УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Дифференциальное и интегральное исчисление

Часть 2

Интегральное исчисление функций одной переменной

Электронный учебно-методический комплекс для студентов специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика»

2021

Кафедра
МАДУП

Авторы:

кандидат физико-математических наук, доцент **С.А. Марзан**
кандидат физико-математических наук, доцент **А.Н. Сендер**
кандидат физико-математических наук, доцент **Н.Н. Сендер**

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент **А.А. Трофимук**

кафедра высшей математики учреждения образования
«Бррестский государственный технический университет»
заведующий кафедрой – кандидат технических наук, доцент
Л.П. Махнист

доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»,
кандидат физико-математических наук, доцент
А.А. Трофимук

Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2021. – Ч. 2: Интегральное исчисление функций одной переменной. – 401 с.

Учебно-методический комплекс содержит курс лекций и практических занятий, вопросы и тестовые задания для самоконтроля, а также задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальных работ по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной».

Предназначен студентам специальностей «Прикладная математика» и «Экономическая кибернетика» учреждений высшего образования.

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) содержит курс лекций и практических занятий, задания для подготовки к экзамену и зачету, варианты заданий для индивидуальной работы, а также интерактивные тестовые задания для самоконтроля по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Дифференциальное и интегральное исчисление» учебного модуля «Математический анализ».

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы с пособием необходим компьютер, планшет или смартфон с любой операционной системой, на котором установлена программа для чтения документов формата pdf, например, Adobe Acrobat Reader. Для работы с тестовыми заданиями требуется подключение к сети интернет. Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов.

После запуска ЭУМК в правой части экрана читатели увидят навигационную панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУМК на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

ЭУМК является второй частью следующей серии учебно-методических комплексов для студентов специальностей 1–31 03 03–01 «Прикладная математика» и 1–31 03 06–01 «Экономическая кибернетика» по учебной дисциплине «Дифференциальное и интегральное исчисление»:

1. Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть 2. Интегральное исчисление функций одной переменной.

3. Дифференциальное и интегральное исчисление. Часть 3. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

ЭУМК разработан в соответствии с ОСВО 1–31 03 03–01–2021 специальности «Прикладная математика» и ОСВО 1–31 03 06–01–2021 «Экономическая кибернетика».

ЭУМК обеспечивает достижение основной дидактической цели – самообразования. В условиях постоянно возрастающего объема научной и учебной информации количество часов, предусмотренных учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУМК содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы с наиболее способными студентами.

Тесты, включенные в ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. В ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач и основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и приобретению навыка решения задач.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
	Неопределенный интеграл	**10**	**12**
1	**Понятие и свойства неопределенного интеграла.** Задача восстановления функции по ее производной. Понятие первообразной и ее основное свойство. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование	2	2
2	**Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.** Теорема о подстановке в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	2	4
3	**Интегрирование рациональных функций.** Разложение рациональных дробей на элементарные. Интегрирование элементарных рациональных дробей. Метод Остроградского	2	2
4	**Интегрирование простейших иррациональных функций.** Простейшие подстановки. Подстановки Эйлера. Интегралы от дифференциальных биномов	2	2
5	**Интегрирование некоторых трансцендентных функций.** Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$. Интегралы типа $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$. Интегралы типа $\int R(e^x)dx$	2	2
	Определенный и несобственный интеграл	**26**	**20**
1	**Интеграл Римана.** Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла (интеграла Римана), его геометрический и механический смысл. Необходимые условия интегрируемости функции	2	1
2	**Суммы Дарбу.** Нижние и верхние суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости функции	2	
3	**Классы интегрируемых функций.** Интегрируемость непрерывных функций. Интегрируемость монотонных функций. Критерий Дарбу интегрируемости функции. Критерий Римана интегрируемости функции. Интегрируемость некоторых классов разрывных функций	2	

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
4	**Свойства определенного интеграла.** Основные свойства определенного интеграла, связанные с равенствами. Основные свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций. Теоремы о среднем значении для определенного интеграла. Интегральные неравенства Гельдера, Минковского, Коши – Буняковского	4	1
5	**Формула Ньютона – Лейбница.** Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница	2	1
6	**Вычисление определенного интеграла.** Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Остаток формулы Тейлора в интегральной форме.	2	1
7	**Приложения определенного интеграла.** Понятие квадрируемости и площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости плоских фигур. Квадрируемость криволинейной трапеции. Квадрируемость криволинейного сектора. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме. Понятие кубируемости и объема тел. Критерий кубируемости тел. Некоторые классы кубируемых тел. Площадь поверхности вращения. Спрямляемая кривая и ее длина Метод определенного интеграла при решении задач. Масса материальной кривой. Статичные моменты и центр тяжести материальной кривой. Первая теорема Паппа-Гульдина. Масса материальной плоской фигуры. Статичные моменты и центр тяжести материальной плоской фигуры. Вторая теорема Паппа-Гульдина	8	12
8	**Несобственные интегралы.** Понятие несобственного интеграла. Несобственные нтегралы первого и второго рода. Основные свойства несобственных интегралов. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов	2	2

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
9	**Исследование сходимости несобственных интегралов.** Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Критерий сходимости несобственных интегралов неотрицательных функций. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения). Понятия абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов. Теорема о сходимости абсолютно сходящихся несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля условной сходимости несобственных интегралов. Главное значение несобственного интеграла	2	2

ЛЕКЦИЯ 1
Понятие и свойства неопределенного интеграла

1.1 Задача восстановления функции по ее производной. Понятие первообразной и ее основное свойство

К числу важных задач механики относится задача о вычислении длины пути при известной скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ее ускорению. Эти задачи приводят к математической проблеме **отыскания функции по заданной производной этой функции**.

Пусть (a, b) конечный или бесконечный интервал числовой прямой $\mathbb{R}$; $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $F : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Функция F называется **первообразной** функции f на интервале (a, b), если:*
1) *F дифференцируема на (a, b);*
2) *$\forall x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$.*

Например, для функции $f(x) = 2x$ на $\mathbb{R}$ первообразной будет функция $F(x) = x^2$, так как $F'(x) = 2x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Нужно заметить, что и функция $\Phi(x) = x^2 + C$, где C – произвольная константа, также будет первообразной для функции $f(x) = 2x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1. *Если функция F является первообразной для функции f на интервале (a, b), то:*

а) *$F + C$ также является первообразной для функции f на интервале (a, b), где C – произвольная действительная постоянная;*

б) *для любой другой первообразной Φ функции f на интервале (a, b) существует такая действительная константа C, что*

$$\Phi(x) = F(x) + C. \tag{1.1}$$

◀Справедливость заключения а) очевидна, докажем б). Рассмотрим на интервале (a, b) функцию $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Ее производная $\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = 0$, и по достаточному условию критерия постоянства функции на промежутке [1, следствие 18.5] получим, что $\varphi(x) = C$. ▶

Замечание 1.1. Понятие первообразной можно рассмотреть на произвольном промежутке X числовой оси $\mathbb{R}$.

Пусть X – произвольный промежуток числовой прямой $\mathbb{R}$; $f : X \to \mathbb{R}$, $F : X \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. *Функция F называется **первообразной** функции f на X, если*
1) функция F непрерывна на промежутке X;
2) во всех внутренних точках x промежутка X функция F имеет производную $F'(x) = f(x)$.

1.2 Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла

Пусть функция f на интервале (a, b) имеет первообразную F.

Определение 1.3. *Множество всех первообразных функции f на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** этой функции на (a, b) и обозначается*

$$\int f(x)dx. \tag{1.2}$$

Таким образом, если F – какая-либо первообразная функции f на интервале (a, b), то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1.3}$$

где C – произвольная постоянная, хотя было бы правильнее писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы, как обычно принято, будем употреблять запись (1.3). Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции f, так и любой элемент этого множества, то есть какую-то первообразную функции f.

Функцию f называют **подынтегральной функцией**, а дифференциальную форму $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**, x – переменной интегрирования, C – константой интегрирования. Читают $\int f(x)dx$: «интеграл эф от икс дэ икс».

Примеры:

1. $\int 2x dx = x^2 + C$,

2. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (потому что $(-\cos x)' = \sin x$),

3. $\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0, \\ \ln(x) + C_2, & x > 0 \end{cases}$ (в дальнейшем будем писать $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$).

Следует, однако, иметь в виду, что всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.

Если F – первообразная функции f на интервале (a, b), то согласно определению 1.3 в выражении $\int f(x)dx$ под знаком интеграла стоит дифференциал функции F на интервале (a, b):

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, то есть согласно этому соглашению

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{1.4}$$

Под производной неопределенного интеграла будем понимать производную любой функции из множества всех первообразных. Тогда справедливо равенство

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f.$$

Следует, однако, иметь в виду, что всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.

Так, под **линейной комбинацией неопределенных интегралов** $A = \int f(x)dx$ и $B = \int g(x)dx$ будем понимать множество соответствующих линейных комбинаций первообразных

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha F + \beta G + C : \ F \in A, \ G \in B, \ C - \text{любое число из } \mathbb{R}\},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Пусть F дифференцируема на интервале (a, b). Тогда*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же (*см.* (1.4)):

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

◀Справедливость этого равенства вытекает из определения неопределенного интеграла как совокупности всех функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла (см. (1.4)) и общего вида (1.1) всех первообразных данной функции.▶

2. Свойство линейности неопределенного интеграла. *Если функции f и g имеют первообразные на интервале (a, b), то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, также имеет первообразную на (a, b), а неопределенный интеграл от линейной комбинации функций f и g равен линейной комбинации неопределенных интегралов указанных функций:*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

◀Справедливость свойства линейности следует из определения первообразной, свойства линейности операции дифференцирования, а также понятия линейной комбинации неопределенных интегралов.▶

1.3 Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование

Используя определение неопределенного интеграла, таблицу производных и основные свойства производной, получим так называемую **таблицу основных неопределенных интегралов**:

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$
   $\int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$
    $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

Все приведенные выше формулы справедливы для любых обозначений переменной. Например,

$$\int \cos H dH = \sin H + C.$$

Все формулы из таблицы неопределенных интегралов проверяются непосредственным дифференцированием их правых частей, в результате чего должны получиться подынтегральные функции. Например, для формулы 14 (если $x+\sqrt{x^2+a}<0$) получим:

$$\left(\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right)'=\left(\ln\left(-x-\sqrt{x^2+a}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{-x-\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(-1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Замечание 1.2. Выше уже рассматривалась формула

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C=\begin{cases}\ln(x)+C_1, & x>0,\\ \ln(-x)+C_2, & x<0.\end{cases}$$

Аналогично нужно понимать и некоторые другие формулы таблицы. Например, $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$ нужно рассматривать отдельно на каждом из интервалов $(\pi k,\pi+\pi k), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, причем со своей произвольной константой, не зависящей от других констант такого же типа.

Нахождение неопределенных интегралов с помощью указанной выше таблицы и основных свойств неопределенных интегралов называется **непосредственным интегрированием**.

