u'_x и u'_y, равные, соответственно, P и Q, непрерывны в области G, то функция u дифференцируема в этой области (достаточный признак дифференцируемости функции u в любой точке области G).

Тогда

$$du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Утверждение 3 доказано.

в) $3 \to 4$ (дано условие 3, требуется доказать утверждение 4).

Воспользуемся теоремой Шварца о равенстве смешанных производных. В нашем случае

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

но частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в G, поэтому в G будут непрерывны и смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, а значит, они будут равны, поэтому для любых $(x,y) \in G$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Утверждение 4 доказано.

г) $4 \to 1$ (дано условие 4, требуется доказать утверждение 1).

При условиях теоремы справедлива формула Грина для любого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset G$, являющегося границей области $D \subset G$:

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy. \tag{15.19}$$

Но согласно условию 4 для любых $(x,y) \in D$ $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$. Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \blacktriangleright$$

15.4 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Теорема 15.5. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область с кусочно-гладкой границей ∂G, функции $P : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $Q : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывны на $\overline{G}$, а их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на G, и для любых $(x, y) \in G$*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y). \tag{15.20}$$

Тогда на G $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u : G \to \mathbb{R}$, которая определяется с точностью до константы по формуле

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C, \tag{15.21}$$

где (x_0, y_0) – любая фиксированная точка области G, а (x, y) – текущая точка этой области, причем указанные точки есть концы любой кусочно-гладкой кривой, принадлежащей области G, по которой проводится интегрирование.

◀Выполняются условия теоремы 15.4, поэтому равенство (15.20) будет выполняться тогда и только тогда, когда $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $u : G \to \mathbb{R}$. Также в теореме 15.4 было показано, что при выполнении равенства (15.20) условию

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{15.22}$$

удовлетворяет функция

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{15.23}$$

Далее учтем, что две функции, имеющие одинаковые полные дифференциалы, отличаются одна от другой только на постоянное слагаемое.►

Замечание 15.5. Так как точки (x_0, y_0) и (x, y) могут быть концами любой кусочно-гладкой кривой, то чаще всего в качестве такой кривой берут ломанную со звеньями, параллельными координатным осям.

Замечание 15.6. Доказанная теорема дает один из методов решения дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах.

Пример 15.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy = 0. \tag{15.24}$$

◄Уравнение имеет вид

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{15.25}$$

где

$$P(x, y) = 12x^2y + \frac{1}{y^2},\ Q(x, y) = 4x^3 - \frac{2x}{y^3}.$$

Ось Ox разбивает координатную плоскость $\mathbb{R}^2$ на две односвязные области: G_1 $(y > 0)$ и G_2 $(y < 0)$. Решение уравнения (15.24) будем проводить в области G_1. Находим

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 12x^2 - \frac{2}{y^3} \text{ и } \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 12x^2 - \frac{2}{y^3}.$$

Выполняются условия предыдущей теоремы, поэтому левая часть уравнения (15.24) есть полный дифференциал некоторой функции u в односвязной области G_1. По формуле (15.21) находим функцию u с точностью до константы. В качестве кривой интегрирования берем ломаную $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (рисунок 15.5).

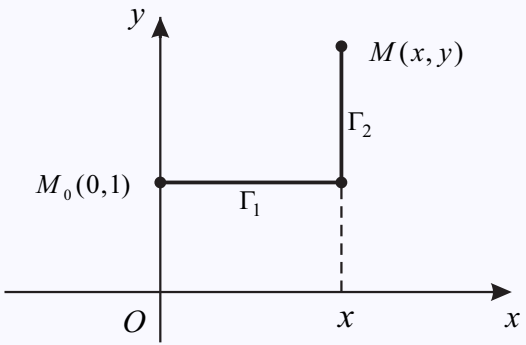


Рисунок 15.5

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \Gamma_1 : y = 1, dy = 0, & \Gamma_2 : x = const, dx = 0, \\ x - \text{параметр}, & y - \text{параметр}, \\ 0 \leqslant x \leqslant x & 1 \leqslant y \leqslant y \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_0^x (12x^2 + 1)dx + \int\limits_1^y \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right) dy = 4x^3 y + \frac{x}{y^2} + C_1.$$

Тогда общее решение уравнения (15.24) $u(x,y) = C$, где $u(x,y) = 4x^3y + \frac{x}{y^2}$. ▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение контура. Каким образом можно ориентировать контур?

2. Докажите формулу Грина. Каким образом формула Грина применяется для вычисления площади плоской фигуры.

3. Сформулируйте теорему о четырех равносильных условиях для криволинейного интеграла второго рода.

4. Сформулируйте теорему о восстановлении функции по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

Криволинейные интегралы второго рода и их приложения

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma}(xy-y^2)dx+xdy,$$

где Γ – дуга параболы $y=2x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,2)$.

◀Примем за параметр переменную x $(0\leqslant x\leqslant 1)$ и преобразуем криволинейный интеграл в определенный. Из уравнения параболы находим $dy=4xdx$. Поэтому

$$\int_{\Gamma}(xy-y^2)dx+xdy=\int_0^1(x\cdot 2x^2-4x^4+x\cdot 4x)dx=\frac{31}{30}=1\frac{1}{30}.\ \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma}y^2dx+x^2dy,$$

где Γ – положительно ориентированная верхняя половина эллипса

$$x=a\cos t,\ \ y=b\sin t.$$

◀ $dx=-a\sin tdt,\ \ dy=b\cos tdt.$

$$\int_{\Gamma}y^2dx+x^2dy=\int_0^{\pi}\left(b^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\cdot b\cos t\right)dt=-\frac{4}{3}ab^2.\ \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{(ABCA)} (3x^2+y)dx+(x-2y^2)dy$, где $(ABCA)$ – граница треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$.

◀Контур интегрирования изображен на рисунке 15.6. Направление интегрирования определено последовательностью букв, являющихся точками контура. Для решения задачи вычислим интеграл по каждой из сторон треугольника, сохраняя направление, и сложим результаты.

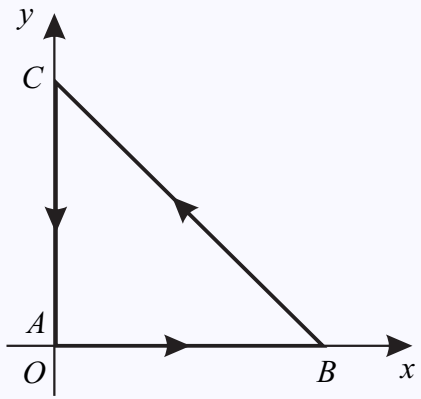


Рисунок 15.6

1. Сторона треугольника AB определяется уравнением $y=0$. Тогда $dy=0$, и подынтегральное выражение вдоль этой стороны имеет вид $3x^2dx$. Точке A соответствует значение $x=0$, а точке B – значение $x=1$. Следовательно,

$$\int\limits_{(AB)} 3x^2dx = 3\int\limits_0^1 x^2dx = 1.$$

2. Сторона треугольника BC определяется уравнением $x + y = 1$. Преобразуем интеграл по стороне BC в определенный интеграл относительно переменной x. Для этого из уравнения $x + y = 1$ находим: $y = 1 - x$, $dy = -dx$. Точке B соответствует значение $x = 1$, точке C – значение $x = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{(BC)} (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy = \int\limits_1^0 \left(3x^2 + 1 - x - x + 2(1 - x)^2\right) dx = -\frac{5}{3}.$$

3. Сторона CA определяется уравнением $x = 0$. Тогда $dx = 0$ и подынтегральное выражение вдоль этой стороны имеет вид $2y^2dy$. Пределы интегрирования будут от точки C $(y = 1)$ до точки A $(y = 0)$. Имеем:

$$\int\limits_{(CA)} (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy = -\int\limits_1^0 2y^2dy = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, получим, что

$$\int\limits_{(ABCA)} (3x^2 + y)dx + (x - 2y^2)dy = 1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Этот ответ можно было получить, не вычисляя интеграла. Так как подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1\right),$$

причем функции P и Q непрерывны вместе с частными производными первого порядка, то интеграл по замкнутому контуру равен нулю.►

Задание 4. Показать, что криволинейный интеграл $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$ не зависит от кривой с начальной точкой $(0,1)$ и конечной точкой $(2,3)$, и вычислить его.

◀Функции $P(x,y) = x+y$ и $Q(x,y) = x-y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ непрерывны на $\mathbb{R}^2$, причем $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл не зависит от кривой с начальной точкой $(0,1)$ и конечной точкой $(2,3)$, и для вычисления интеграла мы можем выбирать любую кривую, соединяющую точки $(0,1)$ и $(2,3)$. Поскольку удобнее всего вычислять криволинейный интеграл по отрезкам, параллельным осям координат, то выберем кривую в виде ломаной, состоящей из двух звеньев, параллельных координатным осям (рисунок 15.7).

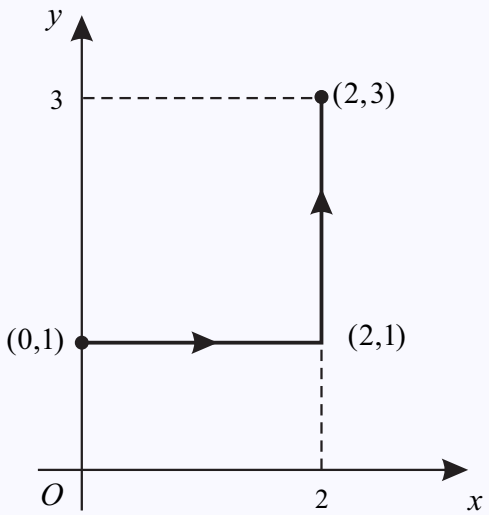


Рисунок 15.7

За вершину возьмем точку $(2,1)$. Тогда

$$\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)}+\int\limits_{(2,1)}^{(2,3)}.$$

Точки $(0,1)$и $(2,1)$ соединяет отрезок прямой $y=1$. Следовательно, $dy=0$ и

$$\int\limits_{(0,1)}^{(2,1)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_{0}^{2}(x+1)dx=4.$$

Точки $(2,1)$ и $(2,3)$ соединяет отрезок прямой $x=2$. Следовательно, $dx=0$ и

$$\int\limits_{(2,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_{1}^{3}(2-y)dy=0.$$

Таким образом, искомый интеграл $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=4+0=4.$ ▶

Задание 5. Проверить, является ли выражение

$$\left(3x^2y-\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^3-xy^2)dy \tag{15.26}$$

полным дифференциалом некоторой функции двух переменных $F=F(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, и, если это так, найти аналитическое выражение для функции F.

◀В данном выражении $P(x,y)=3x^2y-\frac{y^3}{3}, Q(x,y)=x^3-xy^2$.

Частные производные $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - y^2$ равны между собой и непрерывны. Следовательно, выражение (15.26) является полным дифференциалом $dF(x, y)$. Для отыскания функции F воспользуемся формулой

$$F(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \tag{15.27}$$

где (x_0, y_0) – некоторая фиксированная точка, а (x, y) – переменная точка, взятые из области непрерывности функций P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. В данном случае в качестве точки (x_0, y_0) удобнее взять точку $(0, 0)$. Учитывая, что криволинейный интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(x, y)} \left(3x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^3 - xy^2) dy$ не зависит от кривой, соединяющей точки $(0, 0)$ и (x, y), выберем кривую от точки $(0, 0)$ до точки (x, y) в виде ломаной, состоящей из двух звеньев, параллельных осям координат (рисунок 15.8).

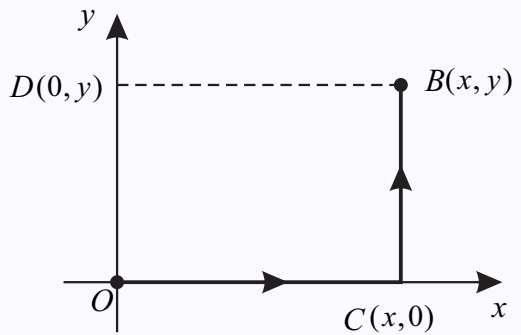


Рисунок 15.8

$$F(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(3x^2y-\frac{y^2}{3}\right)dx+(x^3-xy^2)dy=\int\limits_{(0,0)}^{(x,0)}+\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)}=x^3y-\frac{xy^3}{3}.$$

Таким образом $F(x,y)=x^3y-\frac{xy^3}{3}$. ►

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_{\Gamma}xdx+ydy+(x+y-1)\,dz,$$

где Γ – отрезок, пробегаемый от точки $(1,1,1)$ к точке $(2,3,4)$.

◄Параметризуем кривую Γ:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-1}{4-1}=t \text{ или } \begin{cases} x=t+1,\\ y=2t+1,\\ z=3t+1. \end{cases}, \ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

$$I=\int\limits_0^1(t+1)\,dt+2\int\limits_0^1(2t+1)\,dt+3\int\limits_0^1(t+1+2t+1-1)\,dt=13. \text{ ►}$$

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I=\int\limits_{\Gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+2yzdy-x^2dz$$

по пространственной кривой, заданной параметрически $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ в направлении возрастания параметра при $0\leqslant t\leqslant 1$.

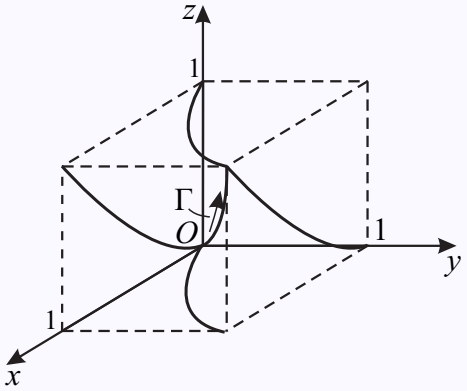


Рисунок 15.9

◀Изобразим кривую на рисунке 15.9. Из $x = t$ следует, что $y = x^2$ и $z = x^3$. Имеем две параболацилиндрические поверхности. Их пересечение и есть кривая Γ.

$$I = \int\limits_0^1 \left(t^4 - t^6\right) dt + 2\int\limits_0^1 t^2 \cdot t^3 \cdot 2tdt - \int\limits_0^1 t^2 \cdot 3t^2 dt \frac{1}{35}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_\Gamma yzdx + z\sqrt{a^2 - y^2}dy + xydz$$

по пространственной кривой $\Gamma : x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = \frac{a}{2\pi}t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, в направлении возрастания параметра t.

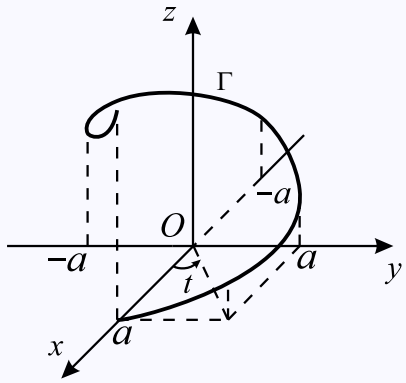


Рисунок 15.10

◀Кривая Γ есть винтовая линия. Изобразим ее на рисунке 15.10.

$$I = \int\limits_0^{2\pi} a\sin t \cdot \frac{a}{2\pi}t \cdot a\,(-\sin t)\,dt + \int\limits_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi}t\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t dt +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} a\cos t \cdot a\sin t \cdot \frac{a}{2\pi}dt = -\frac{a^3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2}dt + \frac{a^3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} t\,|\cos t|\cos t dt +$$

$$+\frac{a^3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin 2t}{2}dt = -\frac{a^3}{4\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} tdt - \left[\begin{array}{cc} u = t & du = dt \\ dv = \cos 2tdt & v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{array}\right]_0^{2\pi}\right) +$$

$$+\frac{a^3}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt+\int\limits_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} t\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right)+$$

$$+\frac{a^3}{8\pi}(-\cos 2t)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{a^3\pi}{2}.\ \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I=\oint\limits_{\Gamma} xy^2dy-x^2ydx,$$

где Γ – окружность $x^2+y^2=R^2$ в направлении против хода часовой стрелки.

◄1). Преобразуем данный криволинейный интеграл с помощью формулы Грина к двойному интегралу

$$P(x,y)=-x^2y,\quad Q(x,y)=xy^2,\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2+x^2.$$

Следовательно,

$$I=\iint\limits_P (x^2+y^2)dxdy,$$

где P – круг $x^2+y^2\leqslant R^2$.

2. Вычислим полученный нами двойной интеграл, используя переход к полярным координатам. Тогда $x^2+y^2=r^2$ и

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3dr=2\pi\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^R=\frac{\pi R^4}{2}.\ \blacktriangleright$$

Задание 10. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\Gamma} e^x (1 - \cos y)\, dx + e^x (\sin y - y)\, dy,$$

Γ – граница множества

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}.$$

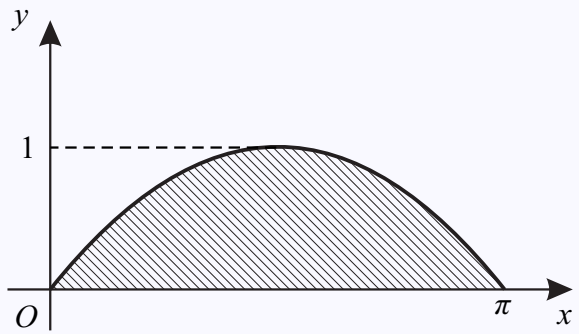


Рисунок 15.11

◀Вычисляем криволинейный интеграл по формуле Грина.

$$I = \iint_G \left(e^x (\sin y - y) - e^x \sin y\right) dxdy = -\iint_G y e^x dxdy = -\int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\sin x} y dy =$$

$$= -\int_0^{\pi} e^x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sin x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x (1 - \cos 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi} e^x dx - \int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x dx\right) = -\frac{1}{4}\left(e^x\Big|_0^{\pi} - I_1\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{\pi} - 1 - I_1\right).$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos 2x dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right]\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^x \cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\left(e^{\pi} - 1\right) = \frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 1\right).$$

$$I = -\frac{1}{4}\left(e^{\pi} - 1 - \frac{1}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - e^{\pi}\right). \blacktriangleright$$

Задание 11. Найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми

$$x = t^2,\ y = t^3,\ x = 1.$$

◀Изобразим область на рисунке 15.12.

$$y = t^3,\ t = \sqrt[3]{y},\ x = \left(\sqrt[3]{y}\right)^2,\ \sqrt[3]{y} = \pm x^{\frac{1}{2}};\ y = \pm x^{\frac{3}{2}},\ x = 1.$$

Область G симметрична по площади относительно оси Ox.
Площадь области найдем по формуле (∂G – граница области G)

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G} x dy - y dx.$$

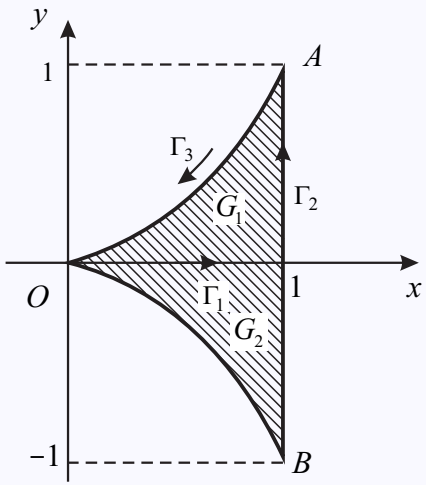


Рисунок 15.12

В нашем случае

$$S = 2\int\limits_{\partial G_1} x\,dy = 2\left(\int\limits_{\Gamma_1} x\,dy + \int\limits_{\Gamma_2} x\,dy + \int\limits_{\Gamma_3} x\,dy\right) =$$

$$= [\Gamma_1:\ y = 0,\ dy = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\quad \Gamma_2:\ x = 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

$$\Gamma_3:\ 1 \geqslant y \geqslant 0,\ x = y^{\frac{2}{3}}] =$$

$$= 2\left(\int\limits_0^1 dy + \int\limits_1^0 y^{\frac{2}{3}}\,dy\right) = 2\left(1 + \frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_1^0\right) = \frac{4}{5}\ \text{(ед. площади)}.\ \blacktriangleright$$

Задание 12. Поле образовано силой $|F| = \frac{k}{r}$, направление которой составляет угол $\frac{\pi}{2}$ с направлением радиуса-вектора точки ее приложения. Найти работу поля при перемещении материальной точки массы m по дуге окружности $x^2 + y^2 = a^2$ из точки $(a, 0)$ в точку $(0, a)$.

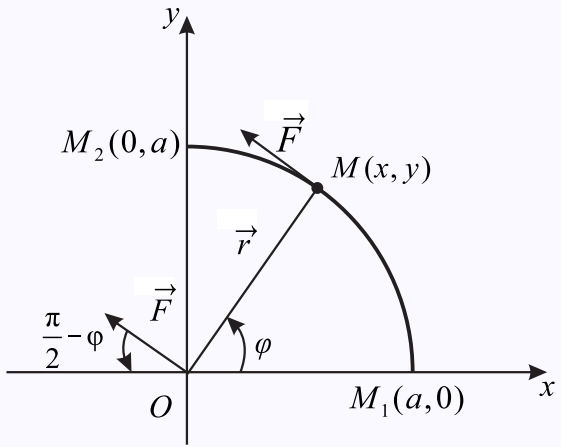


Рисунок 15.13

◀Искомую работу вычисляем по формуле

$$A = \int_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Воспользуемся полярной системой координат.

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ dx = -r\sin\varphi d\varphi,\ \ dy = r\cos\varphi d\varphi.$$

P – проекция F на ось Ox, Q – проекция F на ось Oy.

$$P = -\frac{k}{r}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\frac{k}{r}\sin\varphi;\ Q = \frac{k}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{k}{r}\cos\varphi.$$

$$A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{k}{r}\sin\varphi\,(-r\sin\varphi) + \frac{k}{r}\cos\varphi\cdot r\cos\varphi\right) d\varphi = \frac{k\pi}{2}\ (\text{Дж.}).\ \blacktriangleright$$

Задание 13. Найти работу силового поля $F = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $(0,0,0)$ и (x_0, y_0, z_0).

◀Работу силового поля находим по формуле

$$A = \int\limits_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

где $P(x,y,z) = \lambda x$, $Q(x,y,z) = \lambda y$, $R(x,y,z) = \lambda z$.

Представим отрезок Γ в параметрическом виде:

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} = \frac{z-0}{z_0-0} = t$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 t, \\ y = y_0 t, \\ z = z_0 t, \end{cases}\ , \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

$$A = \int\limits_0^1 x_0 t d(x_0 t) + \int\limits_0^1 y_0 t d(y_0 t) + \int\limits_0^1 z_0 t d(z_0 t) = x_0^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + y_0^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 | + z_0^2 \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{2}\ (\text{Дж.}).\ \blacktriangleright$$

Задание 14. Найти работу силового поля $F = (y, -z, x)$ вдоль контура

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2, \\ y = x. \end{cases}$$

Контур Γ ориентирован против часовой стрелки со стороны оси Ox.

◀Изобразим на рисунке 15.14 контур Γ в первом октанте.