Пример 1.1. Найдите интеграл $\int\left(-5\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}+\frac{0{,}5}{\sqrt{x^2-3}}\right)dx.$

◀Обозначим интеграл через I. Используя свойство линейности и формулу $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ (справедлива при $x\geqslant0$; при $x<0$ $\sqrt[3]{x}=-(-x)^{1/3}$, но, формально, можно считать и в этом случае $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$), получим:

$$I=-5\int x^{1/3}dx+2\int\frac{dx}{x}+0,5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=-5\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}+2\ln|x|+$$

$$+0,5\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C=-\frac{15}{4}x\sqrt[3]{x}+2\ln|x|+0,5\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C.\ ▶$$

Ниже будет доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. *Если функция f непрерывна на интервале (a, b), то для нее на этом интервале существует первообразная F, а значит, и неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.*

Пока же мы будем изучать основные технические методы нахождения неопределенного интеграла.

Замечание 1.3. Далеко не всякий существующий неопределенный интеграл является элементарной функцией. Такими интегралами будут:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \frac{\sin x}{x}dx$$

и многие другие.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение первообразной функции f на интервале (a, b).
2. Сформулируйте основное свойство первообразной функции на интервале.
3. Дайте определение неопределенного интеграла от заданной функции f на интервале.
4. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения.
5. В чем разница между выражениями $d\int f(x)dx$ и $\int dF(x)$?
6. Проверьте правильность формул таблицы неопределенных интегралов непосредственным дифференцированием правых частей формул.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Непосредственное интегрирование

Задание 1. Найти интеграл $\int \frac{5+7x+x^2}{x\sqrt{x}}dx$.

◀Числитель подынтегральной функции делим почленно на знаменатель. Затем применяем свойство линейности неопределенного интеграла и формулу 1 из таблицы неопределенных интегралов:

$$\int \frac{5+7x+x^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \left(5x^{-\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)dx =$$

$$= \int 5x^{-\frac{3}{2}}dx + \int 7x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 5\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 7\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx = 5\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 7\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= 5\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 7\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{10}{\sqrt{x}} + 14\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти интеграл $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$.

◀В числителе применим формулу куба разности и разделим почленно числитель на знаменатель. Далее поступаем, как в задании 1:

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{\frac{4}{3}}}dx =$$

$$= \int x^{-\frac{4}{3}}dx - 3\int x^{-\frac{1}{3}}dx + 3\int x^{\frac{2}{3}}dx - \int x^{\frac{5}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} - 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2} + \frac{9x\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} + C. \blacktriangleright$$

Замечание 1.4. Ниже мы будем использовать свойство линейности неопределенного интеграла без дополнительных разъяснений.

Задание 3. Найти интеграл $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

$$◀ \int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int\left(1-x^{-2}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4x\sqrt[4]{x^3}}{7}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C. ▶$$

Задание 4. Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$.

$$◀ \int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{\sqrt{x^4+\frac{1}{x^4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{\sqrt{\frac{x^8+2x^4+1}{x^4}}}{x^3}dx=$$

$$=\int\frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^2x^3}dx=\int\frac{x^4+1}{x^5}dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-5}\right)dx=\ln|x|+\frac{x^{-4}}{-4}+C=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C. ▶$$

Задание 5. Найти интеграл $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

$$◀ \int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\frac{x^2-1+4}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=$$

$$=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+4\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C. ▶$$

Задание 6. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$
◀Используем тождество $1 \equiv \frac{1}{5}\left((x^2+3)-(x^2-2)\right)$.
$$\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{(x^2+3)-(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2+3)}dx =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x^2-2} - \int \frac{dx}{x^2+3}\right) = \frac{1}{5}\left(\int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{2})^2} - \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$
◀Используем тождество $1 \equiv \sin^2 x + \cos^2 x$.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \blacktriangleright$$

Задание 8. Доказать, что если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0). \tag{1.5}$$

◀Эту формулу можно доказать с помощью теоремы о подстановке в неопределенном интеграле (указанная теорема будет сформулирована и доказана на следующей лекции). Сейчас же мы ее докажем непосредственным дифференцированием правой части. Используя правила дифференцирования и теорему о производной сложной функции, получим:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' + C' = \frac{1}{a}F'(ax+b)(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b).\ ▶$$

Замечание 1.5. Здесь и далее при оформлении решения для прерывания математических вычислений, преобразований будем использовать запись «$= [\ldots] =$», указывая в квадратных скобках логические пояснения, формулы или свойства, используемые для дальнейших вычислений или преобразований, ссылки на отдельные теоремы, свойства и т.п.

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx.$$

$$◀ \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx = \int \frac{2^x \cdot 2 - 5^x \cdot 5^{-1}}{10^x}dx = \int \left(2\frac{2^x}{10^x} - \frac{1}{5}\frac{5^x}{10^x}\right)dx =$$

$$= 2\int 5^{-x}dx - \frac{1}{5}\int 2^{-x}dx = [\text{используем } (1.5)] = -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C = -\frac{2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{5\cdot 2^x \ln 2} + C.\ ▶$$

Задание 10. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$$

$$◀ \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx = \int \frac{\sqrt[5]{(1-x)^2}}{1-x}dx = \int \frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{1-x}dx =$$

$$= \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx = [\text{используем } (1.5)] = -\frac{(1-x)^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = -\frac{5\sqrt[5]{(1-x)^2}}{2} + C. ▶$$

Задание 11. Найти интеграл

$$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx.$$

◀Сначала выделяем целую часть рациональной дроби, деля числитель на знаменатель. Имеем:

$$\frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1} = 3x^2+2x+\frac{1}{2x-1}.$$

Тогда

$$\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx = \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int \frac{dx}{2x-1} =$$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C. ▶$$

Задание 12. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}.$$

◀Освобождаемся от иррациональности в знаменателе, умножая числитель и знаменатель подынтегральной функции на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sqrt{x+4}dx + \frac{1}{4}\int \sqrt{x}dx = \frac{1}{4}\int (x+4)^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}\int x^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \frac{1}{6}(x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}(x+4)\sqrt{x+4} + \frac{1}{6}x\sqrt{x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 13. Найти интеграл

$$\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$$

◀Применим тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

(об этом способе интегрирования будет подробнее говориться на пятой лекции).

$$\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-x-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)\right)dx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{1}{5}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)\right)+C. \blacktriangleright$$

Задание 14. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$$

◀Выделяем в знаменателе подынтегральной функции полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \int \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 15. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

◀Решаем тем же методом, что и в задании 14:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4-4+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}} =$$

$$= \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-1}\right| + C = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+3}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 16. Найти интеграл

$$\int (x^4+3x^2-6x+1)(x-2)^{44}dx.$$

◀Разложим многочлен $P_4(x)=x^4+3x^2-6x+1$ по степеням $x-2$ по формуле Тейлора для многочлена

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{1.6}$$

Для этого найдем значения производных многочлена $P_4(x)$ в точке $x_0=2$ всех порядков от 0 до 4 включительно ($P_4^{(0)}\equiv P_4(x)$):

$$P_4^{(0)}(2)=P_4(2)=17;$$

$$P_4'(x)=4x^3+6x-6,\quad P_4'(2)=38;$$

$$P_4''(x)=12x^2+6,\quad P_4''(2)=54;$$

$$P_4'''(x)=24x,\quad P_4'''(2)=48;$$

$$P_4^{(4)}(x)=24,\quad P_4^{(4)}(2)=24.$$

Используя формулу (1.6), получим:

$$P_4(x)=17+38(x-2)+\frac{54}{2!}(x-2)^2+\frac{48}{3!}(x-2)^3+\frac{24}{4!}(x-2)^4=$$

$$=17+38(x-2)+27(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4.$$

Тогда

$$\int (x^4+3x^2-6x+1)(x-2)^{44}dx =$$

$$= \int \left(17+38(x-2)+27(x-2)^2+8(x-2)^3+(x-2)^4\right)(x-2)^{44}dx =$$

$$= 17\int (x-2)^{44}dx + 38\int (x-2)^{45}dx + 27\int (x-2)^{46}dx +$$

$$+8\int (x-2)^{47}dx + \int (x-2)^{48}dx =$$

$$= 17\frac{(x-2)^{45}}{45} + 38\frac{(x-2)^{46}}{46} + 27\frac{(x-2)^{47}}{47} + 8\frac{(x-2)^{48}}{48} + \frac{(x-2)^{49}}{49} + C =$$

$$= (x-2)^{45}\left(\frac{17}{45}+\frac{19}{23}(x-2)+\frac{27}{47}(x-2)^2+\frac{1}{6}(x-2)^3+\frac{1}{49}(x-2)^4\right)+C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int (3-x^2)^3 dx;$

1.2 $\int x^2(5-x)^4 dx;$

1.3 $\int (1-x)(1-3x) dx;$

1.4 $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx;$

1.5 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$

1.6 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} dx;$

1.7 $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x} dx;$

1.8 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$

1.9 $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx;$

1.10 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx;$

1.11 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx;$

1.12 $\int (2^x+3^x)^2 dx;$

1.13 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx;$

1.14 $\int (1+\sin x+\cos x) dx;$

1.15 $\int \operatorname{ctg}^2 x dx;$

1.16 $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$

1.17 $\int \frac{dx}{x+a};$

1.18 $\int (2x-3)^{10} dx;$

1.19 $\int \sqrt[3]{1-3x} dx;$

1.20 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}};$

1.21 $\int \frac{dx}{2+3x^2};$

1.22 $\int \frac{dx}{2-3x^2};$

1.23 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}};$

1.24 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}};$

1.25 $\int (e^{-x}+e^{-2x}) dx;$

1.26 $\int (\sin 5x-\cos 6x) dx;$

1.27 $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)};$

1.28 $\int \frac{dx}{1+\cos x};$

1.29 $\int \frac{dx}{1-\cos x};$

1.30 $\int \frac{dx}{1+\sin x};$

1.31 $\int \frac{1+x}{1-x} dx;$

1.32 $\int \frac{x^2}{1+x} dx;$

1.33 $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2+12x+20}{x^2+4x+5} dx;$

1.34 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx;$

1.35 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}dx;$

1.36 $\int \frac{x^5}{x+1}dx;$

1.37 $\int \frac{dx}{4x^2-5x+6};$

1.38 $\int \frac{dx}{x^2-6x+9};$

1.39 $\int \frac{dx}{1-3x-x^2};$

1.40 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+8}};$

1.41 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-x^2}};$

1.42 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}};$

1.43 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}};$

1.44 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{4+x}};$

1.45 $\int x\sqrt{2-5x}dx;$

1.46 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)};$

1.47 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)};$

1.48 $\int \sin^2 x dx;$

1.49 $\int \cos^2 x dx;$

1.50 $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx;$

1.51 $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}dx.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 2
Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле

2.1 Замена переменной в неопределенном интеграле

При вычислениях неопределенных интегралов часто используют так называемый **метод подстановки** (**метод замены переменной**). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть функция F является первообразной для функции f на промежутке U, а функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема на промежутке X, причем $E(\varphi) \subset U$, то существует*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C. \tag{2.1}$$

◀На промежутке X определены сложные функции $F \circ \varphi$ и $f \circ \varphi$. Для функции $F \circ \varphi$ выполняются условия теоремы [1, теорема 15.2] о дифференцировании сложной функции (существует $F'(u) = f(u)$ на U, так как существует интеграл

$$\int f(u)du = F(u) + C;$$

φ' существует на X – по условию теоремы). Значит, на промежутке X существует

$$(F(\varphi(x)))' = F'(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что функция $F \circ \varphi$ является первообразной для функции $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ на промежутке X. ▶

Формула (2.1) называется **формулой интегрирования подстановкой**, а именно подстановкой

$$\varphi(x) = u.$$

Это название объясняется тем, что если левую часть формулы (2.1) записать в виде

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du \,\Big|_{u=\varphi(x)}, \tag{2.3}$$

то будет видно, что, для того чтобы найти интеграл

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)),$$

можно сделать подстановку $u = \varphi(x)$, найти интеграл $\int f(u)du$ и затем вернуться к переменной x, положив $u = \varphi(x)$.

Пример 2.1. Найдите $\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{-\sin x dx}{1-\cos^2 x} =$$

$$= -\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} u = \cos x = \varphi(x), \quad f(u) = -\frac{1}{1-u^2}; \\ X = (\pi k, \pi + \pi k), \ k \in \mathbb{Z}; \\ u = (-1, 1) \end{array} \right] =$$

$$= -\int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C. \blacktriangleright$$

Пример 2.2. Найдите $\int \cos \frac{x}{2} dx$.

$\blacktriangleleft$ $d(\frac{x}{2}) = (\frac{x}{2})'dx = \frac{1}{2}dx$.

$$\int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \int \cos \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \left[u = \frac{x}{2}, \quad f(u) = \cos u \right] =$$

$$= 2 \int \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C. \blacktriangleright$$

Замечание 2.1. Использование определения дифференциала $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$ справа налево при вычислении интегралов методом подстановки называется **поднесением под знак дифференциала** функции φ. При этом соответствующая подстановка $u = \varphi(x)$ часто проводится только мысленно, а не в записи. Например:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}; \\ d(x - \frac{1}{2}) = dx; \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{(x - \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Кроме того, используя операцию поднесения под знак дифференциала, легко доказать формулу

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

где F – первообразная функции f. Например:

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C;$$

$$\int (0,2x - 3)^{54} dx = \frac{1}{0,2} \frac{(0,2x - 3)^{55}}{55} + C = \frac{(0,2x - 3)^{55}}{11} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x - 4)} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x - 4) + C.$$

Замечание 2.2. Частным случаем формулы замены переменной является следующая формула:

$$I = \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Замечание 2.3. В случае, когда функция φ имеет обратную φ^{-1}, перейдя в обеих частях формулы (2.3) к переменной u с помощью подстановки $x = \varphi^{-1}(u)$ и поменяв местами стороны равенства, получим

$$\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,|_{x=\varphi^{-1}(u)}\,.$$

Эта формула называется обычно **формулой интегрирования заменой переменной**.

Так, с помощью этой формулы для вычисления интеграла $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ используют подстановку $x = a\cos u$ или $x = a\sin u$; для $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ – подстановку $x = \frac{a}{\cos u}$ или $x = \frac{a}{\sin u}$; для $\int\sqrt{x^2+a^2}dx$ – подстановку $x = a\operatorname{tg} u$ или $x = a\operatorname{ctg} u$.

Указанные подстановки используются соответственно и для вычисления некоторых других интегралов, подынтегральные функции которых содержат в качестве множителей $\sqrt{a^2-x^2}$, или $\sqrt{x^2-a^2}$, или $\sqrt{x^2+a^2}$.

Пример 2.3. Найдите $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$.

$$◀ \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = \left[\begin{array}{l} x = 2\cos u; \\ 0 < u < \pi \end{array}\right] = \left[\begin{array}{l} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\cos^2 u} = 2\sin u; \\ dx = -2\sin u du;\;\; u = \arccos\frac{x}{2} \end{array}\right] = \int \frac{2\sin u}{2\cos u}(-2\sin u)du =$$

$$= -2\int\frac{\sin^2 u}{1-\sin^2 u}d(\sin u) = [t = \sin u] = -2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt = 2\int\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right) + C =$$

$$= 2\left(\sin u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|\right) + C = \sqrt{4-x^2} - \ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{2-\sqrt{4-x^2}}\right| + C.\ ▶$$

2.2 Интегрирование по частям

Определение 2.1. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную производную на множестве $X \subset \mathbb{R}$, то она называется* ***непрерывно-дифференцируемой*** *на X.*

Символом $C^1(X)$ будем обозначать множество функций $f : X \to \mathbb{R}$, непрерывно-дифференцируемых на множестве X.

Теорема 2.2. *Если функции $u, v \in C^1((a,b))$, то uv', $u'v$ имеют первообразные на (a,b) и справедлива* ***формула интегрирования по частям****:*

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{2.4}$$

◀Существование первообразных для функций uv' и $u'v$ следует из теоремы 1.2.
Так как функции u и v дифференцируемы на (a,b), то по правилу дифференцирования произведения для всех точек этого интервала имеет место равенство $d(uv) = vdu + udv$, из которого и следует формула 2.4.▶

Замечание 2.4. Выделим три группы интегралов, вычисление которых проводится по формуле (2.4) с некоторыми особенностями.

$$\mathbf{1.} \int P_n(x) a^{\alpha x} dx, \quad \int P_n(x) \sin \alpha x dx, \quad \int P_n(x) \cos \alpha x dx.$$

При вычислении интегралов первого типа функцией $u = u(x)$ считают многочлен $P_n(x)$ степени $n \in \mathbb{N}$, причем интегрирование по частям необходимо проводить n раз.

Пример 2.4. Найдите $\int(3x^2-x)2^{\frac{x}{4}}dx$.

$$◀ \int(3x^2-x)2^{\frac{x}{4}}dx = \left[\begin{array}{ll} u=3x^2-x; & du=(6x-1)dx; \\ dv=2^{\frac{x}{4}}dx; & v=4\frac{2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2-x)2^{\frac{x}{4}} - \frac{4}{\ln 2}\int(6x-1)2^{\frac{x}{4}}dx = \left[\begin{array}{ll} u=6x-1; & du=6dx; \\ dv=2^{\frac{x}{4}}dx; & v=4\frac{2^{\frac{x}{4}}}{\ln 2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2-x)2^{\frac{x}{4}} - \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2(6x-1)2^{\frac{x}{4}} + \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2 6\int 2^{\frac{x}{4}}dx =$$

$$= \frac{4}{\ln 2}(3x^2-x)2^{\frac{x}{4}} - \left(\frac{4}{\ln 2}\right)^2(6x-1)2^{\frac{x}{4}} + 6\left(\frac{4}{\ln 2}\right)^3 2^{\frac{x}{4}} + C. ▶$$

2. а) $\displaystyle\int a^{\alpha x}\sin\beta x dx, \quad \int a^{\alpha x}\cos\beta x dx;$

б) $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}dx, \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx, \quad \int\sqrt{x^2-a^2}dx;$

в) $\displaystyle\int\sin(\ln x)dx, \quad \int\cos(\ln x)dx.$

При вычислении интегралов второго типа проводится интегрирование по частям: для интегралов из пункта а) – два раза, за $u=u(x)$ оба раза берется либо показательная функция, либо тригонометрическая; для интегралов из пункта б) – один раз, после чего получим равенство относительно искомого интеграла; для интегралов из пункта в) – интегрирование по частям проводится два раза.

Пример 2.5. Найдите $\int e^{-x}\cos x dx$.

$$◀ \int e^{-x}\cos x dx = \left[\begin{matrix} u = e^{-x}; & du = -e^{-x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix}\right] = e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx =$$

$$= e^{-x}\sin x + \left[\begin{matrix} u = e^{-x}; & du = -e^{-x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{matrix}\right] = e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx.$$

Решая равенство относительно $\int e^{-x}\cos x dx$, получим

$$\int e^{-x}\cos x dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C. ▶$$

Пример 2.6. Найдите $\int \sqrt{2x - x^2}dx$.

$$◀ \int \sqrt{2x - x^2}dx = [-x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = 1 - (x-1)^2;$$

$$t = x - 1, \quad dt = d(x-1) = dx] = \int \sqrt{1 - t^2}dt = \left[\begin{matrix} u = \sqrt{1-t^2}; & du = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}} \\ dv = dt; & v = t \end{matrix}\right] =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int \frac{1 - t^2 - 1}{\sqrt{1-t^2}}dt = t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}dt + \arcsin t = (x-1)\sqrt{2x-x^2} - \int \sqrt{2x-x^2}dx + \arcsin(x-1),$$

$$2\int \sqrt{2x-x^2}dx = (x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1),$$

$$\int \sqrt{2x-x^2}dx = \frac{1}{2}\Big((x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)\Big) + C. ▶$$

$$\mathbf{3}.\ \int f(x)\,(\log_a \alpha x)^n\,dx,\quad \int f(x)\,(\arcsin \alpha x)^n\,dx,\quad \int f(x)\,(\arccos \alpha x)^n\,dx,$$

$$\int f(x)\,(\operatorname{arctg} \alpha x)^n\,dx,\quad \int f(x)\,(\operatorname{arcctg} \alpha x)^n\,dx,$$

где f есть производная порядка $n \in \mathbb{N}$ некоторой функции φ $\left(f(x) = \varphi^{(n)}(x)\right)$.

При вычислении интегралов третьего типа проводится интегрирование по частям (n раз), причем в качестве $u = u(x)$ берут второй множитель.

Пример 2.7. Найдите $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

$$◀ \int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x; & du = \frac{dx}{1+x^2}; \\ dv = x dx; & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C =$$

$$= \frac{x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x}{2} + C. ▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. В чем состоит суть способа замены переменной или способа подстановки в неопределенном интеграле? При каких условиях этот способ применим?

2. Какие подстановки удобно использовать для нахождения следующих неопределенных интегралов:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx; \quad \int \sqrt{a^2 + x^2}dx; \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}dx?$$

3. Покажите, что правило интегрирования по частям есть следствие правила дифференцирования произведения функций.

4. Назовите группы интегралов, которые можно вычислять интегрированием по частям.

5. Как вычисляются интегралы вида:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \quad \int P_n(x)\sin\alpha x dx, \quad \int P_n(x)\cos\alpha x dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n \in \mathbb{N}$?

6. В чем особенности вычисления интегралов

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx \ ?$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной используется очень часто, однако общих правил выбора удачной замены не существует, за исключением небольшого числа частных ситуаций. В процессе решения задач мы укажем эти частные ситуации.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

◀Возьмем подстановку $\sin x = u$. Дифференцируем обе части этого равенства: $\cos x dx = du$. Теперь интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du.$$

Итак, с помощью подстановки $\sin x = u$ мы преобразовали заданный интеграл к табличному, который легко находится:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$$

После интегрирования мы снова вернулись к первоначальной переменной x.

При решении задачи можно рассуждать и по-другому. В заданном интеграле, вводя множитель $\cos x$ под знак дифференциала, получим:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

Видно, что теперь под знаком интеграла все выражено через $\sin x$ и сама собой напрашивается подстановка $\sin x = u$. Такую подстановку, конечно же, можно провести мысленно, то есть найти заданный интеграл методом поднесения под знак дифференциала (смотри замечание 2.1).▶

Во всех примерах, рассматриваемых далее, по-возможности мы будем использовать метод поднесения под знак дифференциала для нахождения неопределенных интегралов. Если же проводить подстановку мысленно затруднительно – будем вводить новую переменную.