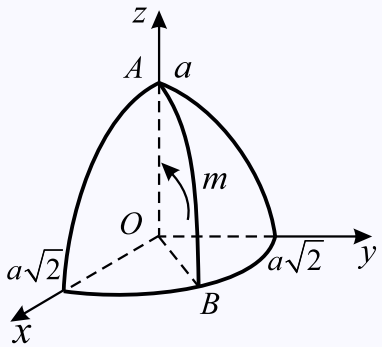


Рисунок 15.14

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{2a}\right)^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Дуга AmB есть $\frac{1}{4}$ часть контура Γ.

Найдем проекцию контура Γ на плоскость $y = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2, \\ x^2 = y^2; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 2x^2 + 2z^2 = 2a^2, \\ x^2 + z^2 = a^2. \end{array}$$

Кривая (проекция контура Γ на плоскость $y=0$) $x^2+z^2=a^2$ есть окружность. Используем полярную систему координат $x=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$, $r^2=a^2$, $r=a$.

Тогда $x=y=a\cos\varphi$, $z=a\sin\varphi$.

Вычисляем искомую работу A.

$$A=\int\limits_{\Gamma} ydx-zdy+xdz=\left[\begin{array}{c} dx=dy=-a\sin\varphi d\varphi, \\ dz=a\cos\varphi d\varphi \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(a\cos\varphi\cdot(-a\sin\varphi)-a\sin\varphi\cdot(-a\sin\varphi)+a\cos\varphi\cdot a\cos\varphi)\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi a^2 \text{ (Дж.). } \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

   1.1 $\int\limits_{\Gamma} xydx$, где Γ – дуга синусоиды $y=\sin x$ от $x=0$ до $x=\pi$;

   1.2 $\int\limits_{\Gamma} xdy$, где Γ – отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ от точки $(a,0)$ до точки $(0,b)$;

   1.3 $\int\limits_{\Gamma}(x^2-y^2)dx$, где Γ – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(2,4)$;

   1.4 $\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)dy$, где Γ – контур прямоугольника, образованного прямыми $x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=5$ в положительном направлении;

   1.5 $\int\limits_{\Gamma} 4x\sin^2 ydx+y\cos^2 2xdy$ вдоль прямой линии от точки $(0,0)$ до точки $(3,6)$;

   1.6 $\int\limits_{\Gamma} xdy$, где Γ – контур треугольника, образованного осями координат и прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ в положительном направлении;

1.7 $\int\limits_{\Gamma} ydx + xdy$, где Γ – это четверть окружности $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$;

1.8 $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ вдоль кривых: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = x^3$; г) $y^2 = x$;

1.9 $\int\limits_{\Gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ в положительном направлении;

1.10 $\int\limits_{\Gamma} \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2+y^2}$ вдоль правого лепестка лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ в положительном направлении.

2. Вычислить интегралы, предварительно убедившись, что они не зависят от кривой, соединяющей заданные точки:

2.1 $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$;

2.2 $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$;

2.3 $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$;

2.4 $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

3. Проверить, являются ли данные выражения полными дифференциалами функций двух переменных, и если да, то найти эти функции:

3.1 $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

3.2 $(3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$;

3.3 $(e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)dy$;

3.4 $\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy$;

3.5 $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy$;

3.6 $\frac{(x^2+2xy+5y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$;

3.7 $\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx+2xydy$;

3.8 $\left[24x^2\sin 2y+\frac{4\sqrt{1+y^2}}{(1+x)^2}\right]dx+\left[16x^3\cos 2y-\frac{4y}{(1+x)\sqrt{1+y^2}}-10y\right]dy$.

4. Вычислить криволинейные интегралы с помощью формулы Грина:

4.1 $\int\limits_\Gamma (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$, где Γ – контур треугольника с вершинами $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$, пробегаемый в положительном направлении;

4.2 $\int\limits_\Gamma e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$, где Γ – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\sin x$.

5. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площади плоских фигур, ограниченных следующими кривыми:

5.1 $x=a\cos t, y=b\sin t$;

5.2 $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t),\\ y=a(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$

5.3 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$;

5.4 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

6. Силовое поле образовано силой F, равной по величине расстоянию точки ее приложения от начала координат и направленной в начало координат. Найти работу силы поля, затраченную на перемещение материальной точки единичной массы по дуге параболы $y^2=8x$ от точки $(2,4)$ до точки $(4,4\sqrt{2})$.

7. Поле образовано силой, имеющей постоянную величину F и направление положительной полуоси Ox. Найти работу поля, затраченную на передвижение материальной точки единичной массы по ходу часовой стрелки вдоль четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первом квадранте.

8. Поле образовано силой, направленной в начало координат и равной расстоянию точки приложения ее до начала координат. Найти работу поля при перемещении массы m из положения A в положение B.

9. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первом квадранте.

10. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 16
Поверхностные интегралы первого рода

Поверхностные интегралы играют важную роль при решении многих задач физики, например при решении задачи о плотности распределения зарядов на поверхности проводника или о скорости жидкости, протекающей через некоторую поверхность, или об освещенности поверхности, или о притяжении простого слоя и т. д.

16.1 Понятие поверхностного интеграла первого рода

В лекции 3 нами рассмотрено понятие гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ как графика функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$), которая имеет непрерывные частные производные первого порядка в ограниченной области D. В лекции 11 было показано, что если частные производные еще и ограничены на области D, то поверхность S будет квадрируемой и ее площадь $\mu(S)$ находится по формуле

$$\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \varphi'^2_x(x,y) + \varphi'^2_y(x,y)}\,dxdy. \tag{16.1}$$

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$. Рассмотрим любое разбиение τ поверхности S на квадрируемые части S_k с положительными площадями ΔS_k ($k = \overline{1,n}$) с помощью системы кусочно-гладких кривых на поверхности (S_k будем называть **частичными поверхностями**). На каждой частичной поверхности произвольно выбираем точку (x_k, y_k, z_k) и составляем сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k. \tag{16.2}$$

Сумму σ_τ будем называть **интегральной суммой** функции f по поверхности S, соответствующей разбиению τ.

Обозначим $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \operatorname{diam}\{S_k\}$; λ_τ назовем **мелкостью разбиения** τ.

Определение 16.1. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют **пределом интегральной суммы** σ_τ функции f по поверхности S, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \tau \ \lambda_\tau < \delta \quad \forall (x_k, y_k, z_k) \in S_k \ (k = \overline{1,n}) \quad |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Определение 16.2. *Если для функции $f : S \to \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$, то его называют **поверхностным интегралом первого рода** функции f по поверхности S и обозначают $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$, а функцию f называют **интегрируемой** по поверхности S.*

Можно показать, что необходимым условием интегрируемости функции по поверхности S является ограниченность функции на гладкой поверхности.

16.2 Теорема о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода

Пусть $G, D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные области, $\overline{D} \subset G$, причем граница области D есть множество площади нуль.

Гладкая поверхность S есть график функции $z = \varphi(x,y)$ при $(x,y) \in \overline{D}$, причем функция φ имеет непрерывные частные производные первого порядка на G.

Теорема 16.1. *Если функция $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{S}$, то f будет интегрируемой по поверхности S и справедлива формула*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + \varphi'^2_x(x,y) + \varphi'^2_y(x,y)}dxdy. \tag{16.3}$$

◀Рассмотрим любое разбиение τ_S поверхности S на квадрируемые части S_k с положительными площадями ΔS_k $(k=\overline{1,n})$ с помощью системы кусочно-гладких кривых на поверхности. На каждой частичной поверхности произвольно выбираем точку (x_k, y_k, z_k) и составляем интегральную сумму

$$\sigma_{\tau_S} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k. \tag{16.4}$$

Разбиению τ_S соответствует разбиение τ_D множества D на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных множеств D_k, $k=\overline{1,n}$ (частичные множества D_k – проекции частичных поверхностей S_k на плоскость xOy). Так как поверхность S гладкая, то (см. (11.17))

$$\Delta S_k = \iint\limits_{D_k} \sqrt{1+\varphi'^2_x(x,y)+\varphi'^2_y(x,y)}dxdy,\ \ k=\overline{1,n}. \tag{16.5}$$

В (16.5) воспользуемся теоремой о среднем (теорема 9.11): $\Delta S_k = \sqrt{1+\varphi'^2_x(\overline{x}_k,\overline{y}_k)+\varphi'^2_y(\overline{x}_k,\overline{y}_k)}\Delta D_k$, где $(\overline{x}_k,\overline{y}_k) \in \overline{D}_k$, а ΔD_k – площадь D_k $(k=\overline{1,n})$. Тогда

$$\sigma_{\tau_S} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k))\sqrt{1+\varphi'^2_x(\overline{x}_k,\overline{y}_k)+\varphi'^2_y(\overline{x}_k,\overline{y}_k)}\Delta D_k. \tag{16.6}$$

Функция $\psi(x,y) = \sqrt{1+\varphi'^2_x(x,y)+\varphi'^2_y(x,y)}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{D}$, поэтому она будет и равномерно непрерывной на $\overline{D}$ (теорема Кантора 2.7). Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_1>0\ \ \forall\tau_D\ \ \lambda_{\tau_D}<\delta_1\ \ \ |\psi(x_k,y_k)-\psi(\overline{x}_k,\overline{y}_k)|<\varepsilon,$$

где λ_{τ_D} – мелкость разбиения τ_D.

Кроме того, из непрерывности функции f на $\overline{S}$ следует (теорема Вейерштрасса 2.5), что функция f ограничена на $\overline{S}$, то есть существует $K > 0$, что для любых $(x, y, z) \in \overline{S}$ $|f(x, y, z)| \leqslant K$.

Пусть

$$\sigma_{\tau_D} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k))\sqrt{1 + \varphi'^2_x(x_k, y_k) + \varphi'^2_y(x_k, y_k)}\Delta D_k.$$

Тогда при $\lambda_{\tau_D} < \delta_1$ имеем:

$$|\sigma_{\tau_S} - \sigma_{\tau_D}| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, \varphi(x_k, y_k))\ (\psi(\overline{x}_k, \overline{y}_k) - \psi(x_k, y_k))\Delta D_k\right| \leqslant K\varepsilon\mu(D), \tag{16.7}$$

где $\mu(D)$ – площадь D.

Очевидно, что

$$\lim_{\lambda_D \to 0} \sigma_{\tau_D} = \iint\limits_D f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1 + \varphi'^2_x(x, y) + \varphi'^2_y(x, y)}dxdy = I,$$

так как подынтегральная функция непрерывна на $\overline{D}$.

Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta_2 > 0\ \ \forall\tau_D\ \ \lambda_{\tau_D} < \delta_2\ \ |I - \sigma_{\tau_D}| < \varepsilon. \tag{16.8}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для $\lambda_{\tau_S} < \delta$ и $\lambda_{\tau_D} < \delta$ будут справедливы оценки (16.7) и (16.8). Поэтому

$$|\sigma_{\tau_S} - I| = |\sigma_{\tau_S} - \sigma_{\tau_D} + \sigma_{\tau_D} - I| \leqslant |\sigma_{\tau_S} - \sigma_{\tau_D}| + |\sigma_{\tau_D} - I| < \varepsilon(1 + K\mu(D)). \tag{16.9}$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\tau_S\ \lambda_{\tau_S} < \delta\ \ \forall(x_k, y_k, z_k) \in S_k\ (k = \overline{1, n})\ \ |\sigma_{\tau_S} - I| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Пример 16.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS, \tag{16.10}$$

где S – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$.

◀Изобразим поверхность S на рисунке 16.1.

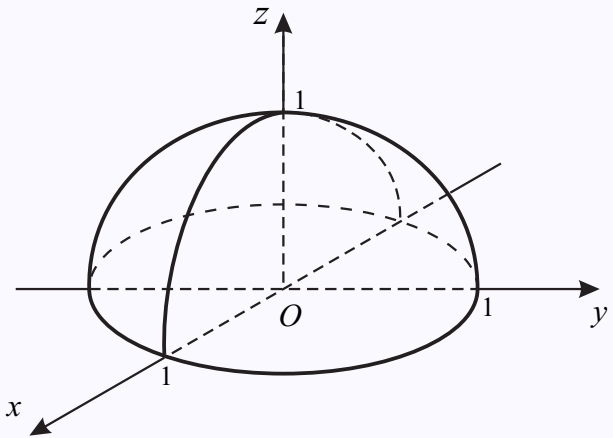


Рисунок 16.1

Вычисление проводим по формуле (16.3). В нашем случае $\varphi(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2x;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y;\ \sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}.$$

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS = \iint\limits_D (1+4x^2+4y^2)dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array} ,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 1+4x^2+4y^2 = 1+4r^2 \right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(1+4r^2\right) rdr = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_0^1 = 3\pi. \blacktriangleright$$

Замечание 16.1. Определение поверхностного интеграла и теорема 16.1 не изменятся и в том случае, когда поверхность S будет **кусочно-гладкой** (составленной из конечного числа гладких поверхностей).

Замечание 16.2. Аналогичные теореме 16.1 утверждения будут справедливы при соответствующих условиях и для поверхностей, определяемых уравнениями $x = x(y,z)$ и $y = y(x,z)$. Тогда формулы для вычисления соответствующих поверхностных интегралов первого рода будут иметь вид:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}dydz, \tag{16.11}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_D f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}dxdz. \tag{16.12}$$

Пример 16.2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S (x+y+z)dS, \tag{16.13}$$

где поверхность S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, удовлетворяющая условиям $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

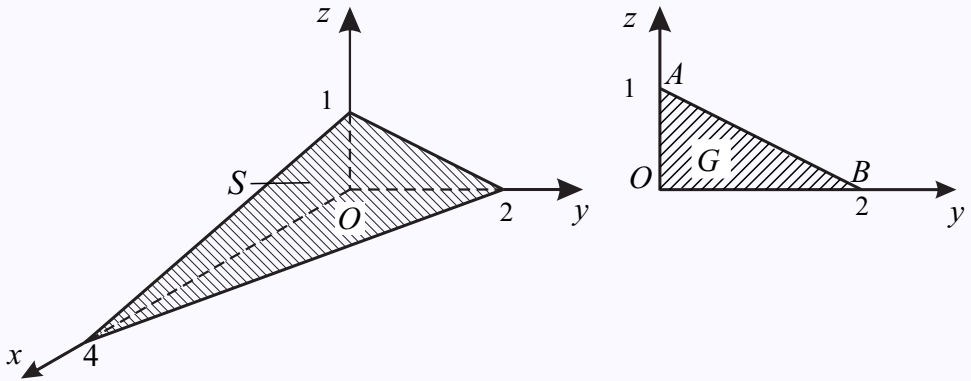


Рисунок 16.2

◀Воспользуемся формулой (16.11). Изобразим на рисунке 16.2 поверхность S и проекцию поверхности S на плоскость yOz (область G).

$$x'_y = -2,\ x'_z = -4,\ \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} = \sqrt{21}.$$

$$I = \iint\limits_S (x + y + z)dS = \iint\limits_G (4 - 2y - 4z + y + z)\sqrt{21}dydz =$$

$$= \iint\limits_G (4 - y - 3z)\sqrt{21}dydz = \sqrt{21}\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{1-\frac{y}{2}} (4 - y - 3z)dz =$$

$$= \sqrt{21}\int\limits_0^2 \left(4z\Big|_0^{1-\frac{y}{2}} - yz\Big|_0^{1-\frac{y}{2}} - \frac{3}{2}z^2\Big|_0^{1-\frac{y}{2}}\right) dy = \sqrt{21}\int\limits_0^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{7\sqrt{21}}{3}. \blacktriangleright$$

Пример 16.3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_S (xy + yz + zx)dS, \tag{16.14}$$

где

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 < 2ax, \ a > 0\right\}.$$

◀Поверхность S есть часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, лежащей выше плоскости $z = 0$ внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$. Изобразим на рисунке 16.3 поверхность S и ее проекцию на плоскость xOy.

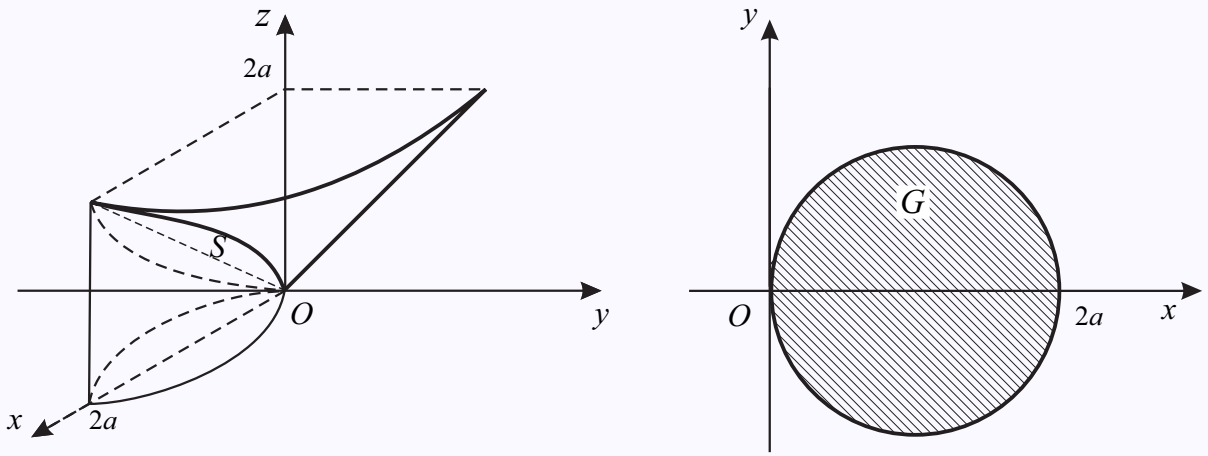


Рисунок 16.3

Уравнение границы проекции имеет вид

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = a^2, \ (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Находим поверхностный интеграл по формуле (16.3), где $\varphi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{2},\ dS=\sqrt{2}dxdy.$$

$$\mathrm{I}=\iint\limits_S (xy+yz+xz)dS=\sqrt{2}\iint\limits_G \left(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy. \qquad (16.15)$$

Двойной интеграл в правой части (16.15) вычисляем, переходя к полярным координатам.

$$\mathrm{I}=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} (r^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi+r^2\sin\varphi+r^2\cos\varphi)rdr=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\sin\varphi+\cos\varphi)\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi=\frac{16a^4\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi=$$

$$=8a^4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi)=\left[\begin{array}{c} u=\sin\varphi \\ u_{\text{н}}=0,\ u_{\text{в}}=1 \end{array}\right]=\frac{64\sqrt{2}a^4}{15}.\ \blacktriangleright$$

16.3 Свойства поверхностного интеграла первого рода

Сформулируем некоторые свойства поверхностных интегралов первого рода (при их доказательстве используются определение поверхностного интеграла первого рода и теорема 16.1).

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ – кусочно-гладкая поверхность.

Теорема 16.2 (достаточное условие интегрируемости). *Если функция $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ непрерывна на поверхности $\overline{S}$, то f интегрируема по S.*

Теорема 16.3 (свойство линейности). *Если функции $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$, $g : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируемы по поверхности S, а α, β – любые действительные числа, то функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по поверхности S и справедлива формула*

$$\iint\limits_S (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dS = \alpha \iint\limits_S f(x,y,z)dS + \beta \iint\limits_S g(x,y,z)dS. \tag{16.16}$$

Теорема 16.4 (свойство аддитивности). *Если функция $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируема по поверхности S, то для любого разбиения τ_S функция f будет интегрируемой по каждой частичной поверхности S_k, причем*

$$\iint\limits_S f\,(x,y,z)\,ds = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_k} f\,(x,y,z)\,ds. \tag{16.17}$$

Если же функция f интегрируема по каждой частичной поверхности S_k, то она будет интегрируемой и по поверхности S, и также будет справедливо равенство (16.17).

Теорема 16.5.

$$\iint\limits_S dS = \mu(S), \tag{16.18}$$

*где $\mu(S)$ – **площадь поверхности** S.*

Теорема 16.6 (об интегрируемости модуля). *Если функция $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируема по поверхности S, то и функция $|f|$ интегрируема по S и справедлива оценка*

$$\left| \iint\limits_S f(x,y,z)dS \right| \leqslant \iint\limits_S |f(x,y,z)|\, dS. \tag{16.19}$$

Теорема 16.7 (свойство монотонности). *Если функции $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$, $g : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируемы по поверхности S и для любых $(x,y,z) \in S$ выполняется неравенство $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$, то справедливо неравенство*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS \leqslant \iint\limits_S g(x,y,z)dS. \tag{16.20}$$

Теорема 16.8 (об интегрируемости произведения функций). *Если функции $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$, $g : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируемы по поверхности S, то и функция $f \cdot g$ будет интегрируемой по поверхности S.*

Теорема 16.9 (теорема о среднем). *Пусть функции $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$, $g : \overline{S} \to \mathbb{R}$ интегрируемы по поверхности S и для любых $(x,y,z) \in S$ $g(x,y,z) \geqslant 0$; $\inf\limits_S f = m$ и $\sup\limits_S f = M$. Тогда справедливо двойное неравенство*

$$m \iint\limits_S g(x,y,z)dS \leqslant \iint\limits_S g(x,y,z)f(x,y,z)dS \leqslant M \iint\limits_S g(x,y,z)dS, \tag{16.21}$$

в частности,

$$m\mu(S) \leqslant \iint\limits_S f(x,y,z)dS \leqslant M\mu(S). \tag{16.22}$$

Если, кроме того, функция f непрерывна на $\overline{S}$, то существует точка $(x_0,y_0,z_0) \in \overline{S}$, что справедливо равенство

$$\iint\limits_S f(x,y,z)g(x,y,z)dS = f(x_0,y_0,z_0) \iint\limits_S g(x,y,z)dS. \tag{16.23}$$

16.4 Приложения поверхностных интегралов первого рода

16.4.1 Масса материальной поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ – некоторая кусочно-гладкая поверхность. Функция $\gamma : \overline{S} \to \mathbb{R}_+$ непрерывна на $\overline{S}$. По поверхности S непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке (x, y, z) поверхности плотностью $\gamma(x, y, z)$.

Используя интегральный метод, можно найти элемент массы поверхности:

$$dm_s = \gamma(x, y, z)dS. \tag{16.24}$$

Тогда масса материальной поверхности S вычисляется по формуле

$$m_s = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)dS. \tag{16.25}$$

Пример 16.4. Найти массу параболической оболочки $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, имеющей плотность $\gamma(x, y, z) = z$.