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x dx.$$

$$◀ \int \sin^5 x \cdot \cos x dx = \left[d(\sin x) = \cos x dx \right] = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6} + C. ▶$$

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$◀ \int \frac{\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x \right) \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] =$$

$$= \int \left(\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^2 x \right) d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{tg}^3 x + C. ▶$$

Задание 4. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$◀ \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \left[d(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x) dx \right] =$$

$$= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C. ▶$$

Задание 5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \Big[d(\sin x) = \cos x dx\Big] =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C. ▶$$

Задание 6. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx.$$

$$◀ \int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx = \left[\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\right] = \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}dx =$$

$$= \Big[d(\sin x) = \cos x dx\Big] = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}\sin x) + C. ▶$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$◀ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}\right] = -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= -\int d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} + C. ▶$$

Задание 8. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{x^8-2}dx.$$

$$◀ \int \frac{x^3}{x^8-2}dx = \left[d(x^4) = 4x^3dx\right] = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{(x^4)^2-2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C. ▶$$

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \left[d(e^x) = e^x dx\right] =$$

$$= \int \frac{d(e^x)}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctg} e^x + C. ▶$$

Задание 10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \left[d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$$= \int (\arcsin x)^{-2} d(\arcsin x) = \frac{(\arcsin x)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{\arcsin x} + C. ▶$$

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 11. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

◀Разделим числитель и знаменатель подынтегральной функции на x^2:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2+\frac{1}{x^2}+2}dx =$$

$$= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}dx =$$

$$= \left[d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx\right] = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C. ▶$$

Задание 12. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{1}{x}=t,\ x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}\right] = \int \frac{t\left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|+C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C. ▶$$

Задание 13. Найти интеграл
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$$

$$◀ \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx = \left[\sqrt{2-x}=t,\ x=2-t^2;\ dx=-2tdt\right] =$$
$$= \int \frac{(2-t^2)^2}{t}(-2tdt) = -2\int(4-4t^2+t^4)dt = -2\left(4t-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right)+C =$$
$$= -2\left(4\sqrt{2-x}-\frac{4}{3}(\sqrt{2-x})^3+\frac{1}{5}(\sqrt{2-x})^5\right)+C. ▶$$

Задание 14. Найти интеграл
$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx.$$

$$◀ \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \left[1+\ln x=t,\ d(1+\ln x)=dt,\ \frac{dx}{x}=dt\right] =$$
$$= \int \frac{(t-1)}{\sqrt{t}}dt = \int \sqrt{t}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{1}{2}}dt - \int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$
$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C =$$
$$= \frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}-2\sqrt{1+\ln x}+C. ▶$$

Задание 15. Найти интеграл

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx.$$

$$◀ \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left[d(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right] =$$

$$= 2\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}d(\operatorname{arctg}\sqrt{x}) =$$

$$= (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 + C. ▶$$

Задание 16. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$$

◀1-й способ.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left[x = \frac{3}{\cos t},\ 0 < t < \frac{\pi}{2},\ dx = \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C =$$

$$= \left[x = \frac{3}{\cos t},\ \cos t = \frac{3}{x},\ t = \arccos\frac{3}{x}\right] = \frac{1}{9}\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

2-й способ.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \left[x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x},\ dt=-\frac{dx}{x^2}\right] = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-9}} =$$

$$= -\int \frac{tdt}{\sqrt{1-9t^2}} = \left[d\left(\sqrt{1-9t^2}\right) = \frac{-9tdt}{\sqrt{1-9t^2}}\right] = \frac{1}{9}\int \frac{-9tdt}{\sqrt{1-9t^2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int d\left(\sqrt{1-9t^2}\right) = \frac{\sqrt{1-9t^2}}{9} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C. \ \blacktriangleright$$

Задание 17. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ b>a.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x-a=(b-a)\sin^2 t, & 0<t<\frac{\pi}{2}, \\ dx=(b-a)2\sin t\cdot\cos t dt, & b-x=(b-a)\cos^2 t \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2(b-a)\sin t\cdot\cos t}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cdot\cos^2 t}}dt = 2\int dt = 2t + C =$$

$$= \left[x-a=(b-a)\sin^2 t,\ 0<t<\frac{\pi}{2},\ \sin^2 t = \frac{x-a}{b-a}\right.$$

$$\left.\sin t = \sqrt{\frac{x-a}{b-a}},\ t=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right] = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C. \ \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

1.2 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

1.3 $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$;

1.4 $\int \frac{e^x}{3+4e^x}dx$;

1.5 $\int \frac{dx}{\sin 2x}$;

1.6 $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x dx$;

1.7 $\int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\frac{dx}{1+x^2}$;

1.8 $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$;

1.9 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$;

1.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x}$;

1.12 $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$;

1.13 $\int (e^{2x}+5)^3 e^{2x}dx$;

1.14 $\int e^{-x^2}x dx$;

1.15 $\int e^{\operatorname{arctg} 3x}\frac{dx}{1+9x^2}$;

1.16 $\int e^{x^2+x+1}(2x+1)dx$;

1.17 $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

1.18 $\int \sin(e^x)\cdot e^x dx$;

1.19 $\int \cos(3e^x+1)\cdot e^x dx$;

1.20 $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$;

1.21 $\int \frac{x}{\cos^2(x^2+1)}dx$;

1.22 $\int x\sin(4-x^2)dx$;

1.23 $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$;

1.24 $\int \operatorname{tg} 4x dx$;

1.25 $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$;

1.26 $\int \frac{\cos 4x-\sin 2x}{\sin 4x+2\cos 2x}dx$;

1.27 $\int \frac{\frac{3}{2}\sin 2x(\sin x-\cos x)}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$;

1.28 $\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$;

1.29 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$;

1.30 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

1.31 $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx$;

1.32 $\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx$;

1.33 $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}dx$;

1.34 $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

1.35 $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}dx;$

1.36 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{4x}}}dx;$

1.37 $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx;$

1.38 $\int e^{2x^2+\ln x}dx;$

1.39 $\int \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2};$

1.40 $\int \frac{dx}{x\ln x\cdot\ln(\ln x)};$

1.41 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}};$

1.42 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx;$

1.43 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx;$

1.44 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$

1.45 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \arcsin^2 x dx.$$

$$◀ \int \arcsin^2 x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x, & du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right] =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin^2 x -$$

$$-2 \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int d(\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int dx \right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C. ▶$$

Задание 2. Найти интеграл

$$\int (x^2 - 2x + 3)\sin 2x dx.$$

$$◀ \int (x^2 - 2x + 3)\sin 2x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 - 2x + 3, & du = (2x-2)dx, \\ dv = \sin 2x dx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \int (x-1)\cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \left[\begin{array}{ll} u = x - 1, & du = dx, \\ v = \cos 2x dx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C. \blacktriangleright$$

Замечание 2.5. Для вычисления интегралов вида

$$\int (P_n(x)\sin ax + Q_m(x)\cos ax)\, dx$$

можно применить **метод неопределенных коэффициентов**. Для функции

$$P_n(x)\sin ax + Q_m(x)\cos ax$$

первообразной будет функция вида

$$S_l(x)\sin ax + T_l(x)\cos ax,$$

где $S_l(x)$ и $T_l(x)$ – многочлены степени $l = \max\{m, n\}$ с неизвестными коэффициентами. Тогда:

$$\int \Big(P_n(x)\cos ax + Q_m(x)\sin ax\Big) dx = S_l(x)\sin ax + T_l(x)\cos ax + C.$$

Для определения неизвестных коэффициентов многочленов $S_l(x)$ и $T_l(x)$ продифференцируем обе части последнего равенства и, приравняв коэффициенты при подобных слагаемых вида $x^k \sin ax$ и $x^k \cos ax$, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Задание 3. Найти интеграл

$$\int (x^2 + x + 1)\sin x dx.$$

◀Применим для решения метод неопределенных коэффициентов.

$$\int (x^2 + x + 1)\sin x dx = (A_2x^2 + A_1x + A_0)\sin x + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos x + C.$$

Продифференцировав обе части равенства, получим:

$$(x^2 + x + 1)\sin x = \sin x\Big[(A_1 - B_0) + (2A_2 - B_1)x - B_2x^2\Big] +$$

$$+\cos x\Big[(A_0 + B_1) + (A_1 + 2B_2)x + A_2x^2\Big].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых слагаемых, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = A_1 - B_0 & (\text{коэффициенты при } \sin x), \\ 1 = 2A_2 - B_1 & (\text{коэффициенты при } x\sin x), \\ 1 = -B_2 & (\text{коэффициенты при } x^2\sin x), \\ 0 = A_0 + B_1 & (\text{коэффициенты при } \cos x), \\ 0 = A_1 + 2B_2 & (\text{коэффициенты при } x\cos x), \\ 0 = A_2 & (\text{коэффициенты при } x^2\cos x). \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$A_2 = 0,\ B_2 = -1,\ B_1 = -1,\ A_0 = 1,\ A_1 = 2,\ B_0 = 1.$$

Следовательно,

$$\int (x^2 + x + 1)\sin x dx = (2x + 1)\sin x + (-x^2 - x + 1)\cos x + C. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти интеграл

$$\int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$◀ \int x^2 e^{-2x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x dx, \\ dv = e^{-2x} dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right] = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \int x e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-2x} dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{array} \right] = -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x} (2x^2 + 2x + 1) + C. ▶$$

Замечание 2.6. Из разобранного примера видно, что в результате вычисления интегралов вида $\int e^{ax} P_n(x) dx$ мы получаем выражение $e^{ax} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$.

Это обстоятельство позволяет метод неопределенных коэффициентов применять и для интегралов указанного типа.

Задание 5. Найти интеграл

$$\int e^{3x} (x^2 - 6x + 2) dx.$$

◀Пусть

$$\int e^{3x} (x^2 - 6x + 2) dx = e^{3x} (Mx^2 + Nx + P) + C.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства. Получим:

$$e^{3x} (x^2 - 6x + 2) = 3e^{3x} (Mx^2 + Nx + P) + e^{3x} (2Mx + N).$$

Сократив обе части на $e^{3x} \neq 0$, получим:

$$x^2 - 6x + 2 = 3Mx^2 + (3N + 2M)x + N + 3P.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$\begin{cases} 1 = 3M, \\ -6 = 3N + 2M, \\ 2 = N + 3P. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$M = \frac{1}{3}, \ N = -\frac{20}{9}, \ P = \frac{38}{27}.$$

Следовательно,

$$\int e^{3x}(x^2 - 6x + 2)dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{38}{27}\right) + C. \ \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти интеграл

$$\int e^{2x}\sin^2 x dx.$$

$$\blacktriangleleft \int e^{2x}\sin^2 x dx = \int e^{2x}\frac{1-\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int e^{2x}dx - \int e^{2x}\cos 2x dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x d(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos 2x d(2x).$$

$$\int e^{2x}\cos 2x d(2x) = \Big[2x = t\Big] = \int e^t \cos t dt = I.$$

$$I = \begin{bmatrix} u = e^t, & du = e^t dt, \\ dv = \cos t dt, & v = \sin t \end{bmatrix} = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt =$$

$$= e^t \sin t - \begin{bmatrix} u = e^t, & du = e^t dt, \\ dv = \sin t dt, & v = -\cos t \end{bmatrix} =$$

$$= e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt \Rightarrow I = e^t(\sin t + \cos t) - I \Rightarrow$$

$$2I = e^t(\sin t + \cos t) \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^t(\sin t + \cos t) + C.$$

В итоге получим:

$$\int e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C. \blacktriangleright$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int \sqrt{1+x^2}dx.$$

$$\blacktriangleleft\ I = \int \sqrt{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{1+x^2}, & du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| - I.$$

Значит,

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|, \quad I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right) + C. \blacktriangleright$$

В некоторых случаях, прежде чем применять метод интегрирования по частям, выгодно предварительно сделать замену переменной.

Задание 8. Найти интеграл
$$\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx.$$

$$◀ \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int x^2 \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \operatorname{arctg} x = t, \\ x = \operatorname{tg} t \end{array} \right] = \int t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \operatorname{tg}^2 t dt, & v = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \operatorname{tg} t - t \end{array} \right] =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t)dt = t(\operatorname{tg} t - t) - \int \operatorname{tg} t dt + \int t dt =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) - \int \frac{\sin t}{\cos t}dt + \frac{t^2}{2} = t(\operatorname{tg} t - t) + \int \frac{d(\cos t)}{\cos t} + \frac{t^2}{2} =$$

$$= t(\operatorname{tg} t - t) + \ln|\cos t| + \frac{t^2}{2} + C = \operatorname{arctg} x(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg} x) +$$

$$+ \ln|\cos(\operatorname{arctg} x)| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x +$$

$$+ \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x - \ln(\sqrt{1+x^2}) + C. ▶$$

Задание 9. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$\int \sin^n x dx, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2.$$

Пользуясь выведенной формулой, найти

$$\int \sin^6 x dx.$$

$$◀ \ I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin^{n-2} x \cdot (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx.$$

Второй интеграл правой части последнего равенства будем вычислять по частям.

$$\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \cos x, & du = -\sin x dx, \\ dv = \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx, & v = \int \sin^{n-2} x d(\sin x) = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{1}{n-1} \int \sin^n x dx = \frac{1}{n-1} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{1}{n-1} I_n.$$

В итоге получим:

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cos x \cdot \sin^{n-1} x - \frac{1}{n-1} I_n,$$

$$I_n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \cos x \cdot \sin^{n-1} x,$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x.$$

Теперь найдем с помощью выведенной формулы $\int \sin^6 x dx$.

$$\int \sin^6 x dx = \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx - \frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x,$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \right) - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x \right) -$$

$$- \frac{1}{6} \cos x \cdot \sin^5 x + C = \frac{5}{16} x - \frac{\cos x \cdot \sin x \left(8 \sin^4 x + 10 \sin^2 x + 15 \right)}{48} + C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int (x^2-2x+3)\ln x dx$;

1.2 $\int \arcsin x dx$;

1.3 $\int \operatorname{arctg} x dx$;

1.4 $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

1.5 $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx$;

1.6 $\int x^2 \arcsin 2x dx$;

1.7 $\int e^{-x}\sin^2 x dx$;

1.8 $\int \ln(x+\sqrt{4+x^2}) dx$;

1.9 $\int \ln^2 x dx$;

1.10 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$;

1.11 $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

1.12 $\int \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$;

1.13 $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$;

1.14 $\int \frac{x\arccos\frac{x}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$;

1.15 $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x} dx$;

1.16 $\int (x^2+x-2)e^{-3x} dx$;

1.17 $\int (1+x^2)\cos x dx$;

1.18 $\int x^5 \sin 5x dx$;

1.19 $\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x) dx$;

1.20 $\int (x + e^x\cos^2 x) dx$;

1.21 $\int x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x dx$;

1.22 $\int e^{-4x}x^3 dx$;

1.23 $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$;

1.24 $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$;

1.25 $\int (x^2+3x+1)\cos 2x dx$;

1.26 $\int e^{-x}\cos 2x dx$;

1.27 $\int e^{-2x}\cos 3x dx$;

1.28 $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$;

1.29 $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x} dx$;

1.30 $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx$;

1.31 $\int \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$;

1.32 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$;

1.33 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

2. Выведите рекуррентные формулы для интегралов:

2.1 $I_n = \int \cos^n x dx$; найти I_4 и I_5;

2.2 $I_n = \int x^n e^{-x} dx$; найти I_{10};

2.3 $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

3. Найдите интегралы:

3.1 $\int \cos^8 x dx$;

3.2 $\int \cos^5 x dx$;

3.3 $\int \sin^5 x dx$;

3.4 $\int \sin^7 x dx$;

3.5 $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+4}}$;

3.6 $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+9}}$;

3.7 $\int \frac{dx}{(x^2+8)^4}$;

3.8 $\int \frac{dx}{(x^2-5)^3}$;

3.9 $\int x^6 e^{-x} dx$.

4. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 3
Интегрирование рациональных функций

3.1 Разложение рациональных дробей на элементарные

Определение 3.1. ***Рациональной функцией*** *называется функция вида* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* P *и* Q *– алгебраические многочлены.*

Если степень многочлена Q равна нулю, то функция R есть обычный многочлен, а если степень многочлена Q больше нуля, то функцию R называют **дробно-рациональной функцией, или рациональной дробью** (при условии, что дробь несократимая).

Определение 3.2. *Рациональная дробь называется* ***правильной***, *если степень многочлена* P *меньше степени многочлена* Q.

Определение 3.3. *Рациональная дробь называется* ***неправильной***, *если степень многочлена* P *не меньше степени многочлена* Q.

Всякая рациональная дробь является либо правильной, либо неправильной.

Если рациональная дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, получим равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{T(x)}{Q(x)},$$

где $Z(x)$, $T(x)$ – некоторые многочлены, а $\frac{T(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Лемма 3.1. *Для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение*

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_r)^{n_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

где

$$\sum_{i=1}^{r} n_i + 2\sum_{i=1}^{s} m_i = n, \quad \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j=\overline{1,s},$$

и $a_1, \dots, a_r$ – действительные корни многочлена, A_n, p_j, q_j $(j=1,2,\dots,s)$ – действительные числа [4, с. 522].

Лемма 3.2. *Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь. Если число a является действительным корнем кратности $k \geqslant 1$ многочлена $Q_m(x)$, то есть $Q_m(x) = (x-a)^k Q_{m-k}(x)$, $Q_{m-k}(a) \neq 0$, то существуют действительное число A и многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{m-k}(x)},$$

где дробь $\frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{m-k}(x)}$ также является правильной [4, с. 527].

Лемма 3.3. *Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь. Если комплексное число z является корнем кратности $k \geqslant 1$ многочлена $Q_m(x)$, то есть*

$$Q_m(x) = (x^2+px+q)^k Q_{m-2k}(x), \quad p^2-4q<0,$$

где $Q_{m-2k}(z) \neq 0$, то существуют действительные числа M, N и многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_{m-2k}(x)},$$

где дробь $\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_{m-2k}(x)}$ также является правильной [4, с. 529].

Без ограничения общности будем считать, что коэффициент старшего члена многочлена $Q_m(x)$ равен единице.

Теорема 3.1. *Пусть* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *– правильная рациональная дробь. Если*

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{m_s}, \tag{3.1}$$

где a_i *– попарно различные действительные корни многочлена* $Q_m(x)$ *кратности* n_i $(i=1,2,\dots,r)$, $p_j^2-4q_j<0$ $(j=1,2,\dots,s)$, *то существуют действительные числа* $A_i^{(\alpha)}$ $(i=1,2,\dots,r,\ \alpha=1,2,\dots,n_i)$, $M_j^{(\beta)}$ *и* $N_j^{(\beta)}$ $(j=1,2,\dots,s,\ \beta=1,2,\dots,m_j)$, *такие, что*

$$\begin{gathered}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(n_1)}}{x-a_1} + \dots + \\ + \frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{n_r}} + \frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{n_r-1}} + \dots + \frac{A_r^{(n_r)}}{x-a_r} + \\ + \frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(m_1)}x+N_1^{(m_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \\ + \frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_s}} + \frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_s-1}} + \dots + \frac{M_s^{(m_s)}x+N_s^{(m_s)}}{x^2+p_1x+q_1}\end{gathered} \tag{3.2}$$

[4, с. 530].

Определение 3.4. *Рациональные дроби вида*

$$\frac{A}{(x-a)^n},\ A \neq 0 \ \text{ и } \ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},\quad M^2+N^2>0,$$

где a,p,q,A,M,N *– действительные числа и* $p^2-4q<0$, $m,n\in\mathbb{N}$, *называются* ***элементарными рациональными дробями***.

Таким образом, сформулированная теорема утверждает, что **всякая ненулевая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму элементарных рациональных дробей**.

При выполнении разложения вида (3.2) для конкретно заданной дроби обычно оказывается удобным **метод неопределенных коэффициентов**. Он состоит в следующем. Для правильной дроби записывают разложение (3.2), в котором коэффициенты $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ считают неизвестными. После этого обе части равенства приводят к общему знаменателю и у получившихся в числителе многочленов приравнивают коэффициенты. При этом если степень многочлена $Q_m(x)$ равна m, то в числителе правой части равенства (3.2) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени $m-1$, то есть многочлен с m коэффициентами, число же неизвестных $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ также равно m. Таким образом, получена система m уравнений с m неизвестными.

Отметим, что после приведения выражения (3.2) к общему знаменателю и его отбрасывания, в случае, когда $Q_m(x)$ имеет действительные корни, целесообразно подставить в обе части получившегося равенства последовательно эти корни; в результате получаются некоторые соотношения между искомыми коэффициентами, полезные для их окончательного определения. Описанный метод обычно называют **методом частных значений**.

Пример 3.1. Разложить дробь $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на сумму элементарных дробей.

◀Согласно (3.2) искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \tag{3.3}$$

Полагая в равенстве (3.3) последовательно $x=1$, $x=-1$, $x=2$, находим $1=-2A$, $-1=6B$, $2=3C$, откуда

$$A = -\frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{6},\ C = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}. \blacktriangleright$$

Пример 3.2. Разложить дробь $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ на элементарные дроби.

◀Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, получим

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:
при x^0 : $-1 = A$,
при x^1 : $0 = C + E$,
при x^2 : $1 = 2A + B + D$,
при x^3 : $0 = E$,
при x^4 : $0 = A + D$.
Решая полученную систему уравнений, находим

$$A = -1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1,\ E = 0,$$

поэтому искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}. \blacktriangleright$$

Замечание 3.1. В отдельных случаях разложение на элементарные дроби можно получить быстрее и проще, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов, а каким-либо другим путем. Например, для разложения дроби

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$$

на сумму элементарных дробей проще всего дважды прибавить и вычесть в числителе x^2 и произвести деление так, как это указано ниже:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Полученное в результате разложение и является разложением данной дроби на сумму элементарных дробей.

Замечание 3.2. Можно показать, что разложение вида (3.2) правильной рациональной дроби единственно.

3.2 Интегрирование элементарных рациональных дробей

Рассмотрим вопрос об интегрировании элементарных рациональных дробей. Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если $n = 1$, то, произведя непосредственное интегрирование, получим

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$$

а если $n \neq 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $p^2 - 4q < 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Снова начнем со случая $n = 1$. Замечая, что $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$, и полагая $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, имеем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2+a^2} dt = M \int \frac{tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C. \qquad (3.5)$$

В случае $n > 1$, полагая, как и выше, $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, подобным же образом получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = M\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}dt + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим отдельно каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Второй же интеграл правой части равенства (3.6) вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Проинтегрируем интеграл I_n по частям, положив $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}$, $dv = dt$, и следовательно, $du = -\frac{2ntdt}{(t^2+a^2)^{n+1}}$, $v = t$, а затем, добавив и вычтя a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и произведя деление так, как это указано ниже, получим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

то есть $I_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2I_{n+1}$, откуда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.7}$$

Интеграл I_1 легко находится, формула (3.7) позволяет найти I_2; зная же I_2, по той же формуле можно найти I_3, продолжая этот процесс дальше, можно найти выражение для любого интеграла I_n ($n \in \mathbb{N}$).