◀Проекция D параболической поверхности S на плоскость xOy представляет собой круг радиусом 1 с центром в начале координат. Следовательно,

$$m = \iint\limits_S \gamma(x, y, z)dS = \iint\limits_S zdS = \iint\limits_D z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy.$$

Переходя в подынтегральном выражении к полярным координатам, получаем

$$m = \iint\limits_D r^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr = 2\pi\int\limits_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr.$$

Выполним подстановку $1+4r^2 = u^2$. Тогда $8r\,dr = 2u\,du$ или $r\,dr = \frac{u\,du}{4}$. Здесь $u = 1$ при $r = 0$ и $u = \sqrt{5}$ при $r = 1$. Следовательно,

$$m = 2\pi\int\limits_1^{\sqrt{5}} \frac{u^2-1}{4}\sqrt{u^2}\frac{u\,du}{4} = \frac{\pi}{8}\int\limits_1^{\sqrt{5}}(u^2-1)u^2\,du =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{\pi(25\sqrt{5}+1)}{60}\ \text{(ед. массы)}.\ \blacktriangleright$$

16.4.2 Статические моменты материальной поверхности относительно координатных плоскостей

С помощью интегрального метода можно получить формулы для нахождения статических моментов материальной поверхности S относительно координатных плоскостей:

$$M_{xOy} = \iint\limits_S z\gamma\,(x,y,z)\,dS, \tag{16.26}$$

$$M_{yOz} = \iint\limits_S x\gamma\,(x,y,z)\,dS, \tag{16.27}$$

$$M_{xOz} = \iint\limits_S y\gamma\,(x,y,z)\,dS. \tag{16.28}$$

16.4.3 Центры масс материальной поверхности

Пусть точка $(x_c, y_c, z_c) \in \mathbb{R}^3$ – центр тяжести материальной поверхности S, масса которой равна m_S. Тогда

$$x_c = \frac{\iint\limits_S x\gamma(x,y,z)\,dS}{m_S}, \tag{16.29}$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_S y\gamma(x,y,z)\,dS}{m_S}, \tag{16.30}$$

$$z_c = \frac{\iint\limits_S z\gamma(x,y,z)\,dS}{m_S}. \tag{16.31}$$

Пример 16.5. Найти координаты центра масс части однородной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

◀Изобразим поверхность на рисунке 16.4.

Из соображений симметрии и однородности поверхности S следует, что координаты искомого центра масс (точки (x_c, y_c, z_c)) равны между собой, то есть $x_c = y_c = z_c$. Находим, например,

$$z_c = \frac{\iint\limits_S z\,dS}{\iint\limits_S dS}. \tag{16.32}$$

Видно, что масса поверхности S численно равна площади этой поверхности, то есть

$$m_S = \iint\limits_S ds = \frac{\pi R^2}{2}. \tag{16.33}$$

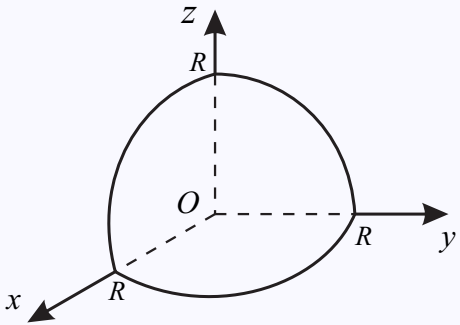


Рисунок 16.4

Находим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S z dS = \left[z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},\ z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \right.$$

$$\left. \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right] = R \iint\limits_G dxdy = \frac{\pi R^3}{4}.$$

Тогда

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^3}{4}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{R}{2}. \blacktriangleright$$

16.4.4 Моменты инерции материальной поверхности относительно координатных плоскостей и осей

Применяя интегральный метод, получаем следующие искомые формулы для вычисления моментов инерции материальной поверхности относительно координатных плоскостей и осей:

$$I_{yOz} = \iint\limits_S x^2 \gamma\,(x, y, z)\, dS, \tag{16.34}$$

$$I_{xOz} = \iint\limits_S y^2 \gamma\,(x, y, z)\, dS, \tag{16.35}$$

$$I_{xOy} = \iint\limits_S z^2 \gamma\,(x, y, z)\, dS, \tag{16.36}$$

$$I_{Ox} = \iint\limits_S \left(y^2 + z^2\right) \gamma\,(x, y, z)\, dS, \tag{16.37}$$

$$I_{Oy} = \iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) \gamma\,(x, y, z)\, dS, \tag{16.38}$$

$$I_{Oz} = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) \gamma\,(x, y, z)\, dS. \tag{16.39}$$

Пример 16.6. Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной поверхности $x + y + z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

◀При условии однородности материальной поверхности и из соображений симметрии (рисунок 16.5) заключаем, что $I_{xOy} = I_{xOz} = I_{yOz}$.

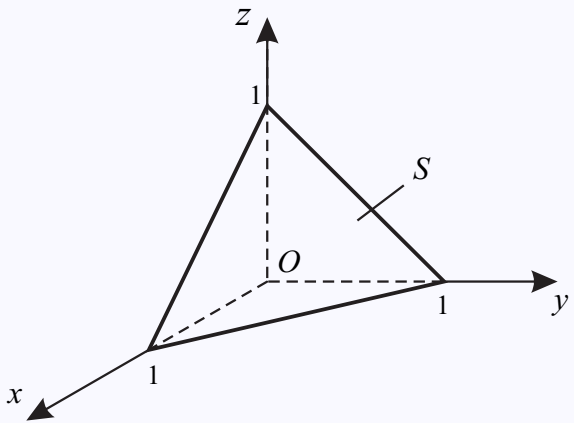


Рисунок 16.5

$$I_{xOy} = \iint\limits_S z^2 dS = \left[z = 1 - x - y,\ z'_x = z'_y = -1,\ \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{3}\right] =$$

$$= \iint\limits_G (1 - x - y)^2 \sqrt{3} dx dy,$$

где

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}.$$

Тогда

$$I_{xOy} = -\sqrt{3}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\, d\,(1-x-y) = -\sqrt{3}\int\limits_0^1 \frac{(1-x-y)^3}{3}\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^1 (1-x)^3\, d\,(1-x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие поверхностного интеграла первого рода.
2. Сформулируйте теорему о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода.
3. Сформулируйте свойства поверхностного интеграла первого рода.
4. Приведите примеры приложений поверхностного интеграла первого рода.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Поверхностные интегралы первого рода и их приложения

Задание 1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S xyzds$, где S – фрагмент конической поверхности $\frac{1}{4}z^2 = x^2 + y^2$, заключенный между плоскостями $z = 0$, $z = 2$.

◀Изобразим поверхность S на рисунке 16.6.

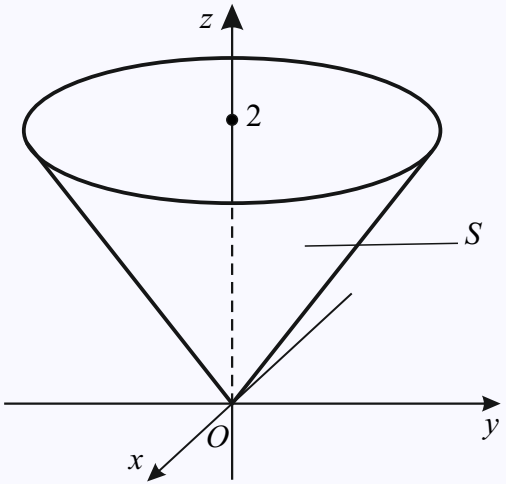


Рисунок 16.6

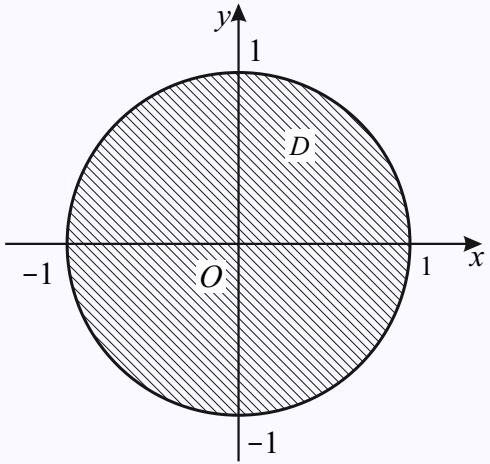


Рисунок 16.7

Рассмотрим проекцию поверхности S на плоскость xOy (рисунок 16.7) и воспользуемся формулой (16.3). Указанную в условии задачи поверхность задает функция $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\iint\limits_S xyzds = \iint\limits_D xy \cdot 2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{5}dxdy = 2\sqrt{5}\iint\limits_D xy\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \quad |I| = r\right] =$$

$$= 2\sqrt{5}\iint\limits_D r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r \cdot rdrd\varphi = 2\sqrt{5}\iint\limits_D r^4\frac{1}{2}\sin 2\varphi drd\varphi = \sqrt{5}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^1 r^4dr = 0. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S (6x+4y+3z)ds$, где S – часть плоскости $x+2y+3z=6$, расположенная в первом октанте.

◀Поверхность интегрирования S есть треугольник ABC (рисунок 16.8).

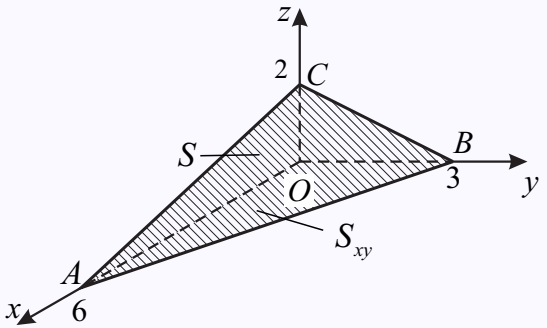


Рисунок 16.8

Используя уравнение поверхности, преобразуем данный поверхностный интеграл в двойной.

$$z = \frac{1}{3}(6-x-2y),\ ds = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}dxdy.$$

$$\iint\limits_S (6x+4y+3z)ds = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint\limits_{S_{xy}} (5x+2y+6)dxdy = \frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{6-2y} (5x+2y+6)dx = 54\sqrt{14},$$

где S_{xy} – треугольник ABO, являющийся проекцией поверхности S на плоскость xOy ►.

Задание 3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $I = \iint\limits_S \left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right) ds$, где S – поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=h$.

◄В данном случае всю поверхность S нельзя задать как график функциональной зависимости одной из координат от двух других.

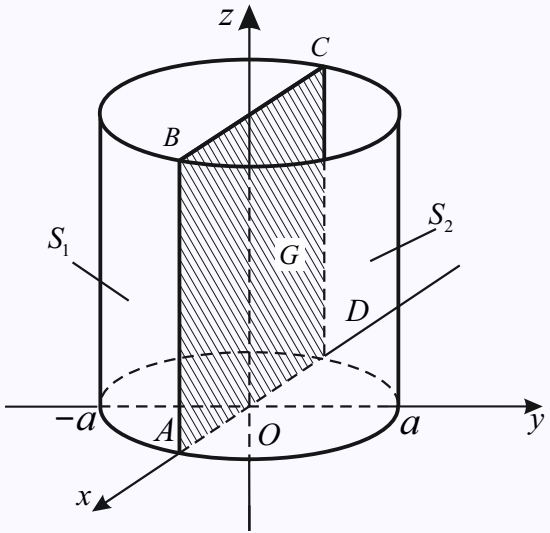


Рисунок 16.9

Части цилиндрической поверхности, расположенные по разные стороны от вертикальных координатных плоскостей (рисунок 16.9), имеют различные явные уравнения: часть S_1, расположенная слева от плоскости xOz, имеет уравнение $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, а часть S_2, расположенная справа от этой плоскости, имеет уравнение $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Поэтому вычисляем данный интеграл I по поверхности S как сумму интегралов I_1 и I_2 по составляющим ее частям S_1 и S_2.

Преобразуя поверхностные интегралы I_1 и I_2 в двойные интегралы, получим:

$$ds = \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1}dxdz = \frac{adxdz}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$I_1 = a \iint\limits_{(S_1)_{xz}} \frac{zdxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \; I_2 = a \iint\limits_{(S_2)_{xz}} \left(2 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dxdz,$$

где $(S_1)_{xz}$ – проекция поверхности S_1 на плоскость xOz, а $(S_2)_{xz}$ – проекция поверхности S_2 на плоскость xOz.

Следовательно, $I = I_1 + I_2 = 2a \iint\limits_G \left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dxdz$, так как область G – прямоугольник $ABCD$ – есть общая проекция поверхностей S_1 и S_2 на плоскость xOz (рисунок 16.9).

Вычисляем полученный двойной интеграл:

$$I = 2a \int\limits_0^h dz \int\limits_{-a}^a \left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = 2a \int\limits_0^h \left(x + z \arcsin \frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a}\right) dz =$$

$$= 2a \int\limits_0^h (2a + \pi z)dz = 2a \left(2az + \frac{\pi z^2}{2}\right)\Big|_0^h = ah(4a + \pi h). \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти площадь части поверхности конуса $z^2 = 2xy$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x = 2$, $y = 4$.

$$\blacktriangleleft\ S = \iint\limits_S ds = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{S_{xy}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dxdy,$$

где S_{xy} – проекция S на плоскость xOy – прямоугольник $OABC$ (рисунок 16.10).

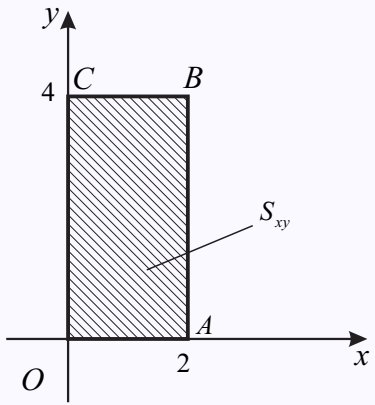


Рисунок 16.10

Вычисляя двойной интеграл, получим:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^4 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^2 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_0^4 = 16.\ (\text{ед. площади}).\ \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$.

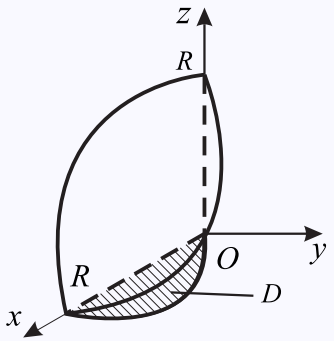


Рисунок 16.11

◀Данная поверхность симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть S (рисунок 16.11), для которой аппликата $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Значит, искомая площадь

$$S = 4 \iint\limits_S ds = 4 \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = 4R \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где D – полукруг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = Rx$ и осью Ox.

Переходя к полярным координатам ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = R\cos\varphi$ – полярное уравнение окружности $x^2 + y^2 = Rx$), имеем:

$$S = 4R \iint\limits_D \frac{r\,d\varphi dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -2R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \left(R^2 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - r^2) = 2R^2(\pi - 2) \text{ (ед. площади)}. \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=Rx$, расположенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

◀Данная поверхность симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть S, для которой $y=\sqrt{Rx-x^2}$ (рисунок 16.11). Поэтому, преобразуя поверхностный интеграл $\iint\limits_S ds$ в двойной интеграл с переменными интегрирования x и z, получим:

$$S=4\iint\limits_D \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz=2R\iint\limits_D \frac{dxdz}{\sqrt{Rx-x^2}},$$

где D – плоская область, ограниченная осями Ox и Oz и параболой, уравнение которой $z^2=R^2-Rx$ получается путем исключения y из данных уравнений (эта парабола является проекцией на плоскость xOz линии пересечения цилиндра и сферы).

$$S=2R\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{Rx-x^2}}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-Rx}} dz=2R\sqrt{R}\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}}=4R\sqrt{Rx}\Big|_0^R=4R^2 \text{ (ед. площади). ▶}$$

Задание 7. Найти центр тяжести части сферической оболочки

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

расположенной в первом октанте и имеющей постоянную плотность γ_0.

◀Очевидно, масса данной части сферы (рисунок 16.12) равна

$$m=\frac{1}{8}\iint\limits_S \gamma_0 ds=\frac{\gamma_0}{8}\iint\limits_S ds=\frac{\rho_0}{8}\cdot 4\pi a^2=\frac{\gamma_0\pi a^2}{2}.$$

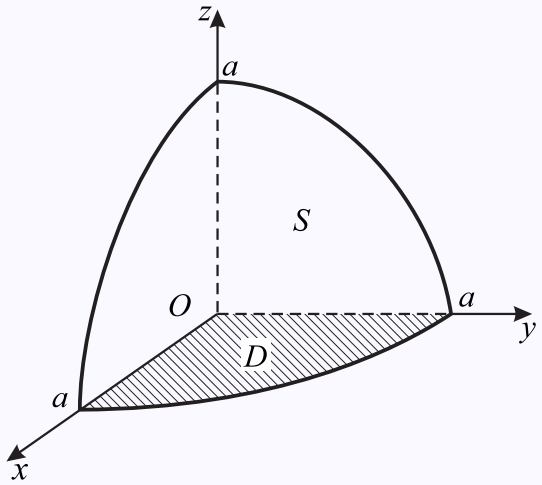


Рисунок 16.12

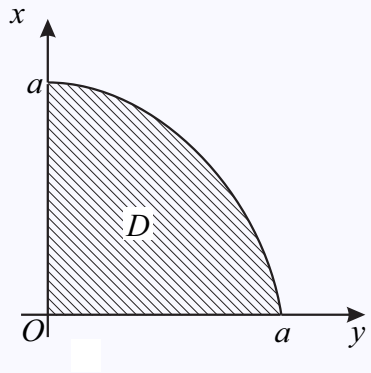


Рисунок 16.13

$$M_{xOy} = \gamma_0 \iint\limits_S z dS = \gamma_0 \iint\limits_D z\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy,$$

где проекция D поверхности на плоскость xOy представляет собой часть круга, лежащего в первом квадранте (рисунок 16.13).

Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

то

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Отсюда находим выражение для момента M_{xOy}:

$$M_{xOy}=\gamma_0 a\iint\limits_{D(x,y)}\frac{z\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Далее удобнее преобразовать интеграл в полярные координаты:

$$M_{xOy}=\gamma_0 a\iint\limits_{D(r,\varphi)}\frac{\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}=\gamma_0 a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a r\,dr=\frac{\gamma_0\pi a^3}{4}.$$

Отсюда находим координату z_c центра масс:

$$z_c=\frac{M_{xOy}}{m}=\frac{\frac{\gamma_0\pi a^3}{4}}{\frac{\gamma_0\pi a^2}{2}}=\frac{a}{2}.$$

В силу симметрии другие координаты имеют то же самое значение. Итак, координаты центра масс оболочки имеют вид

$$(x_c,y_c,z_c)=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right).\ \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти центр тяжести однородной поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 10x$, отсеченной плоскостью $x = 10$.

◀Однородная поверхность S симметрична относительно оси абсцисс (рисунок 16.14). Поэтому

$$y_c = z_c = 0.$$

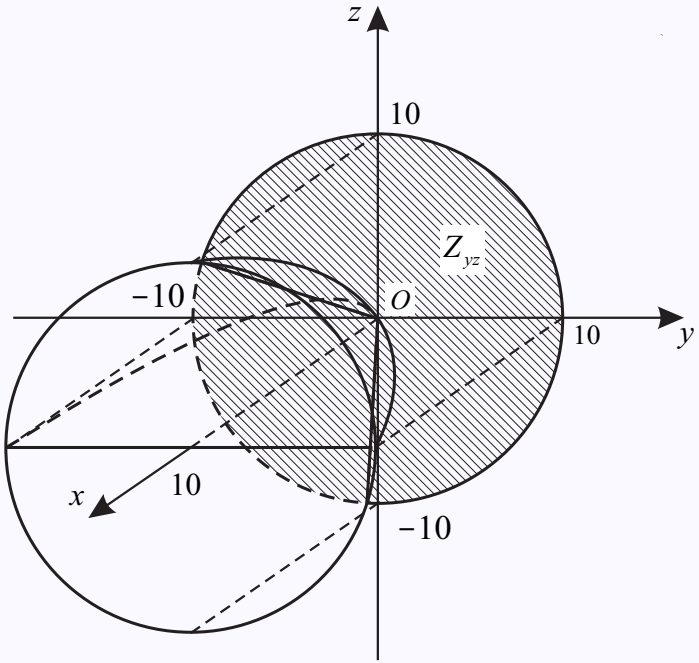


Рисунок 16.14

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
489
Приложение
Закрыть

Чтобы найти абсциссу центра тяжести, вычислим статический момент M_{yOz} и массу m данной поверхности.

$$M_{yOz} = \iint\limits_S x ds = \iint\limits_{S_{yz}} x\sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1}\,dydz = \frac{1}{50}\iint\limits_{S_{yz}} (y^2+z^2)\sqrt{25+y^2+z^2}\,dydz =$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = r\cos\varphi, \\ z = r\sin\varphi \end{array},\ |I| = r\right] =$$

$$= \frac{1}{50}\iint\limits_{S_{yz}} r^2\sqrt{25+r^2}\,rd\varphi dr = \frac{1}{50}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{10} r^2\sqrt{25+r^2}\,rdr = \frac{50}{3}\pi(1+25\sqrt{5}),$$

где S_{yz} – проекция поверхности S на плоскость yOz (круг $y^2+z^2 \leqslant 100$), а после перехода к полярным координатам внутренний интеграл вычисляется с помощью подстановки $\sqrt{25+r^2} = t$.

$$m = \iint\limits_S ds = \frac{1}{5}\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{25+y^2+z^2}\,dydz = \frac{1}{5}\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{25+r^2}\,rd\varphi dr =$$

$$= \frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{10} (25+r^2)^{\frac{1}{2}} d(25+r^2) = \frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{3}(25+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10} d\varphi = \frac{50}{3}\pi(5\sqrt{5}-1).$$

Тогда

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{25\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}-1}. \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить момент инерции однородной сферической оболочки $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geqslant 0)$ с плотностью γ_0 относительно оси Oz.

◀Момент инерции I_{Oz} находим по формуле $I_{Oz}=\gamma_0\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где поверхность S – это полусфера $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geqslant 0)$.

Верхняя часть полусферы описывается функцией $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, поэтому

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Тогда поверхностный интеграл выражается через двойной интеграл в виде

$$I_{Oz}=\gamma_0\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS=\gamma_0\iint\limits_D \frac{(x^2+y^2)\,dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

где область интегрирования D представляет собой круг $x^2+y^2\leqslant 1$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I_{Oz}=\gamma_0\iint\limits_S \frac{r^2 r dr d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}=\gamma_0\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \frac{r^3 dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Для вычисления последнего интеграла используем замену $1-r^2=t$. В результате имеем:

$$I_{Oz}=\gamma_0\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \frac{r^3 dr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\gamma_0\int\limits_0^1 \frac{r^3 dr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\gamma_0\int\limits_0^1 \frac{r^2 r dr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\gamma_0\int\limits_1^0 \frac{(1-t)\left(-\frac{dt}{2}\right)}{\sqrt{t}}=$$

$$=\pi\gamma_0\int\limits_1^0 \frac{(t-1)\,dt}{\sqrt{t}}=\pi\gamma_0\left(\int\limits_1^0 \sqrt{t}dt-\int\limits_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}\right)=\pi\gamma_0\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^0=\pi\gamma_0\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}-2\sqrt{t}\right)\Bigg|_1^0=\frac{4}{3}\pi\gamma_0.\ ▶$$

Задание 10. Найти силу тяготения между полусферой с постоянной плотностью γ_0 радиуса r с центром в начале координат и точечной массой m, расположенной в начале координат.

◀Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ полусферы, которая принадлежит малому участку поверхности dS (рисунок 16.15).