Пример 3.3. Найдите $\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx$.

◀Уже известно (смотри пример 3.1), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C. \blacktriangleright$$

Пример 3.4. Найдите $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$.

◀Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; имеем

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби в примере 3.2:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int xdx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \blacktriangleright$$

Пример 3.5. Найдите $I = \int \frac{x^2}{(1-x^2)^3}dx$.

◀Для вычисления интеграла проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементарные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(1-x^2)^3}dx, \qquad du = dx, \quad v = \frac{1}{4(1-x^2)^2},$$

получим

$$I = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-x^2)^2}dx.$$

Прибавляя и вычитая в числителе получившейся подынтегральной функции x^2, производя деление, получим два интеграла, из которых первый табличный, а второй легко вычисляется интегрированием по частям.

$$I = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)^2}dx = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{(1-x^2)^2}dx.$$

Вычислим $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^2}$ по частям:

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(1-x^2)^2}dx, \quad du = dx, \quad v = \frac{1}{2(1-x^2)}.$$

Получим

$$I = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{x}{8(1-x^2)} + C. ▶$$

3.3 Метод Остроградского

Анализируя процесс интегрирования элементарных дробей, можно доказать справедливость так называемой **формулы Остроградского**[1].

Если $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь и

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{n_1}\ldots(x-a_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}–$$

разложение ее знаменателя в виде (3.1), то

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \frac{T_{l-1}(x)}{R_l(x)} + \int \frac{K_{m-l-1}(x)}{N_{m-l}(x)}dx, \tag{3.8}$$

где

$$N_{m-l}(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_r)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s).$$

Из формулы (3.1) следует, что многочлен $R_l(x)$ имеет вид

$$R_l(x) = (x-a_1)^{n_1-1}\ldots(x-a_r)^{n_r-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s-1}, \tag{3.9}$$

то есть является наибольшим общим делителем многочлена $Q_m(x)$ и его производной $Q'_m(x)$.

Многочлен $R_l(x)$, являясь наибольшим общим делителем многочленов $Q_m(x)$ и $Q'_m(x)$, всегда может быть найден с помощью алгоритма Евклида [смотри 1, § 23, п. 23.5], тем самым для отыскания многочлена $R_l(x)$ не требуется знания корней многочлена $Q_m(x)$. Однако, если корни многочлена $Q_m(x)$ известны, а значит известно и его разложение вида (3.1), то многочлен $R_l(x)$ сразу записывается по формуле (3.9). Многочлен $N_{m-l}(x)$ находится как частное от деления $Q_m(x)$ на $R_l(x)$.

Для отыскания же многочленов $T_{l-1}(x)$ и $K_{m-l-1}(x)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов.

[1] М.В. Остроградский (1801–1869) – российский математик и механик.

Пример 3.6. Найдите $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx.$

◀Согласно формуле (3.8),

$$\int \frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx = \frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)} + \int \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}dx,$$

поэтому

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \left[\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{(1-x)^2(1+x^2)}\right]' + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Произведя дифференцирование, получим

$$\frac{x^4+2x^3-2x^2+x}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \frac{(3Kx^2+2Lx+M)(1-x)(1+x^2)}{(1-x)^3(1+x^2)^2}-$$

$$-\frac{(Kx^3+Lx^2+Mx+N)\left[-2(1+x^2)+(1-x)2x\right]}{(1-x)^3(1+x^2)^2} + \frac{kx^2+lx+m}{(1-x)(1+x^2)}.$$

Отсюда имеем:

$$x^4+2x^3-2x^2+x = (3Kx^2+2Lx+M)(-x^3+x^2-x+1)-$$

$$-(Kx^3+Lx^2+Mx+N)(-4x^2+2x-2)+(kx^2+lx+m)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

при x^0 : $M+2N+m=0,$

при x^1 : $-M+2L+2M-2N-2m+l=1,$

при x^2 : $3K-2L+M+2L-2M+4N+k-2l+2m=-2,$

при x^3 : $-M+2L-3K+2K-2L+4M-2k+2l-2m=2,$

при x^4 : $3K-2L-2K+4L+2k-2l+m=1,$

при x^5 : $-3K+4K-2k+l=0,$ при x^6 : $k=0.$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$K = \frac{1}{2},\ L = -\frac{1}{2},\ M = \frac{3}{2},\ N = -1,\ k = 0,\ l = -\frac{1}{2},\ m = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x}{(1-x)^3(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} +$$
$$+\frac{1}{2}\int \frac{-x+1}{(1-x)(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\frac{x^3 - x^2 + 3x - 2}{(1-x)^2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение дробно-рациональной функции.
2. В каком случае рациональную дробь называют правильной (неправильной)?
3. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

4. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}dx.$$

5. Покажите, как вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}dx,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Интегрирование рациональных функций

Задача нахождения неопределенного интеграла от произвольной рациональной функции сводится к интегрированию элементарных рациональных дробей.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx.$$

◀Разложим знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Значит, подынтегральную функцию можно разложить на сумму элементарных дробей:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}. \tag{3.10}$$

Приводим правую часть равенства (3.10) к общему знаменателю. В итоге приходим к равенству

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2)+$$
$$+ C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \tag{3.11}$$

Так как все корни знаменателя подынтегральной функции действительные, для определения неизвестных A, B, C и D применим описанный на лекции метод частных значений.

Подставляя поочередно нули знаменателя в равенство (3.11), получим:
при $x = -1$: $4 = A \cdot (-2) \cdot (1) \cdot (-3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0$, откуда $A = \frac{2}{3}$;
при $x = 1$: $2 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) + C \cdot 0 + D \cdot 0$, откуда $B = -\frac{1}{3}$;

при $x=-2$: $8=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)+D\cdot 0$, откуда $C=-\frac{2}{3}$;
при $x=2$: $4=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D\cdot 3\cdot 1\cdot 4$, откуда $D=\frac{1}{3}$.
Таким образом, мы получили разложение рациональной дроби на элементарные:

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-2)}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|+C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти интеграл

$$I=\int\frac{(x-1)}{x^2(x-2)(x+1)^2}dx.$$

◀Разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{F}{x+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x-1=A(x-2)(x+1)^2+Bx(x-2)(x+1)^2+$$

$$+Cx^2(x+1)^2+Dx^2(x-2)+Fx^2(x+1)(x-2). \tag{3.12}$$

Полагая последовательно $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$, находим, что

$$\begin{cases} -1 = -2A, \\ 1 = 36C, \\ -2 = -3D, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{36}$, $D = \frac{2}{3}$. Подставим эти значения в (3.12) и раскроем скобки. Получим:

$$x - 1 = \left(B + F + \frac{1}{36}\right) x^4 + \left(\frac{11}{9} - F\right) x^3 + \left(-3B - 2F - \frac{47}{36}\right) x^2 + \left(-\frac{3}{2} - 2B\right) x - 1.$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 и x, получим:

$$\frac{11}{9} - F = 0, \quad -\frac{3}{2} - 2B = 1,$$

откуда $B = -\frac{5}{4}$, $F = \frac{11}{9}$. Итак,

$$A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{5}{4}, \; C = \frac{1}{36}, \; D = \frac{2}{3}, \; F = \frac{11}{9}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{36}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{11}{9}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + \frac{1}{36}\ln|x-2| - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{11}{9}\ln|x+1| + C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти интеграл $I = \int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx$.

◀Знаменатель не имеет действительных корней. Поэтому разложение данной правильной дроби на элементарные имеет вид:

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$3x^2+5x+12 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+3) = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+3C)x + (B+3D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях равенства, будем иметь:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=3, \\ A+3C=5, \\ B+3D=12. \end{cases}$$

Решая систему, получим: $A=-\frac{5}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$, $C=\frac{5}{2}$, $D=\frac{9}{2}$, откуда

$$\frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{5x+3}{x^2+3} + \frac{5x+9}{2(x^2+1)},$$

$$\int \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}dx = -\frac{5}{2}\int\frac{xdx}{x^2+3} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+3} + \frac{5}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1} +$$

$$+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{5}{4}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} +$$

$$+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}x = -\frac{5}{4}\ln(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{5}{4}\ln(x^2+1) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$ ▶

Задание 4. Найти интеграл

$$I = \int \frac{3x+1}{x(x^2+1)^2} dx.$$

◀Разложим данную дробь на простейшие:

$$\frac{3x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+F}{(x^2+1)^2}.$$

Приведем к общему знаменателю правую часть равенства и приравняем числители, получим:

$$3x+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+F)x.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=0, \\ 2A+B+D=0, \\ C+F=3, \\ A=1. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-1$, $F=3$. Следовательно,

$$\frac{3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x+3}{(x^2+1)^2},$$

$$I = \int \frac{3x+1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2} d(x^2+1) + 3I_2 = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + 3I_2.$$

Остается найти интеграл

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Используя рекуррентную формулу (3.7), получим:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак, окончательно получим:

$$I = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright$$

Задание 5. Найти интеграл

$$I = \int \frac{x^7+2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx.$$

◀Так как подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, делим многочлен на многочлен и выделяем целую часть. Получим:

$$\frac{x^7+2}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} = x^3 - 2x^2 + x + 2 + \frac{-4x^3-6x^2-5x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1},$$

поэтому

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - \int \frac{4x^3+6x^2+5x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - I_1.$$

Для вычисления интеграла применим метод Остроградского. Чтобы применить формулу Остроградского, найдем наибольший общий делитель многочленов

$$Q_4(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \text{ и } Q_4'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 6x + 2.$$

Применим для этого алгоритм Евклида. Разделив $Q_4(x)$ на $Q_4'(x)$, получим:

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} + \frac{\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}}{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2}.$$

Так как наибольший общий делитель определяется с точностью до постоянного множителя, то далее согласно алгоритму многочлен $4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$ будем делить на $x^2 + x + 1$. Получим:

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{x^2 + x + 1} = 4x + 2, \quad R_2(x) = x^2 + x + 1,$$

значит

$$I_1 = \int \frac{4x^3 + 6x^2 + 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}dx = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}dx.$$

Для определения неизвестных коэффициентов продифференцируем обе части последнего равенства. Получим:

$$\frac{4x^3 + 6x^2 + 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B)}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{(Cx + D)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Приравнивая числители, а затем коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$4x^3 + 6x^2 + 5x = A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + x + 1),$$

$$4 = C,\ 6 = -A + C + D,\ 5 = -2B + C + D,\ 0 = A - B + D.$$

Решив систему, получим:

$$C = 4,\ B = 0,\ A = -1,\ D = 1,$$

тогда

$$I_1 = \frac{-x}{x^2+x+1} + \int \frac{4x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{2x+\frac{1}{2}+1-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= -\frac{x}{x^2+x+1} + 2\ln(x^2+x+1) - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{-x}{x^2+x+1} + 2\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1.$$

Тогда

$$I = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{x}{x^2+x+1} - 2\ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $C = -C_1$. ▶

Замечание. Иногда интегралы от рациональных дробей удается найти не прибегая к методу неопределенных коэффициентов. Покажем это на примере.