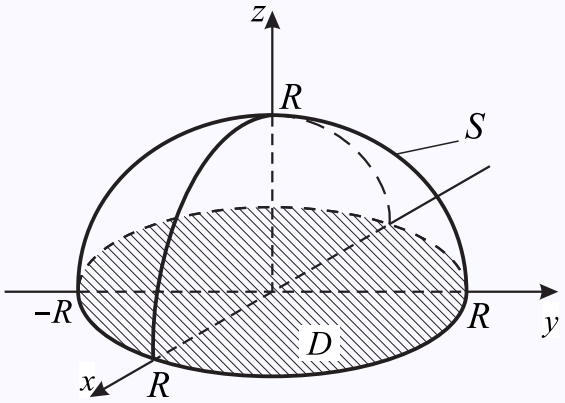


Рисунок 16.15

Силу притяжения $dF(M)$ между элементом поверхности dS и массой m можно записать в виде $dF(M) = \frac{G\gamma_0 m dS}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, где G – гравитационная постоянная.

Таким образом, $dF(M) = \frac{G\gamma_0 m ds}{r^3}(x, y, z)$.

После интегрирования по поверхности полусферы получаем следующие выражения для компонентов силы притяжения:

$$F_x = \frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S x dS,\ F_y = \frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S y ds,\ F_z = \frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S z ds.$$

В сферических координатах уравнение полусферы записывается в виде

$$r(\varphi,\theta)=(r\cos\varphi\cdot\sin\theta, r\sin\varphi\cdot\sin\theta, r\cos\theta)\,,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Известно, что элемент площади для сферы равен $dS=r^2\sin\theta d\varphi d\theta$. Тогда компоненты силы притяжения будут равны

$$F_x=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S xdS=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_{D(\varphi,\theta)} r\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta=G\gamma_0 m\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=0.$$

$$F_y=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S ydS=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_{D(\varphi,\theta)} r\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta=G\gamma_0 m\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=0.$$

$$F_z=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_S zdS=\frac{G\gamma_0 m}{r^3}\iint\limits_{D(\varphi,\theta)} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta d\varphi d\theta=$$

$$=G\gamma_0 m\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta d\theta=\pi G\gamma_0 m.$$

Заметим, что результат $F_x=F_y=0$ очевиден вследствие симметрии и однородности поверхности. Поэтому результирующая сила

$$F_z=F=\pi G\gamma_0 m$$

направлена вдоль оси Oz.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить поверхностные интегралы:

1.1 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)ds$, где S – поверхность, полученная вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ относительно полярной оси (декартова и полярная системы координат совмещены);

1.2 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)ds$, $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 < 2ax\right\}$;

1.3 $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, где S – граница тела $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\right\}$;

1.4 $\iint\limits_S (x+y)ds$, где S – лежащая в первом октанте часть поверхности, полученная вращением арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox;

1.5 $\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{2-y^2-z^2}}$, где S есть поверхность, полученная вращением линии

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$$

относительно оси Ox;

1.6 $\iint\limits_S yzds$, где S – удовлетворяющая условию $z > y > 0$ часть поверхности, полученной вращением кривой $y = \cos x$, $|x| \leqslant \pi/2$, относительно оси Ox;

1.7 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z-\frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2-x^2-y^2$, $z \geqslant 0$;

1.8 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z)ds$, где S – верхняя полусфера $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$;

1.9 $\iint\limits_S (3x^2+5y^2+3z-2)ds$, где S – часть конуса $y = \sqrt{x^2+z^2}$, лежащая между плоскостями $y = 0$, $y = b$;

1.10 $\iint\limits_S \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}}ds$, где S – часть параболоида $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$, $x\geqslant 0$, лежащая внутри цилиндра

$$\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)^2=a^2\left(\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}\right);$$

1.11 $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}ds$, где S – часть параболоида $ax=yz$, лежащая внутри цилиндра

$$(y^2+z^2)^2=2b^2yz;$$

1.12 $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть конуса $z^2=2xy$, $z\geqslant 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$;

1.13 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)ds$, где S – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\geqslant 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$;

1.14 $\iint\limits_S (x+y+z)ds$, где S – часть конуса $x^2=y^2+z^2$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$;

1.15 $\iint\limits_S xzds$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=2ax$, лежащая между конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и параболоидом $z=\frac{x^2+y^2}{2a}$;

1.16 $\iint\limits_S (x-y^2+z^3)ds$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $x\geqslant 0$, лежащая между плоскостями $x+z=0$, $x-z=0$;

1.17 $\iint\limits_S \sqrt{x}ds$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=2ax$, лежащая вне гиперболоида $x^2+y^2-z^2=a^2$;

1.18 $\iint\limits_S (x-y)ds$, где S – часть цилиндра $x^2+y^2=a^2$, лежащая внутри цилиндра $z^2=a(a-x)$;

1.19 $\iint\limits_S |xy|\,ds$, где S – поверхность тела, образованного пересечением цилиндров

$$x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2$$

.

2. Найти массу части однородного параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, плотности γ.

3. Найти массу части конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до вершины.

4. Найти статический момент части цилиндра $x^2 + y^2 = 2Ry$, лежащей между плоскостями $z = 0$ и $z = c$, относительно плоскости xOz, если плотность $\gamma = y + z$.

5. Найти момент инерции однородной поверхности $x^2+y^2 = 2ax$, $x^2 \geqslant y^2+z^2$ плотности γ относительно оси Oz.

6. Найти момент инерции однородной поверхности плотности γ, полученной при вращении одной арки циклоиды $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = (1 - \cos\varphi)$ вокруг оси Ox, относительно оси Oz.

7. Найти момент инерции части однородного цилиндра $x^2 + y^2 = ax$ плотности γ, лежащей внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, относительно плоскости xOz.

8. Найти момент инерции части однородной верхней полусферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$ плотности γ, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, относительно плоскости yOz.

9. Найти моменты инерции относительно плоскости xOy части однородного конуса $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\alpha$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, массой M.

10. Найти момент инерции однородного параболоида $x^2+y^2=2cz$ $(0 \leqslant z \leqslant c)$ плотности γ относительно оси Oz.

11. Найти момент инерции однородного сегмента сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geqslant H$ $(H<R)$, плотности γ относительно оси Oz.

12. Найти координаты центра масс однородной полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geqslant 0$.

13. Найти координаты центра масс верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geqslant 0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна расстоянию от этой точки до оси Oz.

14. Найти координаты центра масс однородной поверхности, полученной от вращения кривой

$$y=2px,\ 0 \leqslant x \leqslant p,$$

относительно оси Ox.

15. Найти координаты центра масс части однородной поверхности $x^2+y^2=2cz$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

16. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 17
Поверхностные интегралы второго рода

17.1 Ориентация поверхности

Установим важное для дальнейшего изложения понятие стороны поверхности.

Понятие стороны поверхности связано с понятием направления нормали к поверхности. У гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в каждой ее точке a есть два единичных нормальных вектора $n(a)$ и $-n(a)$. Поэтому кажется естественным, что у каждой поверхности должно быть две стороны. Однако это не так. В отличие, например, от плоскости, или сферы, **лист Мебиуса** не имеет двух сторон. Модель этой поверхности можно получить, если прямоугольную полоску бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с C, а B с D (рисунок 17.1).

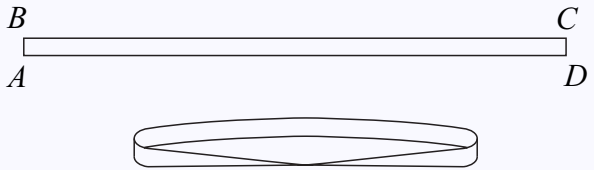


Рисунок 17.1 Лист мебиуса

Ориентировать поверхность означает возможность зафиксировать сторону поверхности.

Определение 17.1. *Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется **ориентируемой**, если существует непрерывное отображение $a \mapsto n(a)$, где $n(a)$ – единичный нормальный вектор к S в точке a.*

Если выбрано такое отображение, то говорят, что на поверхности задана ориентация (выбрана сторона поверхности).

Отображение $a \mapsto n(a)$ называют обычно ориентирующим **полем нормалей**. Будем отождествлять непрерывное поле нормалей и ориентацию поверхности.

Если $a \mapsto n(a)$ – непрерывное поле нормалей, то $a \mapsto -n(a)$ также является непрерывным полем нормалей.

Можно показать, что *ориентируемая линейно связная поверхность имеет только две ориентации*. Поэтому ориентируемую поверхность называют иногда **двусторонней**.

Если гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ есть график функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, то согласно (3.15) ориентирующее поле нормалей можно задать с помощью нормального вектора

$$n(a) = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right), \tag{17.1}$$

где

$$p = -\frac{\partial z}{\partial x}(a), \ q = -\frac{\partial z}{\partial y}(a), \ a \in S.$$

В этом случае будем говорить, что выбрана **верхняя сторона поверхности** (сторона поверхности, для которой косинус угла между вектором $n(a)$ и осью Oz больше нуля). Если ориентирующее поле нормали задать с помощью вектора $-n(a)$, то будем говорить, что выбрана **нижняя сторона поверхности** (сторона поверхности, для которой косинус угла между вектором $n(a)$ и осью Oz меньше нуля).

Отметим, что в (17.1)

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\alpha, \ \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\beta, \ \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\gamma \tag{17.2}$$

есть направляющие косинусы нормали к поверхности в точке $a \in S$.

Часто встречается способ задания поверхности с помощью неявного уравнения.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – область, функция $F : D \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0) \in D$ непрерывные частные производные первого порядка, причем $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, а $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда к функции F можно применить теорему (6.1), согласно которой существует окрестность $U_{(x_0,y_0)}$, на которой

определена функция $z = \varphi(x, y)$, дифференцируемая на $U_{(x_0,y_0)}$. Тем самым уравнение $F(x, y, z) = 0$ локально определяет гладкую поверхность – график функции φ.

Пусть гладкая поверхность S задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, где функция $F : D \to \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные на области $D \subset \mathbb{R}^3$, причем для любой точки $(x, y, z) \in D$ $\operatorname{grad} F(x, y, z) \neq \neq (0, 0, 0)$. Для любой точки $(x_0, y_0, z_0) \in D$ вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$$

называется **нормальным** вектором к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0). Равенство

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

задает уравнение **касательной плоскости** к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0).

Ориентирующее поле нормалей к поверхности S задается в этом случае с помощью вектора $n = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$ или вектора $n = -\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}$.

17.2 Понятие поверхностного интеграла второго рода

Пусть гладкая ориентируемая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ является графиком функции $z = \varphi(x, y)$, определенной на ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$, граница которой есть множество площади нуль. Фиксируем одну из двух сторон поверхности (выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности).

Рассмотрим любое разбиение τ поверхности S на квадрируемые части S_k (**частичные поверхности**) с положительными площадями ΔS_k $(k = \overline{1, n})$ с помощью системы кусочно-гладких кривых на поверхности. Разбиению τ соответствует разбиение множества D на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных множеств D_k, $k = \overline{1, n}$ (частичные множества D_k – проекции частичных поверхностей S_k на плоскость xOy).

Обозначим через ΔD_k площадь D_k, взятую со знаком плюс в случае выбора верхней стороны поверхности и со знаком минус в случае выбора нижней стороны поверхности.

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$. На каждой частичной поверхности произвольно выбираем точку (x_k, y_k, z_k) и составляем сумму

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta D_k, \tag{17.3}$$

которую будем называть **интегральной суммой** функции f по выбранной стороне поверхности S, соответствующей разбиению τ.

Пусть $\lambda_\tau = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \operatorname{diam}\{S_k\}$ – мелкость разбиения τ.

Определение 17.2. *Число $I \in \mathbb{R}$ называют **пределом интегральной суммы** σ_τ функции f по выбранной стороне поверхности S, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau\ \lambda_\tau < \delta\ \ \forall (x_k, y_k, z_k) \in S_k\ (k = \overline{1,n})\quad |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Определение 17.3. *Если для функции $f : S \to \mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$, то его называют **поверхностным интегралом второго рода** функции f по выбранной стороне поверхности S и обозначают $\iint\limits_S f(x, y, z)dxdy$, а функцию f называют **интегрируемой** по поверхности S.*

Замечание 17.1. В обозначении поверхностного интеграла второго рода не содержится указания на то, какая именно сторона поверхности выбрана, поэтому такое указание приходится каждый раз оговаривать отдельно. Из самого определения поверхностного интеграла второго рода следует, что **при изменении выбора стороны поверхности интеграл меняет знак на противоположный**.

Замечание 17.2. Если поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, направляющая которой на плоскости xOy есть кривая площади нуль, то проекция каждой частичной поверхности будет иметь нулевую площадь, а поверхностный интеграл $\iint\limits_S f(x, y, z)dxdy$ по любой стороне такой поверхности будет равен нулю.

Кроме того, если гладкая ориентируемая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ не удовлетворяет рассмотренным выше условиям, но ее можно разбить на частичные поверхности, удовлетворяющие указанным условиям, то поверхностный интеграл второго рода определяется как сумма поверхностных интегралов по таким частичным поверхностям.

Изменяя роли координатных осей (соответственно чему изменяются и наши требования к поверхности S), при определении поверхностного интеграла второго рода можно рассматривать проекции частичных поверхностей на плоскость yOz или xOz. Так получаются другие два поверхностных интеграла второго рода:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dydz \text{ или } \iint\limits_S f(x,y,z)dxdz.$$

В приложениях чаще всего встречается сумма интегралов всех этих видов:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy, \tag{17.4}$$

где P, Q, R – функции, определенные в точках поверхности S. Поверхностный интеграл (17.4) называют **полным поверхностным интегралом второго рода**.

Еще раз подчеркнем, что *во всех случаях поверхность S предполагается двусторонней, и интеграл определяется по конкретной стороне поверхности.*

17.3 Существование и вычисление поверхностного интеграла второго рода

Пусть $G, D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные области, $\overline{D} \subset G$, причем граница области D есть множество площади нуль.

Гладкая ориентируемая поверхность S есть график функции $z = z(x,y)$ при $(x,y) \in \overline{D}$, причем функция z имеет непрерывные частные производные первого порядка на G.

Теорема 17.1. *Если функция $f : \overline{S} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\overline{S}$, то f будет интегрируемой по поверхности S, и для поверхностного интеграла второго рода по верхней стороне поверхности S справедлива формула*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))dxdy. \tag{17.5}$$

◀Так как выбрана верхняя сторона поверхности S, то в интегральной сумме (17.3) все площади ΔD_k $(k = \overline{1,n})$ берутся со знаком плюс. Тогда, с учетом (17.1),

$$\Delta D_k = \Delta S_k \cdot \cos\gamma_k = \frac{\Delta S_k}{\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}},$$

где ΔD_k – площадь D_k, ΔS_k – площадь S_k, γ_k – угол между вектором нормали к поверхности в точке $(x_k, y_k, z_k) \in S_k$ и осью Oz,

$$p_k = -\frac{\partial z}{\partial x}(x_k,y_k,z_k),\ \ q_k = -\frac{\partial z}{\partial y}(x_k,y_k,z_k)\ \ (k = \overline{1,n}),$$

и интегральная сумма (17.3) примет вид

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\frac{\Delta S_k}{\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}}.$$

Переходя к пределу при $\lambda_\tau \to 0$, получим, что

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dS, \tag{17.6}$$

где p, q определяются (17.1).

Правая часть (17.6) есть поверхностный интеграл первого рода. По теореме 16.1

$$\iint\limits_S \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}dS = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))dxdy. \blacktriangleright$$

Замечание 17.3. Равенство (17.6) устанавливает связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Если учесть (17.2), то (17.6) можно представить в виде

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S f(x,y,z)\cos\alpha dS, \tag{17.7}$$

где α – угол между нормалью к поверхности S и осью Oz.

Замечание 17.4. Изменяя роли координатных осей, получим следующие формулы (для поверхностных интегралов по верхней стороны поверхности):

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz = \iint\limits_G f(x,y(x,z),z)dxdz, \tag{17.8}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dydz = \iint\limits_G f(x(y,z),y,z)dydz. \tag{17.9}$$

При выборе нижней стороны поверхности в правых частях (17.5), (17.8) и (17.9) перед интегралами появится знак минус.

Формулы, аналогичные (17.7), можно получить и для интегралов (17.8) и (17.9). Складывая такие формулы, записанные для функций $P, Q, R \in C\left(\overline{S}\right)$, придем к общей формуле, устанавливающей связь между поверхностными интегралами первого и второго рода:

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS. \tag{17.10}$$

Отметим, что в правой части (17.10) фигурируют направляющие косинусы нормали к той стороне поверхности, по которой находится интеграл в левой части.

Пример 17.1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (ax^2 + by^2 + bz^2)dydz$, где S – нижняя сторона части полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, вырезанная конусом $x = \sqrt{y^2 + z^2}$.

◀Изобразим поверхность на рисунке 17.2.

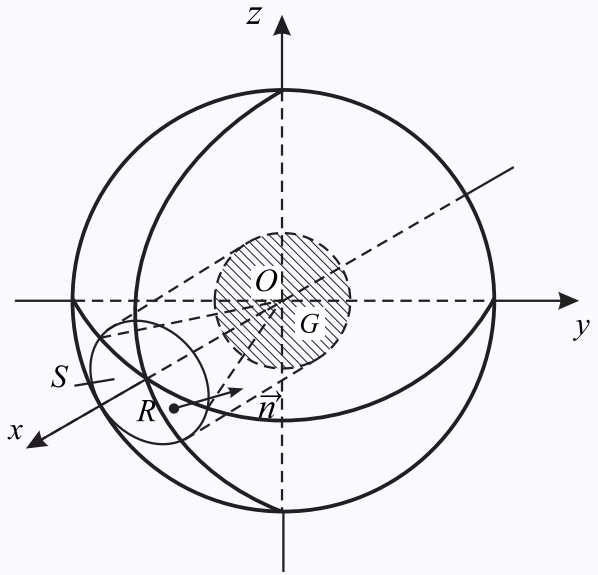


Рисунок 17.2

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \\ x = \sqrt{y^2 + z^2}, \end{cases}$$

находим границу проекции поверхности S на плоскость yOz. Это будет окружность $y^2 + z^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Так как выбрана нижняя сторона поверхности, то

$$\iint\limits_S (ax^2 + by^2 + bz^2)dydz = -\iint\limits_G (a(R^2 - y^2 - z^2) + by^2 + bz^2)dydz = I.$$

В двойном интеграле I переходим к полярным координатам

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} r(aR^2 + (b-a)r^2)dr = \frac{\pi R^4}{8}(3a + b). \blacktriangleright$$

17.4 Формула Стокса

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей – контуром ∂D. Гладкая ориентируемая поверхность S есть график функции $z = z(x, y)$ при $(x, y) \in \overline{D}$, причем ориентирующее поле нормалей определяется (17.1). Образ $z(\partial D)$ будем называть **краем поверхности** и обозначать ϱS. Очевидно, что ϱS является кусочно гладким контуром.

Ориентация (выбор стороны) поверхности S определяет направление обхода контуров на поверхности по тому же правилу, которое мы использовали на плоскости в лекции 14 (п. 14.5): при обходе контура с положительной ориентацией часть поверхности, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»).

Мы будем считать ориентации поверхности S и ее края ϱS согласованными в том смысле, что если контур ∂D ориентирован положительно, то и контур ϱS ориентирован положительно.

Все обозначения и приведенные выше условия этого пункта будут использоваться сейчас при выводе так называемой формулы Стокса, которая установит связь между поверхностным интегралом по гладкой ориентируемой поверхности и криволинейным интегралом по краю поверхности.

Пусть $G, D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченные области, $\overline{D} \subset G$, причем граница $L = \partial D$ области D есть кусочно-гладкий контур. Гладкая ориентируемая поверхность S есть график функции $z = z(x, y)$ при $(x, y) \in \overline{D}$, причем функция z и ее частные производные первого порядка непрерывны на G.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – область, $S \subset V$ – гладкая ориентируемая поверхность с краем $\varrho S = \Gamma$, причем ориентирующее поле нормалей определяется (17.1).

Теорема 17.2. *Если функция $P : V \to \mathbb{R}$ и ее частные производные первого порядка $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial P}{\partial z}$ непрерывны на V, то справедлива формула*

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx = \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy. \tag{17.11}$$

◀Вначале криволинейный интеграл второго рода по положительно ориентированному контуру Γ заменим криволинейным интегралом второго рода по положительно ориентированному контуру L, затем полученный криволинейный интеграл по контуру L заменим двойным интегралом по области D, применяя формулу Грина. Далее двойной интеграл заменим поверхностным интегралом по поверхности S.

$$I = \oint\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx = \oint\limits_{L} P(x, y, z(x, y))dx. \tag{17.12}$$

К интегралу в правой части равенства (17.12) применим формулу Грина:

$$\oint\limits_{L} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy. \tag{17.13}$$

С учетом того, что ориентирующее поле нормалей определяется (17.1), с учетом (17.1) и (17.2) получаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Тогда

$$I = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{1}{\cos\gamma}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}dxdy. \qquad (17.14)$$

Интеграл (17.14) заменяем поверхностным интегралом первого рода, учитывая равенство (16.3):

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \qquad (17.15)$$

Теперь, учитывая равенство (17.10), окончательно получаем: $I = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}dxdz - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. ▶

Путем круговой перестановки переменных x, y, z можно получить еще два равенства, аналогичных (17.11):

$$\oint\limits_\Gamma Q(x,y,z)dy = \iint\limits_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz, \qquad (17.16)$$

$$\oint\limits_\Gamma R(x,y,z)dz = \iint\limits_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dxdz, \qquad (17.17)$$

где функции Q и R удовлетворяют тем же условиям, что и функция P.

Складывая равенства (17.11), (17.16) и (17.17), получим **формулу Стокса**:

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (17.18)$$

Замечание 17.5. Очевидно, что формула Грина (15.7) является частным случаем формулы Стокса (если в качестве поверхности S взять плоскую область D на плоскости xOy).

Отметим, что поверхностный интеграл второго рода в формуле Стокса может быть заменен поверхностным интегралом первого рода:

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS, \qquad (17.19)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к выбранной стороне поверхности S.

Пример 17.2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \oint\limits_{\Gamma} x^2y^3dx + dy + zdz$, где контур Γ – положительно ориентированная окружность $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$:

а) непосредственно;

б) используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

◀а) Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = R\cos t,\ \ y = R\sin t,\ \ z = 0,\ \ t \in [0, 2\pi].$$

По формуле (14.4) имеем:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R^2\cos^2 t \cdot R^3 \sin^3 t(-R\sin t)dt + \int\limits_0^{2\pi} R\cos t dt = -R^6 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= -R^6 \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-\cos 2t)dt = -\frac{R^6}{16} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 2t + \frac{R^6}{8}\sin^2 2t \cdot \cos 2t\right) dt = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

б) Теперь вычислим интеграл, используя формулу Стокса (17.18). В нашем случае $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$, S – верхняя часть полусферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (рисунок 17.3).