Задание 6. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x(3+x^6)^2}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{x(3+x^6)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3+x^6-x^6}{x(3+x^6)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x(3+x^6)} - \frac{1}{3}\int \frac{x^5dx}{(3+x^6)^2} =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 18}\int \frac{d\left(\frac{3}{x^6}+1\right)}{\frac{3}{x^6}+1} - \frac{1}{3\cdot 6}\int \frac{d(3+x^6)}{(3+x^6)^2} = -\frac{1}{54}\ln\left(\frac{3}{x^6}+1\right) + \frac{1}{18(3+x^6)} + C. ▶$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx;$

1.2. $\int \frac{x^2-3}{x^2-1}dx;$

1.3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx;$

1.4 $\int \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}dx;$

1.5 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx;$

1.6 $\int \frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^2};$

1.7 $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx;$

1.8 $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)}dx;$

1.9 $\int \frac{dx}{x^4-1};$

1.10 $\int \frac{dx}{x^4+1};$

1.11 $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx;$

1.12 $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)};$

1.13 $\int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)(x-2)}dx;$

1.14 $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}dx;$

1.15 $\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}dx;$

1.16 $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2};$

1.17 $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2};$

1.18 $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx;$

1.19 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx;$

1.20 $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx;$

1.21 $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx;$

1.22 $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx;$

1.23 $\int \frac{dx}{x^6+1};$

1.24 $\int \frac{dx}{(9x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 4
Интегрирование простейших иррациональных функций

Здесь и далее договоримся символом R обозначать рациональную функцию. При этом будем учитывать, что рациональная функция может быть функцией нескольких аргументов. Определение рациональной функции одного аргумента или одной переменной x дано на лекции 3 (определение 3.1). Рациональная функция от двух аргументов определяется следующим образом.

Многочленом n-ой степени от аргументов x и y называется выражение вида

$$P_n(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n,$$

где $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ – некоторые действительные постоянные.

Рациональной функцией от двух аргументов называют отношение вида $R(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$, где $P_n(x,y)$, $Q_m(x,y)$ – многочлены от двух аргументов степени n и m соответственно.

Аналогичным образом вводятся понятия многочленов и рациональных функций большего числа аргументов.

4.1 Простейшие подстановки

Интегралы от некоторых иррациональных функций с помощью соответствующей подстановки сводятся к интегралам от рациональных функций.

Пусть

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_l}{n_l}}\right) dx, \tag{4.1}$$

$m_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,l}$; a, b, c, d – константы, $\triangle = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Если $\triangle = 0$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ и $\frac{ax+b}{cx+d} = \text{const}$.

Рассмотрим алгоритм вычисления интегралов типа (4.1):
1. Находим наименьшее общее кратное чисел $n_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, l}$. Обозначаем его n;
2. Используем подстановку

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = R_0(t),\ dx = R_0'(t)dt = R_{01}(t)dt;$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_i}{n_i}} = \left[\frac{n}{n_i} = k_i \in \mathbb{N}\right] = \left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{m_i k_i} = t^{m_i k_i} = R_i(t).$$

$$I = \int R\left(R_0(t), R_1(t), \ldots, R_l(t)\right) R_{01}(t)dt = \int R^*(t)dt.$$

Получили интеграл от рациональной функции, алгоритм вычисления которого был дан выше (лекция № 3).

Пример 4.1. Найти $I = \int \frac{\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})(x+1)^{\frac{2}{3}}} dx$.

◀Имеем:

$$x + 1 = \frac{1 \cdot x + 1}{0 \cdot x + 1} = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Используем подстановку $\sqrt[6]{x+1} = t$. Тогда

$$x = t^6 - 1;\ dx = 6t^5dt;\ t = \sqrt[6]{x+1};\ t^3 = \sqrt{x+1};\ t^2 = \sqrt[3]{x+1};\ t^4 = (x+1)^{\frac{2}{3}}.$$

$$I = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{(1+t^2)t^4} = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2+1}dt = 6\left(\int (t^2-1)dt + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t\right) + C = 2\sqrt{x+1} - 6\sqrt[6]{x+1} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1} + C.$$ ▶

4.2 Подстановки Эйлера

С помощью подстановок Эйлера можно вычислять интегралы вида

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx. \tag{4.2}$$

I. Первая подстановка $(a > 0)$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t.$$

Отсюда видно, что $x = R_1(t)$, например:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t;\;\; ax^2+bx+c = ax^2 + 2xt\sqrt{a} + t^2;$$

$$x\left(b - 2t\sqrt{a}\right) = t^2 - c;\;\; x = R_1(t) = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},$$

тогда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = R_2(t),\;\; dx = R_3(t)dt,$$

$$I = \int R(R_1(t), R_2(t))R_3(t)dt = \int R^*(t)dt \;\; -$$

интеграл от рациональной функции.

II. Вторая подстановка (корни трехчлена ax^2+bx+c – действительные)

Пусть $x_1,\;\; x_2$ – корни трехчлена ax^2+bx+c. Тогда

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

значит,

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right).$$

А это есть иррациональная функция, которую рассматривали при вычислении интегралов типа (4.1). Таким образом, имеем подстановку $\pm(x - x_i)t = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, где x_i – или x_1, или x_2.

III. Третья подстановка ($c > 0$).

Подстановка имеет вид

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Получим, например, при $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$, $ax^2 + bx + c = c + 2\sqrt{c}tx + x^2t^2$.

Отсюда имеем:

$$x = R_1(t), \sqrt{ax^2 + bx + c} = R_2(t),\ dx = R_3(t)dt.$$

Тогда

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(R_1(t), R_2(t))R_3(t)dt = \int R^*(t)dt \ -$$

получили интеграл от рациональной функции.

Замечание 4.1. Первая и вторая подстановки позволяют найти все интегралы типа (4.2), если функция $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ определена хотя бы на одном невырожденном промежутке.

Третий случай ($c > 0$) сводится к первому ($a > 0$) при помощи подстановки $x = \frac{1}{z}$.

Пример 4.2. Вычислите $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

◀Имеем третий случай – $c = 1 > 0$ (подходит и вторая подстановка Эйлера) $\sqrt{1 - 2x - x^2} = 1 + xt$.

$$1 - 2x - x^2 = 1 + 2xt + x^2t^2;\ -2 - x = 2t + xt^2;\ x = \frac{-2 - 2t}{1 + t^2};$$

$$dx = \frac{2t^2 + 4t - 2}{(1 + t^2)^2}dt;\ \sqrt{1 - 2x - x^2} + 1 = 2 + t\frac{-2 - 2t}{1 + t^2} = \frac{2 - 2t}{1 + t^2}.$$

$$I=\int\frac{(2t^2+4t-2)(1+t^2)}{(1+t^2)^2(2-2t)}dt=\int\frac{t^2+2t-1}{(1+t^2)(1-t)}dt=$$

$$=\left[\frac{t^2+2t-1}{(1+t^2)(1-t)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{1-t}=\frac{(At+B)(1-t)+C(1+t^2)}{(1+t^2)(1-t)},\right.$$

$$\left.t^2+2t-1=(At+B)(1-t)+C(1+t^2)\Rightarrow A=0,\ B=-2,\ C=1\right]=$$

$$=\int\frac{-2}{1+t^2}dt+\int\frac{dt}{1-t}=-2\operatorname{arctg}t-\ln|1-t|+C,\ t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}. \blacktriangleright$$

Замечание 4.2. При использовании подстановок Эйлера обычно приходится иметь дело с громоздкими вычислениями, поэтому, по возможности, применяют другие, более короткие методы. Например:

1. Для интегралов типа

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{4.3}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени $n\in\mathbb{N}$, справедлива следующая формула:

$$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+C_0\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{4.4}$$

где Q_{n-1} – многочлен степени не выше, чем $n-1$, коэффициенты которого и C_0 находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования обеих частей (4.4). Если же $n\leqslant 1$, то с помощью выделения полного квадрата и подстановки интеграл (4.3) сводится к табличному.

2. Интегралы типа

$$\int\frac{B}{(x-A)^\alpha\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{4.5}$$

где $A,\ B,\ a,\ b,\ c$ – некоторые действительные постоянные, а $\alpha\in\mathbb{N}$, сводятся к интегралам типа (4.3) с помощью подстановки $t=\frac{1}{x-A}$.

3. При вычислении интегралов типа

$$\int \frac{(Mx+D)}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \tag{4.6}$$

где $M,\ D,\ p,\ q,\ a,\ b,\ c$ – известные действительные постоянные, $m\in\mathbb{N}$, нужно использовать следующее:

1) если $p=b=0$, то интеграл разбиваем на два:

$$I_1=\int \frac{Mx}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}}dx=\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2+q)^m\sqrt{ax^2+c}} -$$

это интеграл типа (4.1) с линейной иррациональностью относительно x^2, подстановка $t=\sqrt{ax^2+c}$;

$$I_2=D\int \frac{dx}{\left(1+\frac{q}{x^2}\right)^m\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}x^{2m}x}=-\frac{D}{2}\int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{m-1}d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{(1+\frac{q}{x^2})^m\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}} -$$

линейная иррациональность относительно $\frac{1}{x^2}$, подстановка $t{=}\sqrt{a+\frac{c}{x^2}}$;

2) основной случай (4.6), но $b=ap$. Подстановка $x=t-\frac{p}{2}$ (получим первый случай);

3) интеграл (4.6) и $b\neq ap$ – подстановка $x=\frac{\mu t+\nu}{1+t}$ (постоянные μ и ν выбираем так, чтобы в квадратных трехчленах коэффициенты при переменных x в первой степени были равны нулю).

Пример 4.3. Найти

$$\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx,\ \ x>0.$$

$$◀ \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx=\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx+\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$I_1=\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-1+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=$$

$$= \int \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$= \int d\left(\sqrt{x^2-x+1}\right) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right| + C_1.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x}=t;\ x=\frac{1}{t};\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \\ \sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t} \end{array}\right] =$$

$$= -\int \frac{t\cdot tdt}{t^2\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{d(t-\frac{1}{2})}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + C_2 = -\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right| + C_2.$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right| -$$

$$-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\right| + C,$$

где $C = C_1 + C_2$. ▶

Замечание 4.3. При вычислении интегралов

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$$

сначала берем подстановку $t = \sqrt{ax+b}$ или $t = \sqrt{cx+d}$, после чего получим интеграл типа (4.2).

Пример 4.4. Вычислите $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

$$◀ \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{1+t+\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{1+t^2} = t+z, \ 1+t^2 = t^2+2tz+z^2, \ t = \frac{1}{2z} - \frac{z}{2}, \\ dt = -\frac{1}{2}\ \frac{1+z^2}{z^2}dz, \ 1+t+\sqrt{1+t^2} = 1+2\frac{1-z^2}{2z}+z = \frac{z+1}{z} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-z^2)z(1+z^2)}{z(z+1)z^2}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-z)(1+z^2)}{z^2}dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z^2}+1-\frac{1}{z}-z\right)dz = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}+z-\ln|z|-\frac{z^2}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}+t-\sqrt{1+t^2}+\ln\left|\sqrt{1+t^2}-t\right|+\frac{(\sqrt{1+t^2}-t)^2}{2}\right)+C,$$

где $t = \sqrt{x}$.▶

4.3 Интегралы от дифференциальных биномов

Определение 4.1. *Выражение* $x^m(a+bx^n)^p dx$, *где* $a \neq 0$ *и* $b \neq 0$ *– действительные постоянные,* m, n, p *– некоторые рациональные числа, называется* ***дифференциальным биномом.***

Положим

$$x = t^{\frac{1}{n}}, \tag{4.7}$$

тогда $dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt$, и следовательно,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt.$$

Таким образом, интеграл

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \tag{4.8}$$

сводится подстановкой (4.7) к интегралу типа

$$\int (a+bt)^p t^q dt, \tag{4.9}$$

где p и q – рациональные числа. В рассматриваемом случае

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Первый случай: p – целое число.