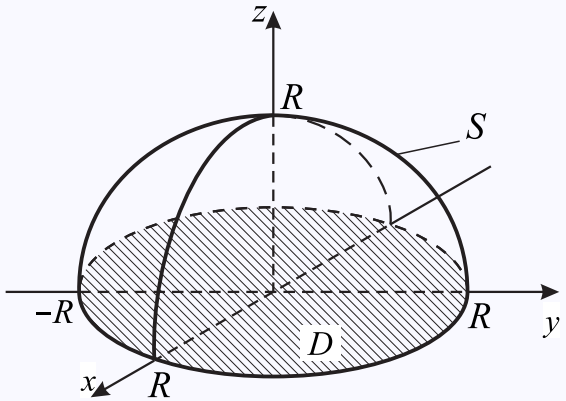


Рисунок 17.3

Тогда

$$I = \iint\limits_S (0-0)dydz + (0-0)dxdz + (0-3x^2y^2)dxdy = -3\iint\limits_S x^2y^2dxdy = -3\iint\limits_D x^2y^2dxdy.$$

Переходя в двойном интеграле к полярным координатам, получаем:

$$I = -3 \iint\limits_D r^5 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi d\varphi = -3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi d\varphi \cdot \int\limits_0^R r^5 dr = -\frac{3}{6} R^6 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi d\varphi = -\frac{\pi R^6}{8}. \blacktriangleright$$

17.5 Формула Остроградского – Гаусса

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – непустая ограниченная область, граница ∂G которой есть множество площади нуль; функции $z_1 : \overline{G} \to \mathbb{R}$, $z_2 : \overline{G} \to \mathbb{R}$ непрерывны на $\overline{G}$, имеют на G непрерывные частные производные первого порядка, причем для любой точки $(x, y) \in \overline{G}$ $z_1(x, y) \leqslant z_2(x, y)$.

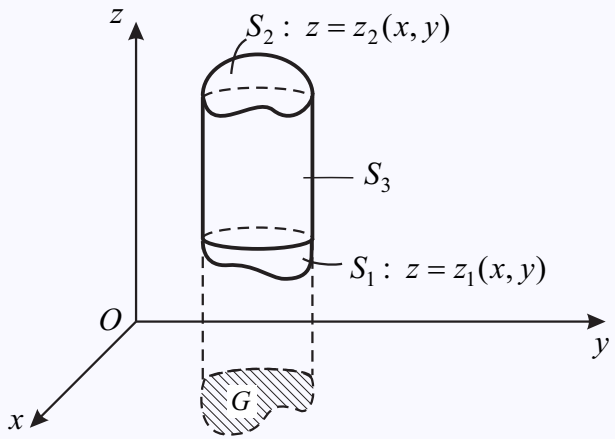


Рисунок 17.4

Рассмотрим z-цилиндрическую область (см. рисунок 17.4):

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{G},\ z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\right\}.$$

Поверхность S, являющуюся границей $\partial\Omega$ множества Ω, представим в виде объединения трех гладких поверхностей: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где S_1, S_2 – графики функции $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$, соответственно; S_3 – цилиндрическая часть поверхности S.

Теорема 17.3. *Пусть область $V \subset \mathbb{R}^3$ такая, что $\overline{\Omega} \subset V$. Если функция $f : V \to \mathbb{R}$ и ее частная производная первого порядка $\frac{\partial f}{\partial z}$ непрерывны на V, то*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_\Omega f'_z(x,y,z)dxdydz. \tag{17.20}$$

◀Тройной интеграл в правой части (17.20) существует, так как $f'_z \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Также существует и поверхностный интеграл в левой части равенства (17.20) (смотри теорему 17.1). Докажем равенство этих интегралов. В тройном интеграле переходим к повторному.

$$\iiint\limits_\Omega f'_z(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f'_z(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_G f(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dxdy = \iint\limits_G (f(x,y,z_2(x,y) - f(x,y,z_1(x,y))dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_2} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint\limits_{S_3} f(x,y,z)dS = \iint\limits_S f(x,y,z)dS.$$

Поверхностный интеграл функции f по S_3 равен нулю, так как площадь проекции S_3 на плоскость $z = 0$ равна нулю.▶

Замечание 17.6. Аналогичные теоремы будут справедливы, если область Ω будет x-цилиндрической или y-цилиндрической. Тогда формулы типа (17.20) для этих областей, соответственно, будут иметь вид:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_\Omega f'_x(x,y,z)dxdydz \tag{17.21}$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_\Omega f'_y(x,y,z)dxdydz. \tag{17.22}$$

Определение 17.4. *Область $V \subset \mathbb{R}^3$ называют **выпуклой**, если для любых двух ее точек она содержит отрезок, соединяющий их.*

Можно показать, что формулы (17.20), (17.21) и (17.22) будут справедливыми для случая любой ограниченной выпуклой замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega = S$ (поверхность $S = \partial\Omega$ в таком случае называют **замкнутой**).

Теорема 17.4. *Пусть $V, \Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченные выпуклые области, причем $\overline{\Omega} \subset V$, а $S = \partial\Omega$ – кусочно-гладкая поверхность.*

*Если функции $P : V \to \mathbb{R}$, $Q : V \to \mathbb{R}$, $R : V \to \mathbb{R}$ и их частные производные первого порядка $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны на V, то справедлива **полная формула Остроградского – Гаусса***

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{17.23}$$

Пример 17.3. С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона границы куба $\overline{\Omega} = [0,a] \times [0,a] \times [0,a]$, $a > 0$.

◀Для вычисления поверхностного интеграла используем формулу (17.23). В нашем случае

$$P(x,y,z) = x^2;\ Q(x,y,z) = y^2;\ R(x,y,z) = z^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

$$I = \iiint\limits_\Omega (2x + 2y + 2z)dxdydz = \int\limits_0^a dz \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a (2x + 2y + 2z)dx = 3a^4. \blacktriangleright$$

17.6 Вычисление объемов тел с помощью поверхностных интегралов второго рода

В формуле Остроградского – Гаусса (17.23) подберем функции P, Q, R так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

Это, например, будет, если

$$P(x,y,z) = \frac{1}{3}x,\ Q(x,y,z) = \frac{1}{3}y,\ R(x,y,z) = \frac{1}{3}z.$$

Тогда объем тела Ω с кусочно-гладкой границей $S = \partial\Omega$ будет находиться по формуле

$$V_\Omega = \frac{1}{3}\left|\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy\right|. \qquad (17.24)$$

Пример 17.4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$ и $z = 1 - x^2 - y^2$ $(z \geqslant 0)$.

◀Изобразим четвертую часть тела на рисунке 17.5 в первом октанте.

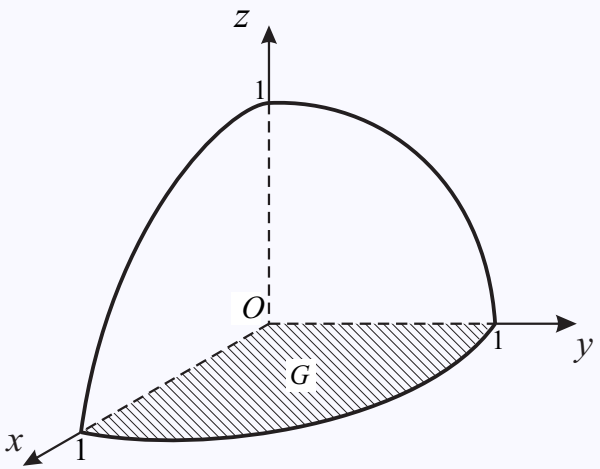


Рисунок 17.5

Для вычисления объема тела Ω воспользуемся формулой (выбираем верхнюю сторону поверхности)

$$V_\Omega = \frac{1}{3} \iint\limits_S z dx dy, \tag{17.25}$$

где

$$S = S_1 + S_2,\ S_1 : \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \end{cases},\ S_2 : \begin{cases} z \geqslant 0, \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}.$$

Очевидно, что поверхностный интеграл по S_1 равен нулю. Находим поверхностный интеграл (17.25) по поверхности параболоида (S_2).

$$V_\Omega = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_2} z dxdy = \frac{4}{3}\iint\limits_{G}(1-x^2-y^2)dxdy, \tag{17.26}$$

где G – четверть круга $x^2+y^2 \leqslant 1$ в первой четверти плоскости xOy.

При вычислении двойного интеграла (правая часть (17.26)) переходим к полярным координатам.

$$V_\Omega = \frac{4}{3}\iint\limits_{D}(1-r^2)rdrd\varphi = \frac{4}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (r-r^3)dr = \frac{\pi}{6}\ (\text{куб. ед}). \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение ориентируемой гладкой поверхности.
2. Дайте определение поверхностного интеграла второго рода.
3. Сформулируйте теорему о существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода.
4. Дайте определение края поверхности. Докажите формулу Стокса.
5. Докажите формулу Остроградского – Гаусса. Как можно вычислить объем тела с помощью поверхностного интеграла второго рода?

ЛЕКЦИЯ 18
Элементы теории поля

18.1 Основные понятия теории поля

Определение 18.1. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – область. Функция $f : V \to \mathbb{R}$ называется* ***скалярным полем****, а вектор-функция $F : V \to \mathbb{R}^3$ –* ***векторным полем****.*

Примерами скалярных полей могут служить поле температуры или поле электрического потенциала. Силовое поле или поле скоростей движения жидкости – примеры векторных полей.

Пусть $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что функции f, P, Q и R имеют на области V непрерывные частные производные первого порядка.

Определение 18.2. *Векторное поле*

$$\bigtriangledown f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{18.1}$$

называется ***градиентом*** *скалярного поля f.*

Определение 18.3. *Скалярное поле*

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{18.2}$$

называется ***дивергенцией*** *векторного поля F.*

Укажем физический смысл дивергенции для некоторых векторных полей.

1. Пусть F – поле скоростей несжимаемой жидкости, протекающей в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^3$. Тогда тройной интеграл $\iiint\limits_V \operatorname{div} F dxdydz$ есть суммарная мощность источников, которые расположены в области V, а $\operatorname{div} F$ есть плотность источников (мощность на единицу объема). Если в этом случае нет ни стоков, ни истоков, то $\operatorname{div} F = 0$, а векторное поле называется соленоидальным (трубчатым).

2. Дивергенция гравитационного поля в области V распределенных масс равна объемной плотности V этого распределения, умноженной на 4π.

3. Пусть в области V задано электростатическое поле $F = (P, Q, R)$, тогда $\operatorname{div} F$ есть плотность зарядов поля, умноженная на 4π (теорема Гаусса).

Определение 18.4. *Векторное поле*

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{18.3}$$

называется ***ротором*** *векторного поля* F.

С помощью непосредственного вычисления можно показать, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = (0, 0, 0), \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

Замечание 18.1. Пусть дано векторное поле v скоростей движущейся жидкости. В этом случае $\operatorname{rot} v$ характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей, он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости. В этом состоит **физический смысл ротора**.

Определение 18.5. *Векторное поле F называется* ***потенциальным****, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля. В этом случае само скалярное поле называется* ***потенциалом векторного поля****.*

Указанное определение равносильно тому, что $\operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$.

Определение 18.6. *Криволинейный интеграл второго рода*

$$Ц = \oint_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{18.4}$$

по ориентированному контуру $C \subset V$ *называется* ***циркуляцией векторного поля*** F *по контуру* C.

Если n – единичный вектор касательной в положительном направлении обхода контура C, то циркуляцию можно представить в виде

$$Ц = \oint_C (F, dr) = \oint_C (F, n)\, dl, \tag{18.5}$$

где $dr = (dx, dy, dz)$, а в правой части равенства – криволинейный интеграл первого рода.

Пример 18.1. Найти циркуляцию векторного поля $F = (y, -x, z)$ по контуру

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

в положительном направлении обхода контура.

◀Выполним эскиз рисунка к задаче в первом октанте (рисунок 18.1).

$$Ц = \oint_L ydx - xdy + zdz = \left[\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi, \\ y = \sqrt{2}\sin\varphi, \\ z = \sqrt{2} \end{cases} \middle| \begin{array}{l} dx = -\sqrt{2}\sin\varphi d\varphi, \\ dy = \sqrt{2}\cos\varphi d\varphi, \\ dz = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\sin\varphi \cdot \left(-\sqrt{2}\right) \sin\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \sqrt{2}\cos\varphi \right) d\varphi = -4\pi. \blacktriangleright$$

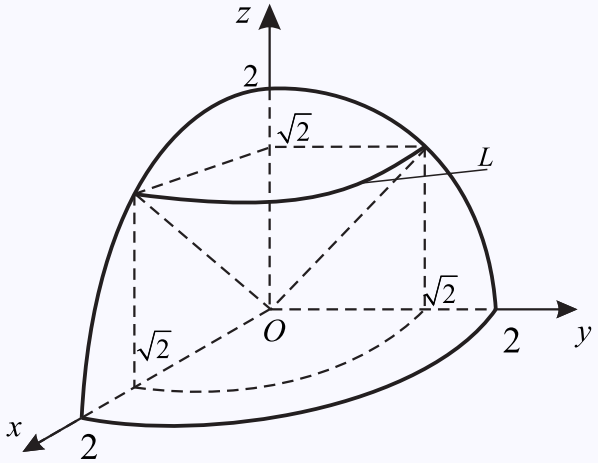


Рисунок 18.1

Замечание 18.2. *При определении циркуляции векторного поля можно использовать не контур, а произвольную жорданову кривую $L \subset V$. Циркуляция вдоль указанной кривой L есть* ***работа вдоль кривой*** *силового поля.*

Определение 18.7. *Поверхностный интеграл второго рода*

$$\Pi = \iint\limits_S P dydz + Q dxdz + R dxdy$$

по гладкой ориентированной поверхности $S \subset V$ называется ***потоком векторного поля*** *F через выбранную сторону поверхности S.*

Если n – ориентирующее поле нормалей S, то поток можно записать в виде

$$\Pi = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_S (F, n)dS.$$

Пример 18.2. Вычислить поток векторного поля

$$F = (x - 2z, x + 3y + z, 5x + y)$$

через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

◀1. *Вычисление потока методом проектирования на одну из координатных плоскостей (через поверхностный интеграл первого рода).*

Уравнение поверхности S:

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Нормальными векторами поверхности (плоскости) будут векторы $(1, 1, 1)$ и $(-1, -1, -1)$. Ориентирующее поле нормали задает вектор n, удовлетворяющий условию $\cos(n, Oz) > 0$, поэтому

$$n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Находим скалярное произведение (F, n) при условии, что поверхность S проектируется на плоскость $z = 0$. Тогда

$$(F, n) = ((x - 2z) + (x + 3y + z) + (5x + y))\frac{1}{\sqrt{3}}\Big|_{z=1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(7x + 4y - z)\Big|_{z=1-x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}}(8x + 5y - 1). \qquad (18.6)$$

Тогда по формуле (16.3)

$$\Pi = \iint\limits_S (F,n)dS = \iint\limits_G \frac{1}{\sqrt{3}}(8x+5y-1)\cdot\sqrt{3}dxdy, \tag{18.7}$$

где область интегрирования G изображена на рисунке 18.2.

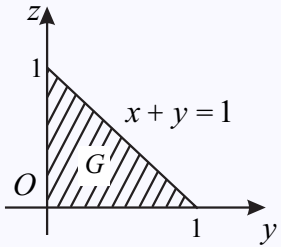


Рисунок 18.2

$$\Pi = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (8x+5y-1)dy = \frac{5}{3}. \blacktriangleright$$

2. *Вычисление потока векторного поля методом проектирования на три координатные плоскости (через поверхностный интеграл второго рода).*

Вектор нормали к выбранной стороне поверхности образует острые углы всеми координатными осями. Тогда (теорема 17.1)

$$\Pi = \iint\limits_S (F,n)dS = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G_{yOz}} P(x(y,z),y,z)dydz + \iint\limits_{G_{xOz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{G_{xOy}} R(x,y,z(x,y))dxdy = \left[\begin{array}{l|l} x+y+z-1=0, & y(x,z)=1-x-z, \\ x(y,z)=1-y-z, & z(x,y)=1-x-y \end{array} \right].$$

Изобразим на рисунке 18.3 области интегрирования для двойных интегралов.

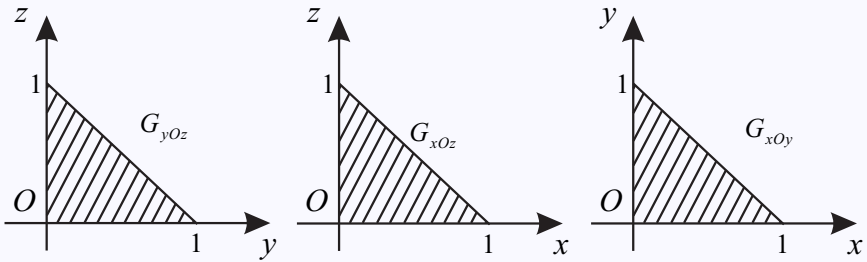


Рисунок 18.3

$$\Pi = \iint\limits_{G_{yOz}} (1-y-3z)dydz + \iint\limits_{G_{xOz}} (3-2x-2z)dxdz + \iint\limits_{G_{xOy}} (5x+y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-3z)dz + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (3-2x-2z)dz + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (5x+y)dy = \frac{5}{3}. \blacktriangleright$$

18.2 Формулы Стокса и Остроградского – Гаусса в векторной форме

Следующие две теоремы дают перевод формул Остроградского – Гаусса и Стокса на язык теории поля. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ – область,

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

причем функции P, Q и R имеют на области V непрерывные частные производные первого порядка.

Теорема 18.1 (формула Стокса). *Пусть $S \subset V$ – гладкая поверхность с кусочно-гладким краем – контуром C.*

Тогда циркуляция векторного поля F по поверхности S равна потоку ротора F через эту поверхность, то есть

$$\oint_C (F,\tau)dl = \iint_S (\text{rot } F, n)\, dS.$$

Здесь τ – единичный вектор касательной к C, согласованный с ориентирующим полем нормалей n так, чтобы обход контура C в направлении τ совершался «против часовой стрелки».

Теорема 18.2 (формула Остроградского – Гаусса). *Пусть $\overline{\Omega} \subset V$ – выпуклая замкнутая ограниченная область, границей которой является гладкая поверхность S.*

Тогда поток векторного поля F через поверхность S равен интегралу от его дивергенции по Ω:

$$\iint_S (F,n)\, dS = \iiint_\Omega \text{div } F\, dxdydz, \tag{18.8}$$

где n – поле внешней нормали к S.

Пример 18.3. Вычислить поток векторного поля $a = (x, 2y, -z)$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $S: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = x^2 + y^2, \end{cases}$ непосредственно и по формуле Остроградского – Гаусса.

◀Изображаем четвертую часть поверхности S в первом октанте и область интегрирования на рисунке 18.4.

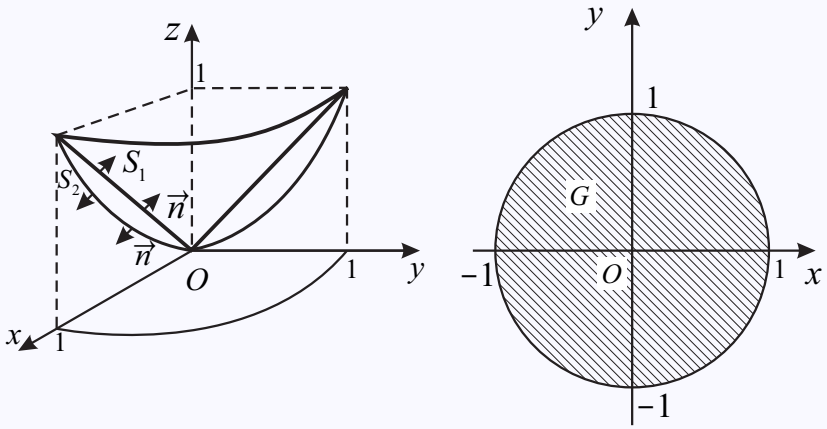


Рисунок 18.4

Сначала найдем поток векторного поля непосредственным вычислением.

1. Поток через S_1 – внутреннюю поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$.

Поток будем вычислять методом проектирования на одну плоскость $z = 0$ (см. пример 18.2). Зададим поверхность S_1 с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$, grad $F = (-2x, -2y + 2z)$. Вектор n определяем из равенства

$$n = \pm \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \pm \frac{(-2x, -2y, 2z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{(-x, -y, +z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (18.9)$$

Из (18.9) и $\cos(n, Oz) > 0$ получаем:

$$n = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right). \tag{18.10}$$

Тогда

$$(a, n) = \frac{-x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{18.11}$$

Вычислим искомую часть потока через поверхность S_1 $\left(\underset{z=0}{\text{Пр}}\ S_1 = G \right)$:

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} (a, n) dS = \iint\limits_{S_1} \frac{-x^2 - 2y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dS =$$

$$= \iint\limits_G \left(-x^2 - 2y^2 - (x^2+y^2) \right) \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_G \frac{-2x^2 - 3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy. \tag{18.12}$$

Для вычисления последнего интеграла переходим к полярным координатам.

$$\Pi_1 = -\iint\limits_D \frac{2r^2\cos^2\varphi + 3r^2\sin^2\varphi}{r} r dr d\varphi = -\iint\limits_D \left(2 + \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \right) r^2 dr d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = -\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2\pi = -\frac{5}{3}\pi.$$

2. Поток через S_2 – внешнюю поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$.
Поступаем аналогично. Опять задаем поверхность уравнением $F(x, y, z) = 0$.

$$F(x,y,z) = z - x^2 - y^2,\ F'_x(x,y,z) = -2x,\ F'_y(x,y,z) = -2y,\ F'_z(x,y,z) = 1,$$

$$n = \pm\frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};\ \cos(n, Oz) < 0,\ n = -\frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}};$$

$$(a, n) = -\frac{2x^2 + 4y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} (a, n)dS = \iint\limits_{S_2} -\frac{2x^2 + 4y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}dS = -\iint\limits_G -\left(2x^2 + 4y^2 + x^2 + y^2\right)dxdy = \iint\limits_G \left(3x^2 + 5y^2\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(3r^2\cos^2\varphi + 5r^2\sin^2\varphi\right)rd\varphi dr = \int\limits_0^{2\pi}(4 - \cos 2\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = 2\pi.$$

Тогда весь поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.
Теперь вычислим поток с помощью формулы Остроградского – Гаусса.
Имеем векторное поле $a = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, где $P = x$, $Q = 2y$, $R = -z$.
Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 2,\ \frac{\partial R}{\partial z} = -1,\ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2.$$

В силу симметрии тела относительно оси Oz

$$\Pi = \iiint\limits_\Omega 2dxdydz = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^1 rdr \int\limits_{r^2}^r dz = 4\pi \int\limits_0^1 \left(r^2 - r^3\right)dr = \frac{\pi}{3}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения скалярного и векторного поля, дивергенции и ротора векторного поля.
2. Приведите примеры физического смысла дивергенции для некоторых векторных полей.
3. В чем состоит физический смысл ротора векторного поля?
4. Когда векторное поле называют потенциальным?
5. Дайте понятия циркуляции и потока векторного поля.
6. Запишите формулы Стокса и Остроградского – Гаусса в векторной форме.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

Поверхностные интегралы второго рода и их приложения

Задание 1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (z-a)^2\,dxdy$, где S – внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=2az$ $(a \leqslant z \leqslant 2a)$.

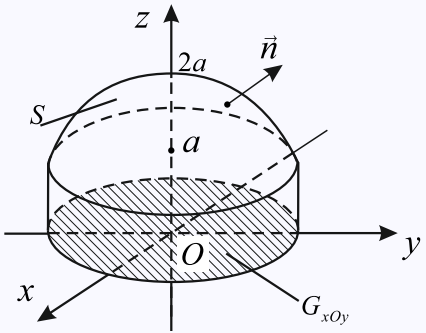


Рисунок 18.5

◀Данная полусфера (рисунок 18.5) может быть задана уравнением $z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$.

По условию интегрирование проводится по внешней стороне полусферы и вектор нормали к поверхности n образует с осью Oz острый угол, поэтому, применяя формулу (17.5), перед двойным интегралом берем знак «+».

Следовательно,

$$I = \iint\limits_S (z-a)^2\,dxdy = \iint\limits_{G_{xOy}} \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dxdy,$$

где G_{xOy} – круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$ на плоскости xOy, в который проектируется поверхность полусферы.

Переходя в двойном интеграле к полярной системе координат, получим:

$$I = \iint\limits_S (z-a)^2\,dxdy = \iint\limits_{G_{xOy}} \left(a^2 - x^2 - y^2\right) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(a^2 - r^2\right) r dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(a^2 - r^2\right) r dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^4}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^4}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S -xdydz + zdxdz + 5dxdy$, где S – верхняя сторона части плоскости $2x - 3y + z = 6$, лежащей в четвертом октанте.

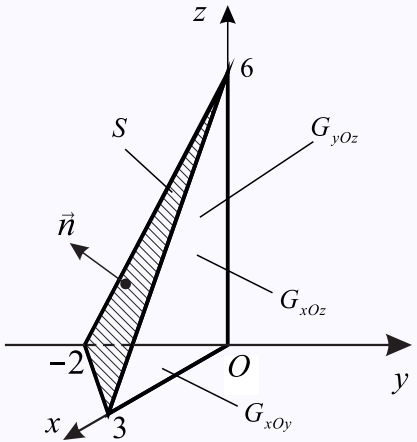


Рисунок 18.6

◀Поверхность S является частью плоскости, лежащей в четвертом октанте (рисунок 18.6), а интегрирование проводится по верхней стороне поверхности, поэтому вектор соответствующей нормали n образует с осями Ox и Oz острый угол, а с осью Oy – тупой. В этом можно убедиться, найдя направляющие косинусы нормального вектора $a = (2, -3, 1)$ плоскости $2x - 3y + z = 6$, поэтому перед двойным интегралом для проекций поверхности S на плоскости xOy и yOz берем знак «+», а для проекции на плоскость xOz – знак «–».

Следовательно,

$$I = \iint\limits_S -xdydz + zdxdz + 5dxdy =$$

$$= + \iint\limits_{G_{yOz}} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right) dydz - \iint\limits_{G_{xOz}} zdxdz + 5 \iint\limits_{G_{xOy}} dxdy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{3y+6} \left(-3 - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right) dz - \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{6-2x} zdz + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} \left(-3z - \frac{3}{2}yz + \frac{z^2}{4}\right)\Big|_0^{3y+6} dy - \int\limits_{0}^{3} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{6-2x} dx + 15 =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} \left(-3(3y+6) - \frac{3}{2}y(3y+6) + \frac{(3y+6)^2}{4}\right) dy - \int\limits_{0}^{3} \frac{(6-2x)^2}{2} dx + 15 =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} \left(-9 - 9y - \frac{9y^2}{4}\right) dy - \int\limits_{0}^{3} \left(18 - 12x + 2x^2\right) dx + 15 = -9. \blacktriangleright$$

Задание 3. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_C ydx + zdy + xdz,$$

где C – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

◀Применив формулу Стокса и взяв в ней в качестве поверхности S круг радиуса a, лежащий в плоскости $x + y + z = 0$, получим:

$$I = -\iint\limits_S dydz + dxdz + dxdy = -\iint (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S – плоскости $x + y + z = 0$. Нормальными векторами плоскости будут векторы $(1, 1, 1)$ или $(-1, -1, -1)$. Так как окружность пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox, то в ориентирующее поле нормалей задает вектор $n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, т. е.

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В силу этого имеем:

$$I = -\sqrt{3}\iint\limits_S dS = -\sqrt{3}\pi a^2,$$

так как $\iint\limits_S dS$ – площадь поверхности S – круга радиуса a.▶

Задание 4. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл

$$I = \oint_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

где C – кривая

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ x^2 + y^2 = 2rx\ (0 < r < R,\ z > 0),$$

пробегаемая в положительном направлении на верхней стороне поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx.$$

◀Применив формулу Стокса, получим поверхностный интеграл

$$I = 2\iint_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy =$$

$$= 2\iint_S ((y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma)\, dS,$$

где S – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, вырезанная из нее цилиндром $x^2 + y^2 = 2rx$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S. Вычислим направляющие косинусы, принимая во внимание, что нормаль образует с положительным направлением оси Oz острый угол и что $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$ (см. (17.2)).

$$\cos\alpha = \frac{x - R}{z\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{z\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

Так как поверхность S проектируется на плоскость xOy в круг $x^2 + y^2 \leqslant 2rx$, то поверхностный интеграл приводится к двойному интегралу, взятому по этому кругу. Обозначим

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 2rx\right\}.$$

$$I = 2\iint\limits_G \left(\frac{(y-z)(x-R)+(z-x)y}{z} + x - y\right) dxdy = 2R\iint\limits_G \left(1 - \frac{y}{z}\right) dxdy = 2\pi Rr^2,$$

так как

$$\iint\limits_G \frac{y}{z} dxdy = 0. \blacktriangleright$$

Задание 5. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, где S – верхняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀Используя формулу Остроградского – Гаусса, находим:

$$I = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$

где V – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$. Переходя к сферическим координатам, получим:

$$I = 3\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{a} \rho^4 d\rho = \frac{12}{5}\pi a^5. \blacktriangleright$$

Задание 6. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_S \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right) dS,$$

где S – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

◀Мы не можем воспользоваться формулой Остроградского – Гаусса, поскольку поверхность не является замкнутой. Рассмотрим замкнутую поверхность S_1, присоединив ко всем точкам поверхности S множество S_2 точек круга $x^2+y^2 \leqslant h^2$, лежащего в плоскости $z=h$:

$$S_1 = \partial\Omega,\ \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h\right\},\ S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leqslant h^2,\ z=h\right\}.$$

Тогда

$$I = \iint\limits_{S_1} \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right) dS - \iint\limits_{S_2} \left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right) dS.$$

К первому интегралу правой части предыдущего равенства можно применить формулу Остроградского – Гаусса, а на поверхности S_2 имеем: $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $z^2 = h^2$, поэтому

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz - h^2 \iint\limits_{G} dxdy,$$

где $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leqslant h^2\}$, поэтому $\iint\limits_G dxdy = \pi h^2$.

В тройном интеграле переходим к цилиндрическим координатам.

$$\iiint\limits_{\Omega} (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h rdr \int\limits_r^h (r(\cos\varphi+\sin\varphi)+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h \left(r(h-r)(\cos\varphi+\sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) rdr = \frac{\pi}{4}h^4.$$

Окончательно имеем:

$$I = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти поток векторного поля $F = (x^3, y^3, z^3)$ через внешнюю поверхность сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = x.$$

◀Используем формулу (18.8). В нашем случае

$$\operatorname{div} F = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right),\ \Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x\right\}.$$

$$\Pi = 3 \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz.$$

Вычислим тройной интеграл, перейдя к сферическим координатам.

$$\Pi = 3 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sin\theta\cos\varphi} \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} \int\limits_0^{\pi} \sin^6\theta d\theta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 varphid\varphi = \frac{12}{5} \int\limits_0^{\pi} \sin^6\theta d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{\pi}{5}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти циркуляцию векторного поля $F = (-y, x, c)$ $(c = \text{const})$ вдоль положительно ориентированной окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0$.

◀Воспользуемся формулой (18.5). Зададим окружность параметрически:

$$x = 2 + \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = 0\ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Тогда

$$F = -\left(\sin\varphi, 2 + \cos\varphi, c\right),\ n = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$$

$$(F, n) = 1 + 2\cos\varphi,\ dl = d\varphi.$$

$$\text{Ц} = \int\limits_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi) d\varphi = 2\pi. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

1.1. $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dxdy$, где S – часть верхней стороны цилиндра $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leqslant y\leqslant b$.

1.2. $\iint\limits_S (x^4+y^4+2a^2z^2)\,dxdy$, где S – часть нижней стороны параболоида $az=xy$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $(x^2+y^2)^2=bxy$.

1.3. $\iint\limits_S (x^2+6z-2y^2)\,dxdy$, где S – часть нижней стороны цилиндра $y^2=6z$, $0\leqslant x\leqslant 3$, $z\leqslant 6$.

1.4. $\iint\limits_S (a^2x+by^2+cz^2)\,dydz$, где S – правая сторона цилиндра $y^2=2px$, $x\leqslant 2p$, $0\leqslant z\leqslant q$.

1.5. $\iint\limits_S (x^2+z^2)\,dydz$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x=\sqrt{9-y^2}$, $0\leqslant z\leqslant 2$.

1.6. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dxdz$, где S – часть внешней стороны конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, $0\leqslant y\leqslant b$.

1.7. $\iint\limits_S (y-z)\,dydz+(z-x)\,dxdz+(x-y)\,dxdy$, где S – часть внешней стороны верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $z\geqslant 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2ax$, $a<R$.

1.8. $\iint\limits_S xdydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2+y^2\leqslant a^2$, $-H\leqslant z\leqslant H$.

1.9. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, где S – внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1.10. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $x^2+y^2\leqslant z^2$, $0\leqslant z\leqslant H$.

1.11. $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности тела $x+2y+3z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

1.12. $\iint\limits_S (xy^2+z^2)\,dydz + (yz^2+x^2)\,dxdz + (zx^2+y^2)\,dxdy$, где S – внешняя сторона верхней $(z \geqslant 0)$ полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

1.13. $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, где S – часть внешней стороны конуса $x^2+y^2=z^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

1.14. $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – правая сторона части цилиндра $y^2+x=1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$, $x \geqslant 0$.

1.15. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где S – верхняя сторона части параболоида $x^2+y^2=2-z$, $z \geqslant 0$.

1.16. $\iint\limits_S (xz^2+y^2)\,dydz + (yx^2+z^2)\,dxdz + (zy^2+x^2)\,dxdy$, где S – часть внешней стороны конуса $1-z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z \geqslant 0$.

1.17. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + zdxdy$, где S – часть внутренней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, $0 \leqslant z \leqslant 3$.

1.18. $\iint\limits_S (x+y^2)\,dydz + (y+z^2)\,dxdz + (z+x^2)\,dy$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x^2+y^2=a^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

1.19. $\iint\limits_S yz^2dydz + zy^2dxdz + yx^2dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности тела $0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2$, $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2. Найти циркуляцию векторного поля F вдоль ориентированного контура L:

2.1. $F=(y^2,xy,x^2+y^2)$, $L=\{(x,y,z) : x^2+y^2=az,\ x=0, y=0, z=a,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$ – положительно ориентированный контур на внешней стороне параболоида.

2.2. $F=xyi+yzj+xzk$, $L=\{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$ – положительно ориентированный контур на верхней стороне плоскости.

2.3. $F = (x, x, z)$, $L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0\}$ – положительно ориентированный контур на верхней стороне плоскости.

2.4. $F = (x + 3y + 2z, 2x + z, x - y)$, L – контур треугольника с вершинами $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 1)$.

3. Найти работу поля F вдоль кривой L, если $F = (2xy, x^2)$ и L есть меньшая дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1, 0)$ до точки $(0, 1)$.

4. Найти работу поля F вдоль кривой L, если $F = (2xy, y^2, -x^2)$ и L – часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $(1, 1, 0)$ до точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

5. Найти поток векторного поля F через поверхность S в направлении внешней нормали к поверхности:

5.1. $F = (x^3 + yz, y^3 + xz, z^3 + xy)$, S – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\quad z \geqslant 0$.

5.2. $F = (xy + x^2, 2y - 2xy, z - yz)$, $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

5.3. $F = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| = 1\}$.

5.4. $F = (2x, 2y, -z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

5.5. $F = (2x, -y, z)$, S – поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $3z \leqslant x^2 + y^2$.

5.6. $F = (-x^3, y^3, -z^3)$, S – поверхность куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

5.7. $F = (x^2y, xy^2, xyz)$, S – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

5.8. $F = (x^2, y^2, z^2)$, S – нижняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$.

5.9. $F = (0, y^2, z)$, S – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 2$.

6. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через половину окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $y \geqslant 0$, если скорость потока v постоянна по величине и направлена вдоль оси Ox.

7. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через правую половину окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $x \geqslant 0$, если скорость потока v образует угол $\frac{\pi}{4}$ с осью Ox ($|v| = \text{const}$).

8. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через часть окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, лежащую в первой четверти, если скорость потока $v = (x + y, y)$.

9. Ответьте на вопросы теста.

Варианты заданий для индивидуальной работы 3

Вариант 1 Вариант 2 Вариант 3 Вариант 4

Итоговый тест по разделу «Криволинейные и поверхностные интегралы»

Ответьте на вопросы теста.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету»

1. n-мерное евклидово пространство. Различные типы множеств n-мерного евклидового пространства.
2. Предел последовательности точек n-мерного евклидового пространства. Теорема Больцано – Вейерштрасса.
3. Понятие функции многих переменных. Множество уровня функции. Предел функции многих переменных.
4. Непрерывность функции многих переменных. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
5. Частные производные первого порядка функции многих переменных. Дифференцируемость и дифференциал функции многих переменных. Связь между непрерывностью и существованием частных производных первого порядка функции многих переменных с дифференцируемостью.
6. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
8. Производные и дифференциалы сложной функции многих переменных. Инвариантность формы первого дифференциала.
9. Производные и дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Теорема Шварца.
10. Производная функции по направлению. Градиент.
11. Формула Тейлора для функции многих переменных.
12. Понятие функции, заданной неявно. Частные производные неявно заданной функции.
13. Экстремум функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия локального экстремума.
14. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Достаточный признак условного экстремума.
15. Понятие двойного интеграла. Суммы Дарбу. Условия существования двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла.
16. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области интегрирования.

17. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области интегрирования.
18. Криволинейные координаты. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан в полярных криволинейных координатах.
19. Площадь гладкой поверхности и ее вычисление посредством двойного интеграла.
20. Понятие тройного интеграла. Суммы Дарбу. Условия существования тройного интеграла. Основные свойства тройного интеграла.
21. Вычисление тройного интеграла. Криволинейные координаты. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические координаты. Сферические координаты.
22. Криволинейные интегралы первого рода, их существование, вычисление.
23. Криволинейные интегралы второго рода, их существование, вычисление.
24. Криволинейный интеграл второго рода по контуру. Формула Грина.
25. Четыре равносильных условия для криволинейного интеграла второго рода.
26. Восстановление функции по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.
27. Поверхностные интегралы первого рода, их существование, вычисление.
28. Поверхностные интегралы второго рода, их существование, вычисление.
29. Формула Стокса.
30. Формула Остроградского – Гаусса.
31. Основные понятия теории поля (градиент скалярного поля, дивергенция векторного поля, ротор и циркуляция векторного поля, поток векторного поля). Формулы Стокса и Остроградского – Гаусса в векторной форме.

Литература

1. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2020. – Ч. 1: Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 475 с.

2. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2021. – Ч. 2: Интегральное исчисление функций одной переменной. – 401 с.

3. Кротов, В. Г. Лекции по математическому анализу: учеб. пособие / В. Г. Кротов — Минск: БГУ, 2016. — 372 с.

4. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 2 : Основы математического анализа. – 463 с.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – Т. 2 : Курс математического анализа. – 584 с.

6. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 616 с.

7. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.

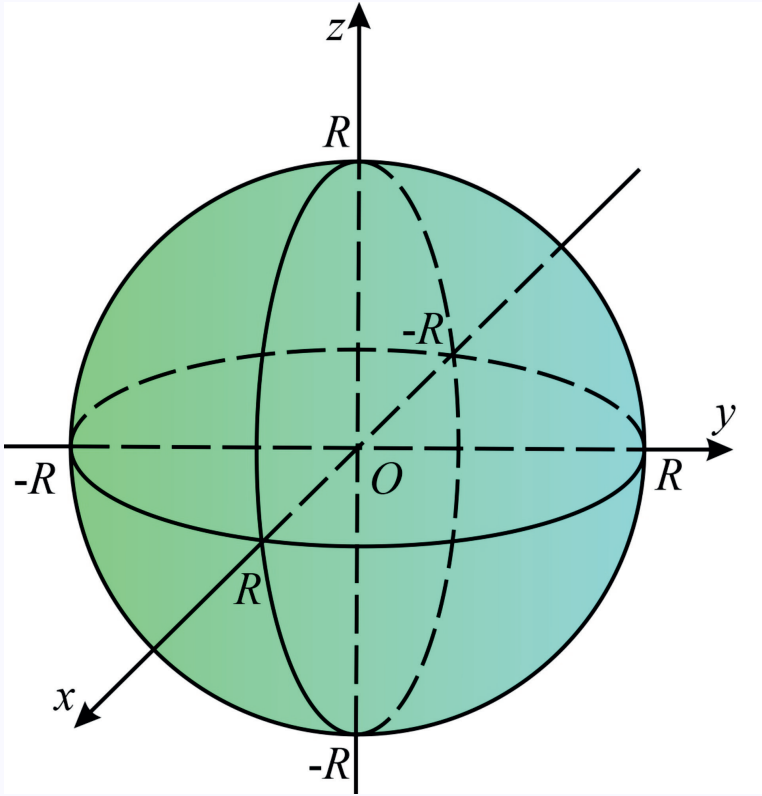
8. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отд-ний физ.-мат. фак. пед. ин-тов : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под общ. ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Т. 1. – 343 с.

Приложения

1. Поверхности второго порядка.
2. Варианты заданий для индивидуальной работы 1.
3. Варианты заданий для индивидуальной работы 2.
4. Варианты заданий для индивидуальной работы 3.

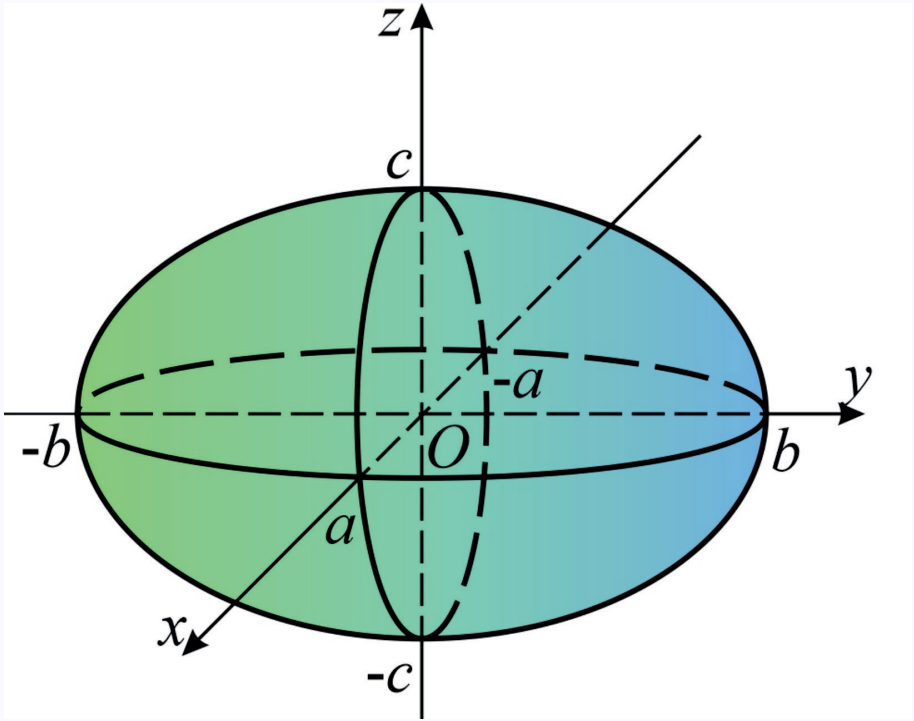
Поверхности второго порядка

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

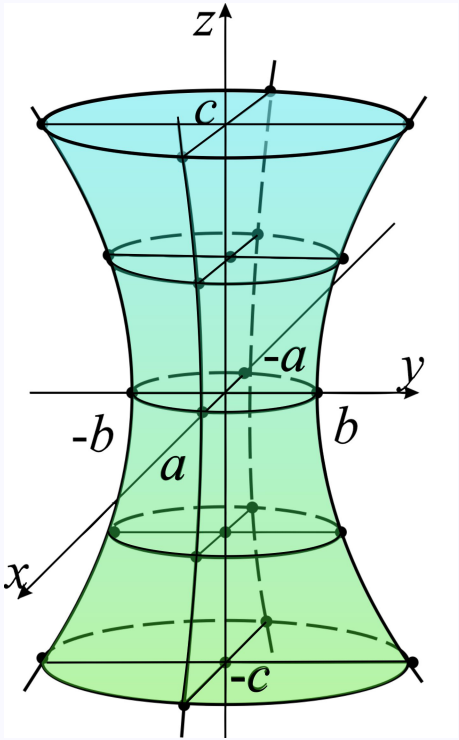


Поверхности второго порядка

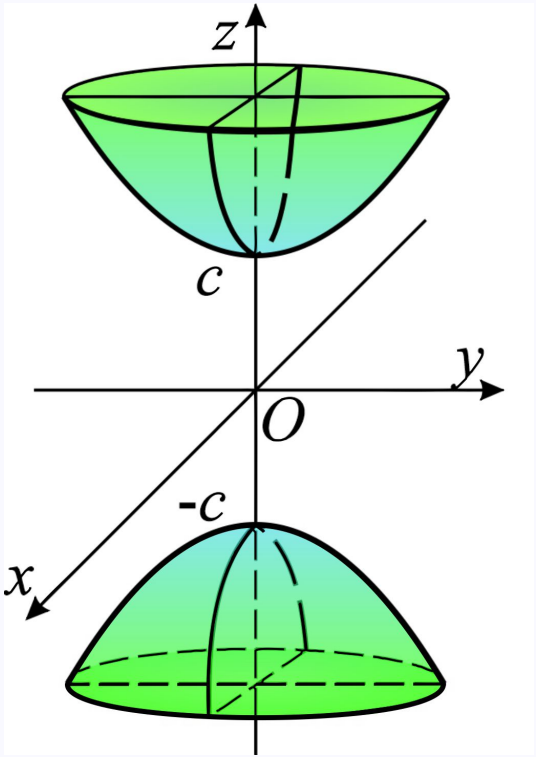
Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

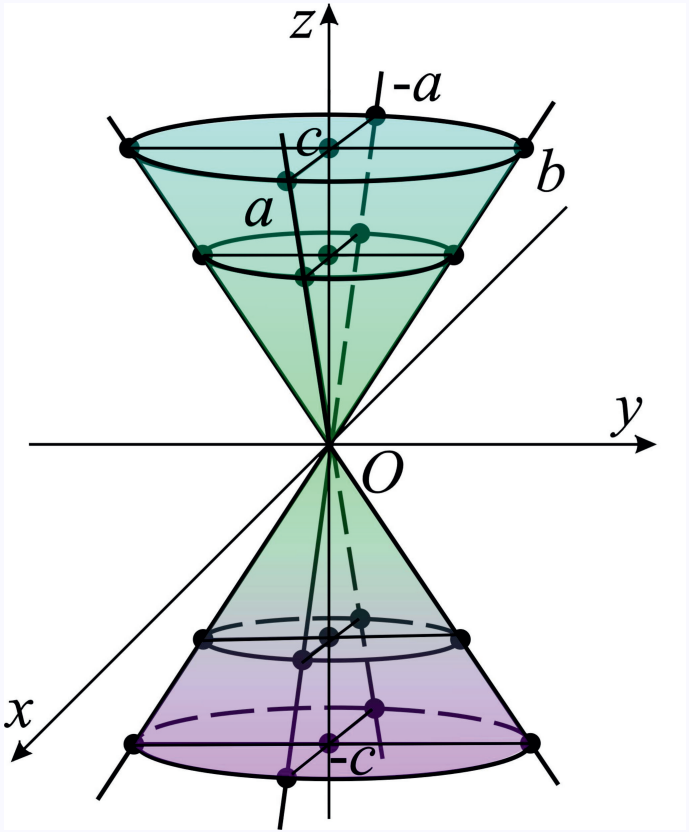


Двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

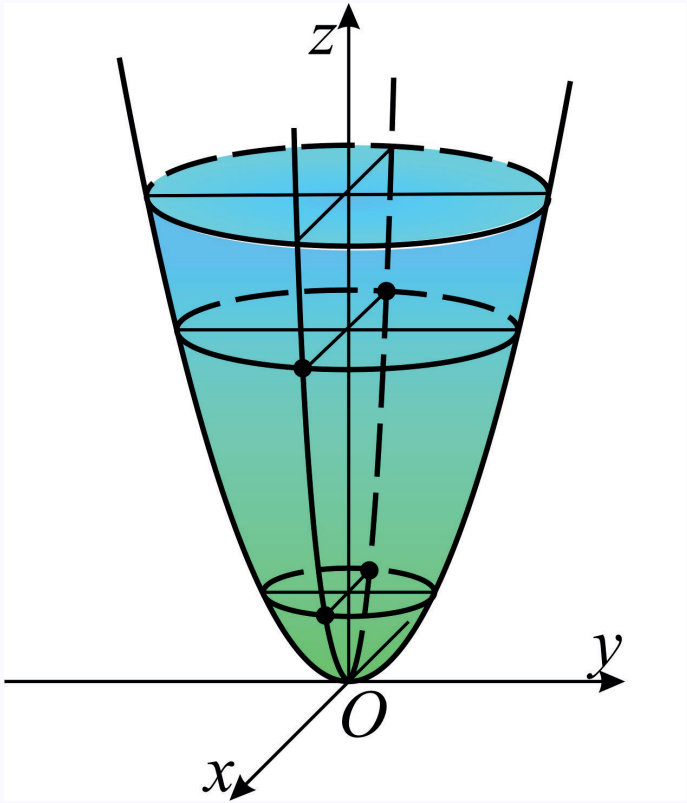


Поверхности второго порядка

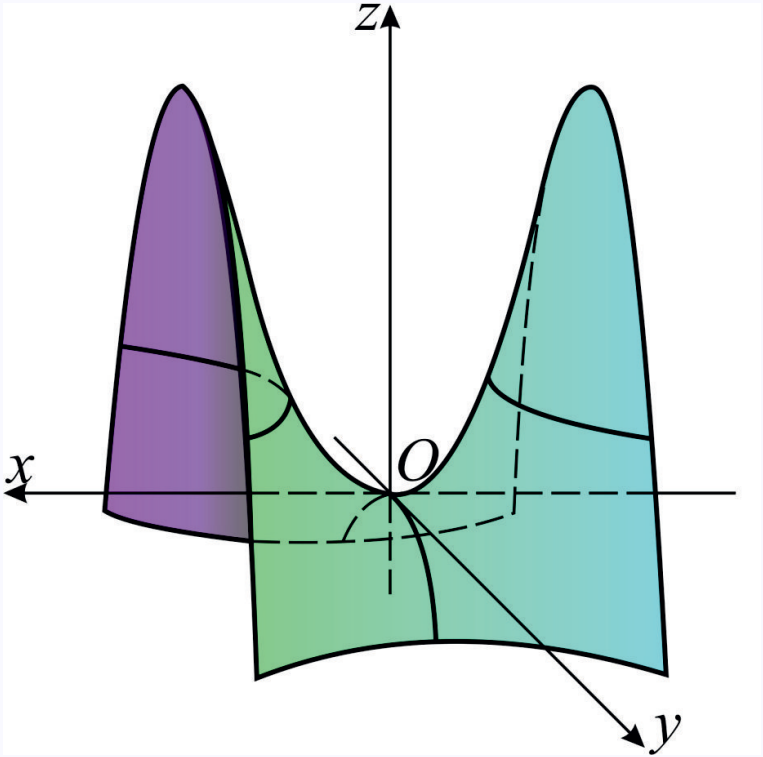
Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



Эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0)$

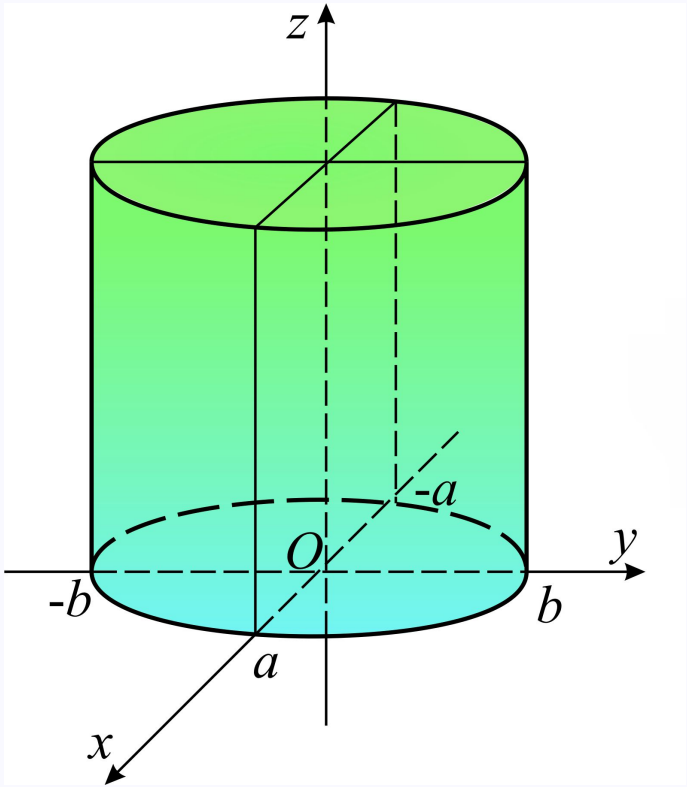


Гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0)$

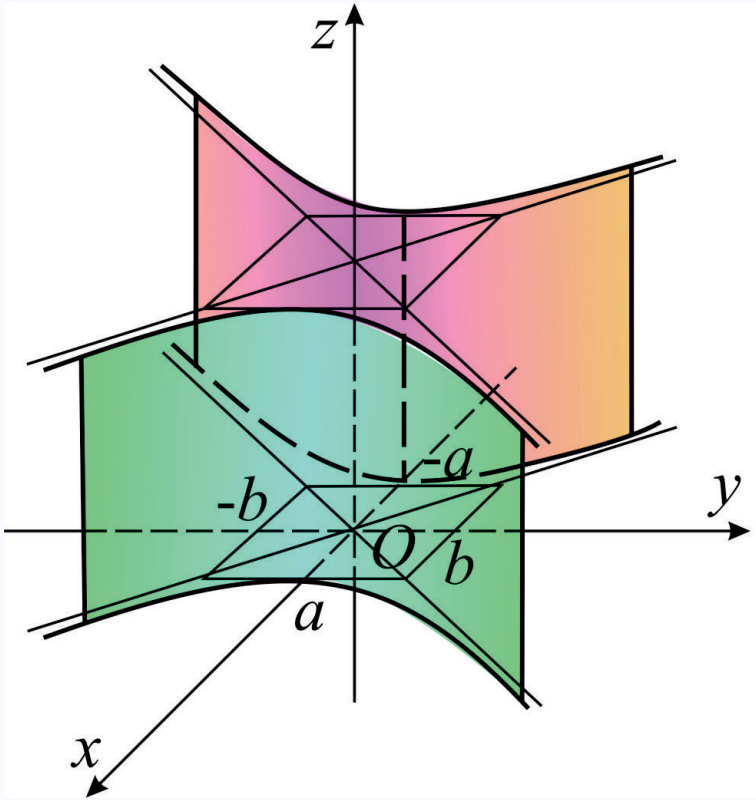


БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП

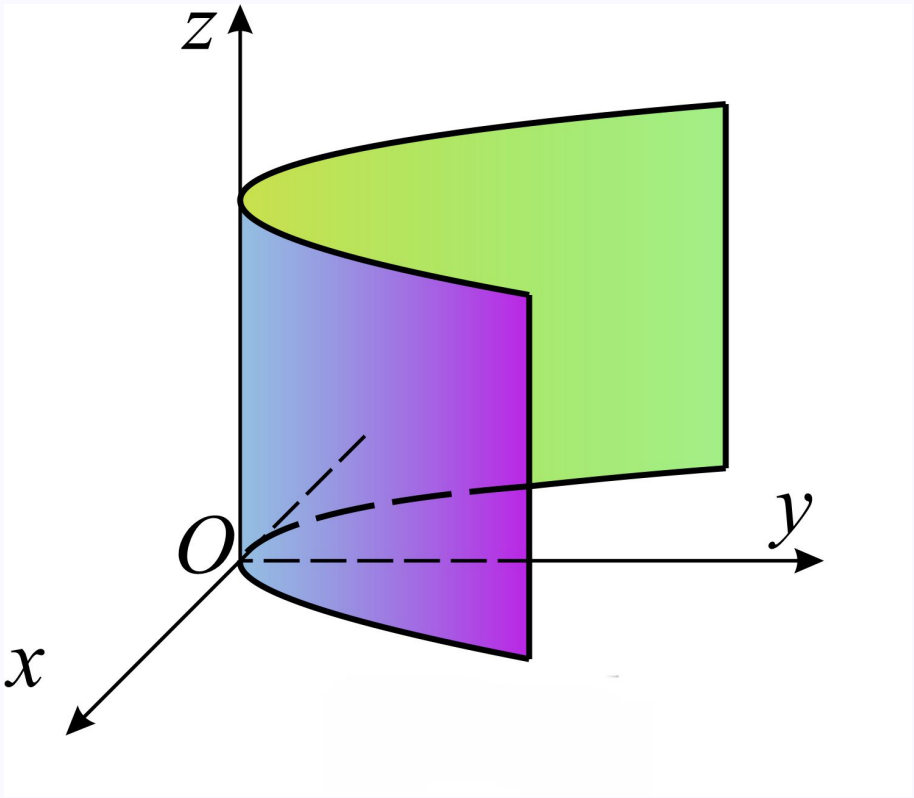
Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Параболический цилиндр $x^2 = 2py,\ p > 0$



Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1

1. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 25, \\ y > 2x^2. \end{cases}$$

2. Задать системой неравенств множество точек параллелограмма с вершинами $(-3, 1)$, $(2, 4)$, $(6, 2)$, $(1, -1)$.
3. Описать одной или несколькими системами неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

параллелограмм со сторонами $x = 3,\ x = 5,\ 3x - 2y + 4 = 0,\ 6x - 4y + 2 = 0$.

4. В декартовой прямоугольной системе координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 25, \\ x^2 + y^2 < 3. \end{cases}$$

5. Задать системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$

часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченную параболоидом $2az = x^2 + y^2$ и шаром $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

6. Является ли областью множество точек пространства $\mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 4 < x^2 + y^2 < 10, \\ -1 < y < 1. \end{cases}$$

7. Найти и изобразить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции

$$z = \frac{x}{\sqrt{x-y}} + \frac{y}{\sqrt{x+y}},\ (x,y) \in X.$$

8. Выразить объем прямоугольного параллелепипеда как функцию от длины диагонали l_1, длины диагонали основания l_2 и угла φ между диагональю основания и одной из сторон.
9. Найти семейства линий уровня для функции и построить ее график:

$$z = x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

10. Найти поверхности уровня функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

11. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^4y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
12. Исследовать на непрерывность функцию

$$z = \frac{2x-3}{x^2+y^2-4},\ (x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

13. Температура T точки остывающего стержня является функцией от двух переменных – расстояния точки x от начала стержня и момента времени t. Указать физический смысл частных производных $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$.
14. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$:

    а) $z = \left(x^2+y^2\right)^3$; б) $x = \rho\cos\varphi$; в) $z = (\sin x)^{\cos y}$;

    г) $y = \frac{t}{\alpha} + t\sin\alpha$.

15. Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ (h – высота, R и r – радиусы оснований) меняется в зависимости от изменения одного из радиусов, например R. Определить приближенно изменение при этом объеме: а) в общем виде; б) при $R = 10$ см, $r = 4$ см, $h = 5$ см, $\Delta R = 0,1$ см.
16. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

$$\sin 59^\circ \operatorname{tg} 46^\circ.$$

17. $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, где $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$ и dz.
18. Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}^2$, заданной неявно уравнением

$$z^3 - 3xyz = a^3.$$

19. Найти y', y'' для неявной функции $y : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, заданной уравнением $x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1$ при $x = 0$, если $y(0) = 1$.
20. Разложить функцию по формуле Тейлора – Маклорена, ограничиваясь членами второго порядка включительно:

$$f(x, y) = \ln(x - 2y), \ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

21. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

22. Исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи: $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, при $x + y = 2a$ $(a > 0)$.
23. Найти наибольшее и наименьшее значения заданной функции в указанной области: $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в области $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4$.

Вариант 2

1. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

2. Задать системой неравенств множество точек кругового сегмента, ограниченного окружностью

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$

и отрезком прямой $x - 2y + 1 = 0$.

3. Описать одной или несколькими системами неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

часть плоскости xOy декартовой прямоугольной системы координат, ограниченной параболами: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

4. В декартовой прямоугольной системе координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} z - x^2 - y^2 > 0, \\ x^2 + y^2 - z > 9. \end{cases}$$

5. Задать системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$

часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченную плоскостями:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 4,\ x + y + z = 8.$$

6. Является ли областью множество точек пространства $\mathbb{R}^2$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$4 < x^2 + y^2 < 25.$$

7. Найти и изобразить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}},\ (x, y) \in X.$$

8. Выразить объем конуса как функцию от угла осевого сечения конуса α и от радиуса r шара, вписанного в конус.
9. Найти семейства линий уровня для функции и построить ее график: $z = x + y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
10. Найти поверхности уровня функции $u = x + y + z,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
11. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$.
12. Исследовать на непрерывность функцию

$$z = \frac{x - y}{x + y},\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

13. Прогиб u колеблющейся прямоугольной пластинки в точке (x, y) в момент времени t является функцией от координат x, y точки и от $u = u(x, y, t)$. Указать физический и геометрический смысл частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}$.
14. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$:

а) $z = x^2y - xy^2 + 3$; б) $z = \frac{x}{y}e^{xy}$; в) $z = xy - \frac{y}{x}$; г) $z = \frac{2x+3y}{x-y}$.

15. В треугольнике измерены стороны

$$a = 31,4\,\text{см} \pm 0,15\,\text{см},\ b = 26,2\,\text{см} \pm 0,1\,\text{см},\ c = 42,3\ \text{см} \pm 0,3\ \text{см}.$$

Найти углы и площадь треугольника и оценить погрешность найденных величин.

16. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

$$\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}.$$

17. $z = x^2 + xy + y^2$, где $x = \sin t$, $y = \cos t$. Найти $\frac{dz}{dt}$ и dz.
18. Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, заданной неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

19. Найти y'' при $x = 0$ для неявной функции $y : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, определенной уравнением $x^3y^2 - xy^5 + 5x + y = 0$.
20. Разложить функцию по формуле Тейлора – Маклорена, ограничиваясь членами второго порядка включительно:

$$f(x, y) = \sqrt{x + y},\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

21. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3y^2(6 - x - y),\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$.
22. Исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи:

$$z = e^{xy},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{при } x + y = 1.$$

23. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в замкнутой области, заданной неравенствами: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x + y \leqslant 1$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 3

1. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств
$$x \leqslant y \leqslant x^2.$$
2. Задать системой неравенств множество точек сегмента, отсекаемого от параболы $y = x^2 - 6$ прямой $y = 2x + 1$.
3. Описать одной или несколькими системами неравенств вида
$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$
область, заданную системой неравенств
$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 4.$$
4. В декартовой прямоугольной системе координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0, \\ x + y - 2z > 0. \end{cases}$$
5. Задать системой неравенств вида
$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$
часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченную поверхностями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$ $(y > 0)$.
6. Является ли областью множество точек, удовлетворяющих следующим условиям: множество $A \cup B$, где $A \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 100$, а $B \subset \mathbb{R}^2$ – из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x-2)^2 + (y+3)^2 < 144$.

7. Найти и изобразить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции

$$z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}, \ (x, y) \in X.$$

8. Выразить давление газа как функцию объема V и абсолютной температуры T. Найти область определения аналитического выражения этой функции. Какие значения аргументов имеют физический смысл?
9. Найти семейства линий уровня для функции и начертить ее график:

$$z = x^2 - y^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

10. Найти поверхности уровня функции

$$u = x^2 + y^2 - z^2, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

11. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.
12. Исследовать на непрерывность функцию

$$z = \frac{x - y^2}{x + y^2}, \ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

13. Температура T воздуха в некоторой точке земной поверхности является функцией от трех переменных: долготы точки λ, ее широты θ и момента времени t. Указать физический смысл частных производных $\frac{\partial T}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial T}{\partial \theta}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$.
14. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$:

    а) $z = x - 3 \sin y$; б) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$; в) $z = \ln\left(x^2 + y\right)$;

    г) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

15. Показать, что при вычислении периода T колебания маятника по формуле $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести) относительная погрешность не превосходит полусуммы относительных погрешностей, допущенных при определении величин l и g (все погрешности предполагают достаточно малыми).
16. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

$$0,97^{1,05}.$$

17. $z = e^{x_y}\ln(x+y)$, где $x = t^3$, $y = 1 - t^3$. Найти $\frac{dz}{dt}$ и dz.
18. Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, заданной неявно уравнением

$$\frac{x}{z} = \ln\frac{x}{y}.$$

19. Найти d^2z в точке $(1,0)$ для неявной функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, определяемой уравнением

$$xz^5 + y^3z - x^3 = 0,$$

если $z(1,0) = 1$.
20. Разложить функцию по формуле Тейлора – Маклорена, ограничиваясь членами второго порядка включительно:

$$f(x,y) = e^{x+y},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

21. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
22. Исследовать функцию на условный экстремум при данном уравнении связи:

$$z = xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{при } x^2 + y^2 = 1.$$

23. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанной области: $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leqslant 1$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 4

1. В декартовой прямоугольной системе координат на плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y - 26 > 0.$$

2. Задать системой неравенств множество точек плоскости (x, y), таких, что эти точки лежат выше прямой $x - 3y + 4 = 0$ и вне круга радиуса 10 с центром в точке $(2, -1)$.
3. Описать одной или несколькими системами неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

область, ограниченную прямыми линиями $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.
4. В декартовой прямоугольной системе координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} z > x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16. \end{cases}$$

5. Задать системой неравенств вида

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$

часть пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченную шаром $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $x^2 = y^2 + z^2$ $(x \geqslant 0)$.
6. Является ли областью множество точек, удовлетворяющих следующим условиям: множество, состоящее из двух открытых кругов радиуса 6 с центрами в точках $(0, 0)$ и $(12, 0)$ соответственно.

7. Найти и изобразить в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$, являющееся областью определения функции

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}},\ (x, y) \in X.$$

8. Выразить ток в электрической цепи как функцию электродвижущей силы ε и сопротивления R. Какие значения аргументов имеют физический смысл?
9. Найти семейства линий уровня для функции и начертить ее график:

$$z = \frac{x}{y},\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

10. Найти поверхности уровня функции

$$u = (z + y)^2 + x^2,\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

11. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$.
12. Исследовать на непрерывность функцию

$$z = \frac{x - y}{x^3 - y^3},\ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

13. Длина стороны a треугольника выражается через противолежащий угол α и длины двух других сторон b, c по формуле $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Какой смысл имеют частные производных $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$, $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$?
14. Найти все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданных ниже функций $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$:

    а) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; б) $u = \frac{x}{y^2}$; в) $z = \left(\frac{y}{x}\right)^x$; г) $u = \frac{x}{y^2}$.

15. При измерении радиуса основания r и высоты h цилиндра были получены следующие результаты:

$$r = 3 \text{ м} \pm 0,1 \text{ м}, \ h = 5 \text{ м} \pm 0,2 \text{ м}.$$

С какой абсолютной и относительной погрешностью может быть вычислен объем цилиндра?

16. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

$$2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2.$$

17. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, где $y = e^{(1+x)^2}$. Найти $\frac{dz}{dx}$ и dz.
18. Найти частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядка функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, заданной неявно уравнением

$$5\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2(xy + yz + xz) = 72.$$

19. Найти d^2z в точке $(1, 2)$ для неявной функции $z : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, определяемой уравнением $x - yz + e^z = 0$, если $z(1, 2) = 0$.
20. Разложить данную функцию по формуле Тейлора – Маклорена, ограничиваясь членами второго порядка включительно:

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{y}, \ (x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2.$$

21. Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
22. Исследовать заданную функцию на условный экстремум при данном уравнении связи:

$$u = x^2y^2z^4 \text{ при } 2x + 3y + 4z = 0.$$

23. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в указанной области: $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в области $y^2 \leqslant x \leqslant 2$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

   1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)\,dx$, 1.2. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$, 1.3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

2. Вычислить данные повторный и двойной интегралы:

   2.1. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$, 2.2. $\iint\limits_P (x-y)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми

$$y = 0,\ y = x,\ x + y = 2.$$

3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования: $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$, где область интегрирования P – круг $x^2 + y^2 \leqslant ax$.
4. Произвести указанную замену переменных и расставить пределы интегрирования:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy,\ (0 < a < b,\ 0 < \alpha < \beta),$$

   если $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.
5. Вычислить данный интеграл с помощью перехода к полярным координатам: $\iint\limits_P \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}dxdy$, где P – круг $x^2 + y^2 \leqslant rx$.
6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$.
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданной кривой, с помощью преобразования к полярным координатам: $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

8. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостями $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$.
9. Найти площадь части поверхности шара $x^2+y^2+z^2 = 100$, заключенной между плоскостями $x = -8$ и $x = 6$.
10. Найти массу круга, плотность которого в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до контура круга.
11. Найти координаты центра тяжести указанной однородной плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ и осью Ox.
12. Вычислить момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.
13. Пластинка, имеющая форму полукруга радиусом a, погружена вертикально в жидкость так, что горизонтальный диаметр AB, служащий ее основанием, находится внутри жидкости, а вершина O полукруга соприкасается с поверхностью жидкости. Вычислить давление на пластинку, если плотность жидкости равна γ_0.
14. Расставить пределы интегрирования, если интегрирование производить в последовательности: а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$, где область интегрирования V ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = 1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$$

15. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, где область интегрирования V ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.
16. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant z,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}.$$

17. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz$ в виде одного из повторных в сферической системе координат, если

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 8z - 8,\ (x^2 + y^2) \leqslant z^2\}.$$

18. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = z, \quad y = x^2.$$

19. Определить массу сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.
20. Найти моменты инерции относительно заданных осей однородного тела плотностью γ, ограниченного заданными поверхностями: $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$, $z = c$ относительно осей координат.
21. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 3z^2, \quad z = H.$$

22. Найти силу, с которой однородный конус плотностью γ притягивается его вершиной, если радиус основания конуса равен R, а длина образующей равна L.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:
   1.1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{6-x} f(x,y)\,dy$, 1.2. $\int\limits_{-6}^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$, 1.3. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx$.
2. Вычислить данные повторный и двойной интегралы:
   2.1. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-2\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \left(x^2+y^2\right) dy$, 2.2. $\iint\limits_P \frac{x^2}{y^2} dxdy$, где область интегрирования P ограничена кривыми $x=2$, $y=x$, $xy=1$.
3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования: $\iint\limits_P f(x,y)dxdy$, где область интегрирования P является общей частью двух кругов $x^2+y^2 \leqslant ax$ и $x^2+y^2 \leqslant by$.
4. Произвести указанную замену переменных и расставить пределы интегрирования:
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy,$$
если $u=x+y$, $v=x-y$.
5. Вычислить данный интеграл с помощью перехода к полярным координатам: $\iint\limits_P ydxdy$, где P – верхний полукруг радиуса a с центром в точке $(a,0)$.
6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми
$$x=y,\ x=2y,\ x+y=a,\ x+3y=a\ (a>0).$$
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданной кривой, с помощью преобразования к полярным координатам:
$$\left(x^2+2y^2\right)^3 = xy^4.$$

8. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (пирамида).
9. Вычислить площадь части поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащей над плоскостью xOy и отрезанной плоскостью $z=\sqrt{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$.
10. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых r и R $(r<R)$. Найти массу кольца, если известно, что плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей и плотность на окружности внутреннего круга равна единице.
11. Найти координаты центра тяжести указанной однородной плоской фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r=a\left(1+\cos\varphi\right).$$

12. Вычислить момент инерции квадрата со стороной a относительно одной из вершин.
13. Прямой круговой цилиндр погружен в наполненный жидкостью сосуд так, что его середина находится на глубине c под поверхностью жидкости, а ось цилиндра составляет с вертикалью угол α. Длина цилиндра равна l, радиус основания a. Вычислить давление на нижнее и верхнее основания цилиндра, если плотность жидкости равна γ_0.
14. Расставить пределы интегрирования, если интегрирование производить в последовательности: а) x,y,z; б) y,x,z; в) z,x,y: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где область интегрирования V ограничена поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

15. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xdxdydz$, где область интегрирования V ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$, $x+z=a$.
16. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если

$$V=\{(x,y,z):(x-R)^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ \ x^2+(y-R^2)+z^2\leqslant R^2\}.$$

17. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в сферической системе координат, если

$$V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2yR, \quad x^2 + y^2 \geqslant z^2\}.$$

18. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$az = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \ (a > 0).$$

19. Вычислить массу тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиуса R, высоты H, если его плотность в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.
20. Найти моменты инерции относительно заданных осей однородного тела плотностью γ, ограниченного заданными поверхностями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $z + x = 4$, – относительно осей координат.
21. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)\,.$$

22. Найти силу, с которой однородный цилиндр плотностью γ притягивается к центру своего основания, если радиус основания цилиндра равен R и высота равна H.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

   1.1. $\int\limits_{-3}^{0} dx \int\limits_{-x}^{3} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{3} f(x,y)\,dy,$

   1.2. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

2. Вычислить данные повторный и двойной интегралы:

   2.1. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} rdr$, 2.2. $\iint\limits_{P} (x-y)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми $y=0$, $y=x$, $x+y=2$.

3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования: $\iint\limits_{P} f(x,y)dxdy$, где P – треугольник, ограниченный прямыми $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

4. Произвести указанную замену переменных и расставить пределы: $\iint\limits_{P} f(x,y)dxdy$, где область интегрирования P ограничена кривой

$$\left(x^2+\frac{1}{3}y^2\right)^2 = x^2y, \text{ если } x=\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt{3}\rho\sin\varphi.$$

5. Вычислить данный интеграл с помощью перехода к полярным координатам: $\iint\limits_{P} \left(x^2+y^2\right) dxdy$, где P – круг $x^2+(y+2)^2 \leqslant 4$.

6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой: эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданной кривой, с помощью преобразования к полярным координатам:
$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=x^2y.$$
8. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $2x+3y-12=0$ и цилиндром $z=\frac{y^2}{2}$.
9. Вычислить полную поверхность тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=2az$ $(z\geqslant 0)$.
10. На фигуре, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, распределена масса так, что плотность ее пропорциональна расстоянию от оси абсцисс, причем при $y=1$ она равна γ. Найти массу всей фигуры.
11. Найти координаты центра тяжести указанной однородной плоской фигуры, ограниченной параболой
$$y=2x-3x^2$$
и осью Ox.
12. Вычислить момент инерции полукруга относительно его диаметра.
13. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h. Вычислить силу давления воды на каждую из сторон пластинки.
14. Расставить пределы интегрирования, если интегрирование производить в последовательности: а) x,y,z; б) y,x,z; в) z,x,y: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где область интегрирования V ограничена плоскостями
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0\quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$$
15. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \rho\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$, где $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.
16. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если
$$V=\{(x,y,z): x^2+y^2=2ax,\quad x^2+y^2\leqslant a^2-az,\quad z\geqslant 0\}.$$

17. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в сферической системе координат, если

$$V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \geqslant R^2, \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 2zR\}.$$

18. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$x+y+z=a,\ x+y+z=2a,\ x+y=z,\ x+y=2z.$$

19. Определить массу тела, ограниченного поверхностями

$$z=h \text{ и } x^2+y^2-z^2=0,$$

если плотность в каждой точке пропорциональна аппликате этой точки.

20. Найти моменты инерции относительно заданных осей однородного тела плотностью ρ, ограниченного заданными поверхностями: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, относительно осей координат.

21. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями:

$$x+y=1, \quad z=x^2+y^2, \quad x=0,\ y=0,\ z=0.$$

22. Найти силу, с которой однородный конус плотностью γ притягивается его вершиной, если радиус основания конуса равен R, а длина образующей равна L.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

   1.1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\,dx$,

   1.2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{10-x} f(x,y)\,dy + \int\limits_4^7 dx \int\limits_{x-4}^{10-x} f(x,y)\,dy$.

2. Вычислить данные повторный и двойной интегралы:

   2.1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$, 2.2. $\iint\limits_P \cos(x+y)\,dxdy$, где область интегрирования P ограничена прямыми $x=0$, $y=\pi$, $y=x$.

3. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

$$\int\limits_0^{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}} dx \int\limits_0^{rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int\limits_{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}}^{r} dx \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

4. Произвести указанную замену переменных и расставить пределы: $\int\limits_0^a dx \int\limits_{mx}^{nx} f(x,y)dy$, где $a>0$, $0<m<n$, если $u=x+1$, $uv=y$.
5. Вычислить данный интеграл с помощью перехода к полярным координатам: $\iint\limits_P \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, где P – часть круга $x^2+y^2\leqslant 1$, лежащая в первом квадранте.
6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y^2 = 10x+25,\ y^2 = -6x+9.$$

7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданной кривой, с помощью преобразования к полярным координатам:
$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a\left(x^3-3xy^2\right) \ \ (a>0).$$
8. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $z = 4-y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ и плоскостью $z = 0$.
9. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = 1$.
10. Найти массу прямоугольной фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, если плотность в каждой точке равна кубу абсциссы, умноженному на квадрат ординаты этой точки.
11. Найти координаты центра тяжести указанной однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^3$ и $y^2 = 2x$.
12. Вычислить момент инерции круга относительно касательной.
13. С какой силой плоский диск радиусом R и массой M притягивает материальную точку массой m, которая лежит на прямой, перпендикулярной диску и проходящей через его центр, на расстоянии a от центра.
14. Расставить пределы интегрирования, если интегрирование производить в последовательности: а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x;y;z)dx$.
15. Вычислить тройной интеграл
$$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz,$$
где $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.
16. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде одного из повторных в цилиндрической системе координат, если
$$V = \{(x,y,z) : 4x^2+3y^2+z^2 \leqslant 48, 2ax, \ \ 0 \leqslant 2z \leqslant 4x^2+3y^2\}.$$
17. Записать интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$в виде одного из повторных в сферической системе координат, если
$$V = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4Rz, \ \ x^2+y^2+z^2 \geqslant Rz, \ \ x^2+y^2 \leqslant \frac{z^2}{3}\right\}.$$

18. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$y^2 = 4a^2 - 3ax, \quad y^2 = ax, \quad z = \pm h.$$

19. Определить массу пирамиды, образованной плоскостями

$$x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

если плотность в каждой ее точке пропорциональна аппликате этой точки.

20. Найти моменты инерции относительно заданных осей однородного тела плотностью γ, ограниченного заданными поверхностями: $x^2 + y^2 - ax = 0$, $z^2 = 2ax$, $z = 0$ $(z > 0)$, – относительно осей координат.

21. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = x^2 + y^2.$$

22. Найти силу, с которой однородный цилиндр плотностью γ притягивается к центру своего основания, если радиус основания цилиндра равен R и высота равна H.

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

Варианты заданий для индивидуальной работы 3

Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y ds$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, \sqrt{2})$.
2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ по окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ в положительном направлении.
3. Вычислить интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от кривой на плоскости, соединяющей точки $(0, 1)$ и $(1, 2)$:
$$\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy.$$
4. Проверить, является ли данное выражение полным дифференциалом функции двух переменных, и если да, то найти эту функцию:
$$\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right) dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right) dy.$$
5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$ с помощью формулы Грина – Остроградского, где L – контур треугольника с вершинами $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$, ориентированный в положительном направлении. Проверить результат непосредственным вычислением криволинейного интеграла.
6. Вычислить с помощью криволинейного интеграла длину кривой:
$$x = \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{2}\ln y \quad (0 \leqslant y \leqslant e).$$
7. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8. Найти массу дуги эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, если плотность ее в точке (x, y) равна $\gamma(x, y) = |y|$.
9. Найти центр тяжести дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, расположенной над осью Ox.
10. В каждой точке плоскости действует сила F, проекции которой на координатные оси равны $F_x = xy$, $F_y = x + y$. Вычислить работу силы при перемещении точки с массой, равной единице, из начала координат в точку $(1, 1)$: а) по прямой $y = x$; б) по параболе $y = x^2$.
11. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_s yz dS$, где S – удовлетворяющая условию $z > y > 0$ часть поверхности, полученной вращением кривой $y = \cos x$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, относительно оси Ox.
12. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdz$, где S – часть внешней стороны конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $0 \leqslant y \leqslant b$.
13. Найти массу части однородного параболоида $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, плотности γ.
14. Найти момент инерции части однородной верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ плотности γ, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, относительно плоскости yOz.
15. Найти координаты центра масс однородной полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.
16. Найти циркуляцию векторного поля $F = (xy, yz, xz)$ вдоль положительно ориентированного контура

$$L = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\right\}$$

на верхней стороне плоскости.
17. Найти работу поля F вдоль кривой L, если $F = \left(2xy, x^2\right)$ и L есть меньшая дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1, 0)$ до точки $(0, 1)$.
18. Найти поток векторного поля F через поверхность S в направлении внешней нормали: $F = \left(0, y^2, z\right)$, S – часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 2$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 3

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L x^2 ds$, где (L) – верхняя половина окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2+y^2}$ вдоль правого лепестка лемнискаты

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

в положительном направлении.

3. Вычислить данный интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от кривой на плоскости, соединяющей точки $(2, 1)$ и $(1, 2)$:

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}.$$

4. Проверить, является ли данное выражение полным дифференциалом функции двух переменных, и если да, то найти эту функцию:

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (y - x^2)dx + (x + y^2)dy$, где контур L ограничивает круговой сектор радиуса R с углом φ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, с помощью формулы Грина – Остроградского. Проверить результат непосредственным вычислением криволинейного интеграла.

6. Вычислить с помощью криволинейного интеграла длину кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

7. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),\ \ y = a(2\sin t - \sin 2t).$$

8. Найти массу дуги параболы $y = \frac{x^2}{2}$, лежащей между точками $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $(2, 2)$, если ее плотность $\gamma(x, y) = \frac{y}{x}$.
9. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса a при центральном угле 2φ.
10. В каждой точке окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ приложена сила $F = (x + y, x)$. Определить работу силы F при перемещении материальной точки m по окружности. Почему здесь работа равна нулю?
11. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{2-y^2-z^2}}$, где S есть поверхность, полученная вращением линии $L = \{(x, y) : y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leq \pi\}$ относительно оси Ox.
12. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) dydz$, где S – часть внешней стороны цилиндра $x = \sqrt{9 - y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 2$.
13. Найти массу части цилиндра $x^2 + y^2 = 2az$, лежащей внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$, если плотность $\gamma = |y|$.
14. Найти момент инерции части однородного цилиндра $x^2 + y^2 = ax$ плотности γ, лежащей внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, относительно плоскости xOz.
15. Найти координаты центра масс верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \geqslant 0$, если поверхностная плотность в каждой ее точке равна расстоянию от этой точки до оси Oz.
16. Найти циркуляцию векторного поля $F = (ye^{xy}, xe^{xy}, xyz)$ вдоль положительно ориентированного контура

$$L = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (z-1)^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\right\}$$

на внутренней стороне конуса.
17. Найти работу поля F вдоль кривой L, если $F = \left(2xy, y^2, -x^2\right)$ и L – часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $(1, 1, 0)$ до точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.
18. Найти поток векторного поля F через поверхность S в направлении внешней нормали: $F = \left(x^2, y^2, z^2\right)$, S – нижняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 3

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, где L – кривая

$$x = a(\cos t + \sin t),\ y = a(\sin t - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x^2-y^2)dx + (x^2+y^2)dy$ в положительном направлении по эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. Вычислить интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от кривой на плоскости, соединяющей точки $(-2,-1)$ и $(3,0)$:

$$\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)dx + (6x^2y^2-5y^4)dy.$$

4. Проверить, является ли данное выражение полным дифференциалом функции двух переменных, и если да, то найти эту функцию:

$$\frac{(x^2+2xy+5y^2)dx + (x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} e^x\left[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy\right]$, где (L) – пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sin x$, с помощью формулы Грина – Остроградского. Проверить результат непосредственным вычислением криволинейного интеграла.
6. Вычислить с помощью криволинейного интеграла длину кривой $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $(0 \leqslant x \leqslant x_0)$.
7. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной петлей декартова листа $x^3+y^3 = 3axy$ $(a>0)$ (положить $y = tx$).

8. Вычислить массу кривой $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$ на участке от $t = 0$ до $t = 1$, если ее плотность $\gamma(x,y) = \frac{y}{e^x}$.
9. Вычислите с помощью криволинейного интеграла координаты центра тяжести кривой

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant \pi).$$

10. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_s (x+y)dS$, где S – лежащая в первом октанте ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$) часть поверхности, полученная вращением арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, вокруг оси Ox.
11. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \left(x^4 + y^4 + 2a^2z^2\right) dxdy$, где S – часть нижней стороны параболоида $az = xy$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $\left(x^2+y^2\right)^2 = bxy$.
12. Найти массу части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2az$, если плотность $\gamma = x$.
13. Найти момент инерции однородной поверхности плотности γ, полученной при вращении одной арки циклоиды $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$ вокруг оси Ox, относительно оси Oz.
14. Найти координаты центра масс однородной поверхности, полученной от вращения кривой $y = 2px$, $0 \leqslant x \leqslant p$, относительно оси Ox.
15. Найти циркуляцию вектора $F = \left(y^2, xy, x^2+y^2\right)$ вдоль положительно ориентированного контура

$$L = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 = az,\ x = 0,\ y = 0,\ z = a,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}$$

на внешней стороне параболоида.
16. Найти работу векторного поля F вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ от точки $(a,0)$ до точки $(0,b)$, где F – сила, имеющая постоянную величину F и направление 1) вдоль оси Ox; 2) вдоль оси Oy.
17. Найти поток векторного поля F через поверхность S в направлении внешней нормали: $F = (2x, -y, z)$, S – поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $3z \leqslant x^2 + y^2$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 3

Вариант 4

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+y)ds$, где L – правый лепесток лемнискаты

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ вдоль кривых: а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = x^3$; г) $y^2 = x$.
3. Вычислить интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от кривой на плоскости, соединяющей точки $(1, \pi)$ и $(2, \pi)$:

$$\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$$

4. Проверить, является ли данное выражение полным дифференциалом функции двух переменных, и если да, то найти эту функцию:

$$\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dx + 2xydy.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)^2dx - (x^2+y^2)dy$, где L – контур треугольника с вершинами $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 5)$, ориентированный в положительном направлении, с помощью формулы Грина – Остроградского. Проверить результат непосредственным вычислением криволинейного интеграла.
6. Вычислить с помощью криволинейного интеграла длину кривой $ay^2 = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 5a$.
7. Вычислить с помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

8. Вычислить массу четвертой части эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащей в первом квадранте, если ее плотность $\gamma(x,y)=xy$.
9. Вычислите с помощью криволинейного интеграла координаты центра тяжести кривой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.
10. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащую в первом квадранте.
11. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_s (x^2+y^2+z^2)dS$, где S – поверхность, полученная вращением кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ относительно полярной оси (декартова и полярная системы координат совмещены).
12. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)dxdy$, где S – часть верхней стороны цилиндра $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leqslant y\leqslant b$.
13. Найти массу части конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leqslant z\leqslant 4$, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до вершины.
14. Найти момент инерции однородной поверхности $x^2+y^2=2ax$, $x^2\geqslant y^2+z^2$ плотности γ относительно оси Oz.
15. Найти координаты центра масс части однородной поверхности $x^2+y^2=2cz$, $0\leqslant z\leqslant c$.
16. Найти циркуляцию векторного поля $F=\left(z^3,x^3,y^3\right)$ вдоль положительно ориентированного контура
$$L=\left\{(x,y):\ 2x^2+z^2-y^2=a^2,\ x+y=0\right\}$$
на правой стороне плоскости.
17. Под действием силы тяжести, направленной по оси Oz, тело единичной массы скатывается от точки $(a,0,2\pi b)$ до точки $(a,0,0)$ по спирали $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=b\,(2\pi-\varphi)$. Найти работу поля при таком перемещении.
18. Найти поток векторного поля F через поверхность S в направлении внешней нормали:
$$F=\left(x^3+yz,y^3+xz,z^3+xy\right),$$
S – верхняя полусфера $x^2+y^2+z^2=16,\ z\geqslant 0$.

Предметный указатель

n-мерное евклидово пространство 12
n-мерный куб 14
n-мерный параллелепипед 13

Внутренность множества 14

Градиент 120, 511
Граница множества 15

Дивергенция 511
Дифференциал функции 73

Замкнутое множество 15
Замкнутый шар 13
Замыкание множества 15

Интеграл
- Дарбу 215, 329
- Тройной 328
- двойной 212
- криволинейный второго рода 414
- криволинейный первого рода 385
- поверхностный второго рода 495
- поверхностный первого рода 457

Интегральная сумма Римана 212, 328

Касательная плоскость к поверхности 80
Квадратичная форма 164
- знакоопределенная 164

Концы кривой 382
Кривая
- Жорданова 382
- гладкая 382
- кусочно-гладкая 382
- ориентированная 411, 421

Криволинейный цилиндр 210

Линейно связное множество 46

Мелкость разбиения 210, 326
Метод неопределенных множителей Лагранжа 184
Множество уровня 34
Модуль вектора 10
Момент инерции 270, 368, 471

Непрерывное отображение 46
Неравенство Коши – Буняковского 11
Нормаль к поверхности 80

Область 46
- замкнутая 46
- односвязная 427

Ограниченное множество 15
Окрестность точки 14
Ориентация поверхности 492
Ориентирующее поле нормалей 492
Открытое множество 13
Открытый шар 13

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП

Параметризация кривой 382
Поле векторное 511
Поле скалярное 511
Последовательность точек 16
  сходящаяся 16
Потенциал векторного поля 512
Поток векторного поля 514
Предел функции 36
  по подмножеству 39
Приращение функции
  полное 69
  частное 69
Производная по направлению вектора 117
Путь 46

Разбиение множества 209, 326
Ротор 512

Скалярное произведение векторов 10
След пути 46
Статический момент 266, 367, 468
Суммы Дарбу 214, 328

Теорема
  Больцано – Вейерштрасса 17
  Кантора 46
  Шварца 93
  достаточное условие дифференцируемости 77
  достаточное условие локального экстремума 165
  критерий Сильвестра 165
  необходимое условие локального экстремума 162
  о восстановлении функции по ее полному дифференциалу 432
  о замене переменных в двойном интеграле 233
  о замене переменных в тройном интеграле 337
  о сведении двойных интегралов к повторным 218, 223, 226
  о сведении тройных интегралов к повторным 332, 334, 335
  о связи дифференцируемости и существования частных производных 75
  о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода 415
  о существовании и вычислении криволинейного интеграла первого рода 385
  о существовании и вычислении поверхностного интеграла второго рода 497
  о существовании и вычислении поверхностного интеграла первого рода 457
  о четырех равносильных условиях для криволинейного интеграла второго рода 427
Точка
  внутренняя 14
  граничная 15
  изолированная 15
  максимума 161
  минимума 161
  предельная 14

Формула
Грина 422, 425
Остроградского – Гаусса 506, 507, 518
Стокса 500, 503, 518
Тейлора – Маклорена 123
Функция многих переменных 33
дифференцируемая в точке 73
дифференцируемая на множестве 73
заданная неявно 137
непрерывная в точке 42
непрерывная на множестве 44
равномерно непрерывная 44

Центр тяжести 268, 368, 469
Циркуляция векторного поля 513

Частная производная
второго порядка 91
первого порядка 69
смешанная 91

Экстремум функции 161
условный 180

Якобиан функций 148
в полярных координатах 234
в цилиндрических координатах 338, 339

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ УНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

Указатель обозначений

(x, y)

$\mathbb{R}^n$

$B(x, r)$

$\overline{B}(x, r)$

$\mathrm{Int} A$

A'

$\overline{A}$

∂A

$P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$

$Q(x; \delta)$

$= [\ldots] =$

$\mathrm{grad} f$

$\frac{D\Phi}{Dx}$

$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(u_1,\ldots,u_m)}$

$\mathrm{div}\ F$

$\mathrm{rot}\ F$