Пусть $q = \frac{r}{s}$, где $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$. Согласно п. 4.1.1, в этом случае подстановка $z = t^{\frac{1}{s}}$ сводит интеграл (4.9) к интегралу от рациональной дроби.

Второй случай: q – целое число. Пусть теперь $p = \frac{r}{s}$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$. Согласно п. 4.1.1, интеграл (4.9) приводится в этом случае подстановкой $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

Третий случай: $p+q$ – целое. Пусть $p = \frac{r}{s}$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$. Запишем для наглядности интеграл (4.9) в виде

$$\int (a+bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Снова имеем интеграл типа, рассмотренного в том же п. 4.1.1. На этот раз к интегралу от рациональной дроби его приводит подстановка

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Итак, в трех случаях, когда одно из чисел p, q или $p+q$ является целым, интеграл (4.9) при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Применительно к интегралу (4.8) этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ является целым, интеграл (4.8) может быть сведен к интегралу от рациональной дроби. При этом в том случае, когда p целое, это сведение осуществляет подстановка

$$z = x^{\frac{n}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби $\frac{m+1}{n}$, то есть $\frac{m+1}{n} = \frac{r}{s}$; в том случае, когда $\frac{m+1}{n}$ – целое, – подстановка

$$z = (a+bx^n)^{\frac{1}{s}},$$

где число s является знаменателем дроби p, то есть $p = \frac{r}{s}$, а в том случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, – подстановка

$$z = (ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}},$$

где число s также является знаменателем дроби p.

Этот факт был известен еще И. Ньютону. Л. Эйлер высказал предположение, что ни для каких других показателей m, n и p интеграл от дифференциального бинома нельзя свести к интегралу от рациональных функций. Для рациональных показателей m, n и p, не удовлетворяющих указанным выше условиям, это было доказано П.Л. Чебышевым[1], а для иррациональных – Д.Д. Мордухай-Болтовским[2].

Пример 4.5. Найти $\int \frac{(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^6}dx$.

◄ $p = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $m = -6$, $n = 3$. Тогда и

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}.$$

Остается проверить последний случай

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1 \in \mathbb{Z}.$$

Берем подстановку

$$t = \left(\frac{1+2x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(1+2x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} = \left(x^{-3}+2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Тогда

$$x^{-3}+2 = t^3;\ -3x^{-4}dx = 3t^2dt;\ -x^{-4}dx = t^2dt,\ dx = -x^4t^2dt.$$

Имеем

$$-\int \frac{(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^2}\frac{1}{x^4}x^4t^2dt = -\int t^2t^2dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{(1+2x^3)^{\frac{5}{3}}}{5x^5} + C. \text{ ►}$$

---

[1] П.Л. Чебышев (1821–1894) – российский математик и механик.
[2] Д.Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952) – российский математик.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Опишите алгоритм вычисления интегралов типа (4.1).
2. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью подстановок Эйлера?
3. Запишите вид первой подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?
4. Запишите вид второй подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?
5. Запишите вид третьей подстановки Эйлера. В каком случае она применяется?
6. Запишите формулу для вычисления методом неопределенных коэффициентов интегралов типа

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

7. Опишите алгоритм вычисления интегралов типа

$$\int \frac{(Mx+D)dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

8. Какое выражение называют дифференциальным биномом?

9. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если p – целое число?

10. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если q – целое число?

11. Какую подстановку следует применять для вычисления интегралов вида $\int (a+bt)^p t^q dt$, если $p+q$ – целое число?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

Интегрирование иррациональных функций

1. Интегрирование простейших алгебраических иррациональностей

Задание 1. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

$$◀ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx.$$

Подынтегральная функция есть рациональная функция от дробных степеней x. Общее наименьшее кратное знаменателей 2 и 4 равно 4, а поэтому полагаем $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$, $t = \sqrt[4]{x}$. Откуда

$$I = 4\int \frac{t^2t^3}{t^3+1}dt = 4\int \frac{t^5}{1+t^3}dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$I = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right) + C. ▶$$

Задание 2. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[6]{2x-1}}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}dx$.

$$◀ \int \frac{\sqrt[6]{2x-1}}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1}-1)}dx = \Big[\sqrt[6]{2x-1} = t,\ \sqrt[3]{2x-1} = t^2,\ 2x-1 = t^6,$$

$$2dx = 6t^5dt,\ dx = 3t^5dt\Big] = \int \frac{t\cdot 3t^5}{t^6(t^2-1)}dt = 3\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{2x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-1}+1}\right| + C. ▶$$

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx.$$

$$◀ \int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx = \Bigg[\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t,\ \frac{2-x}{2+x} = t^3,$$

$$2-x = (2+x)t^3,\ 2-2t^3 = x + xt^3,\ x = \frac{2-2t^3}{1+t^3},$$

$$2-x = 2-\frac{2-2t^3}{1+t^3} = \frac{4t^3}{1+t^3},\ dx = \frac{-12t^2}{(1+t^3)^2}dt\Bigg] =$$

$$= -\int \frac{(1+t^3)^2\cdot t\cdot 12t^2}{16t^6(1+t^3)^2}dt = -\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. ▶$$

Задание 4. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \Bigg[(1-x)\sqrt{1-x^2} = (1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)} =$$

$$= (1-x)|1+x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ \frac{1-x}{1+x} = t^2,\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$1-x = \frac{2t^2}{1+t^2},\ 1+x = \frac{2}{1+t^2}\Bigg] = -\int \frac{4t}{(1+t^2)^2\frac{2t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot t}dt =$$

$$= -\int\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. ▶$$

Задание 5. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \left[\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}, \right.$$

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t,\ \frac{x+2}{x-1} = t^4,\ x+2 = t^4(x-1),\ 2+t^4 = x(t^4-1),$$

$$\left. x = \frac{t^4+2}{t^4-1},\ x-1 = \frac{t^4+2}{t^4-1} - 1 = \frac{3}{t^4-1},\ x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1},\ dx = \frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt \right] =$$

$$= -\int \frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3}{3\cdot 3t^4\cdot t(t^4-1)^2}dt = -\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. ▶$$

2. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ всегда могут быть приведены к интегралу от рациональной функции при помощи подстановок Эйлера.

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

◀ Здесь $a=1$, $c=2$; следовательно, с одинаковым успехом можно применить как первую, так и третью подстановки Эйлера. Применим первую подстановку Эйлера.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \left[\sqrt{x^2+2x+2} = t-x,\right.$$

$$x^2+2x+2 = t^2-2tx+x^2,\ \ x=\frac{t^2-2}{2(1+t)},\ \ dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt,$$

$$\left. 1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}\right] =$$

$$= \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)2(1+t)^2}dt = \int \frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}dt =$$

$$= \left[\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2},\right.$$

$$t^2+2t+2 = A(t+2)^2+B(t+1)(t+2)+C(t+1) \Rightarrow A=1,\ C=-2,\ B=0;$$

$$\left.\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2} = \frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+2)^2}\right] = \int\frac{dt}{t+1} - 2\int\frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C =$$

$$= \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C. \ ▶$$

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}dx.$$

◀ Квадратный двучлен x^2+2x имеет два различных действительных корня: $x_1=0$, $x_2=-2$. Поэтому применяем вторую подстановку Эйлера:

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}dx = \Bigg[\sqrt{x^2+2x}=xt,\ x^2+2x=x^2t^2,\ 2=x(t^2-1),$$

$$x=\frac{2}{t^2-1},\ dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt,\ x+1=\frac{2}{t^2-1}+1=\frac{t^2+1}{t^2-1},$$

$$(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}=x^2t^2\cdot xt=x^3t^3=\frac{8t^3}{(t^2-1)^3}\Bigg]=$$

$$=-\int\frac{(t^2+1)(t^2-1)^3 4t}{(t^2-1)8t^3(t^2-1)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1}{t^2}dt=-\frac{1}{2}\int dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2t}+C=\left[t=\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]=-\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+2x}}+C=$$

$$=\frac{-x^2-2x+x^2}{2x\sqrt{x^2+2x}}+C=-\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}+C.$$ ▶

Задание 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

◀ Здесь $c > 0$; следовательно, можно применить третью подстановку Эйлера.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \Bigg[\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1,\ 1-2x-x^2 = x^2t^2-2xt+1,$$

$$x = \frac{2(t-1)}{t^2+1},\ dx = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}dt,\ 1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2(t-1)t}{t^2+1}\Bigg] =$$

$$= \int \frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)}dt = \Bigg[\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)t(t-1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t} + \frac{D}{t-1} =$$

$$= \frac{(At+B)t(t-1)+C(t^2+1)(t-1)+Dt(t^2+1)}{(t^2+1)t(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2+2t+1 = (At+B)t(t-1)+C(t^2+1)(t-1)+Dt(t^2+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=0,\ B=-2,\ C=-1,\ D=1\Bigg] =$$

$$= \int \frac{-2}{t^2+1}dt - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = -2\operatorname{arctg} t - \ln|t| + \ln|t-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - 2\operatorname{arctg} t + C = \left[t = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}\right] =$$

$$= \ln\left|\frac{\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}-1}{\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}}\right| - 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| - 2\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \blacktriangleright$$

Подстановки Эйлера, вообще говоря, ведут к громоздким выкладкам, а поэтому к ним следует прибегать лишь тогда, когда не видно других путей к вычислению данного интеграла.

Задание 4. Найти интеграл $\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$.

$$◀ \int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int \frac{5x+4}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx =$$

$$= \left[x+1=t,\ dx=dt\right] = \int \frac{5t-1}{\sqrt{t^2+4}}dt = 5\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$$

$$= 5\int d(\sqrt{t^2+4}) - \ln|t+\sqrt{t^2+4}| = 5\sqrt{t^2+4} - \ln|t+\sqrt{t^2+4}| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+2x+5} - \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C. ▶$$

Задание 5. Найти интеграл $\int \frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

◀ Воспользовавшись формулой (4.4), ищем решение в виде:

$$\int \frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}. \qquad (4.10)$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{2x^3-3x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{(Ax^2+Bx+C)(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}$$

и освобождаемся от знаменателя:

$$2x^3-3x-1 = (2Ax+B)(x^2+4x+5)+$$

$$+(Ax^2+Bx+C)(x+2)+\lambda.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 2, \\ 10A + 2B = 0, \\ 10A + 6B + C = -3, \\ 5B + 2C + \lambda = -1, \end{cases}$$

решая систему, находим:

$$A = \frac{2}{3}, \ B = -\frac{10}{3}, \ C = \frac{31}{3}, \ \lambda = -5.$$

Итак, равенство (4.10) примет вид:

$$\int \frac{2x^3 - 3x - 1}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{31}{3}\right)\sqrt{x^2+4x+5} - 5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C. \blacktriangleright$$

Задание 6. Найти интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}} = \left[x - 1 = \frac{1}{t}, \ t = \frac{1}{x-1}, \ dx = -\frac{dt}{t^2}, \right.$$

$$\left. x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2 = \frac{1}{t^2} - 2 = \frac{1-2t^2}{t^2}\right] = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-2t^2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-2t^2-1}{\sqrt{1-2t^2}}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t^2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{1-2t^2}dt - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t.$$

Интеграл $\int\sqrt{1-2t^2}dt$ можно найти по частям. В итоге получим:

$$\int \sqrt{1-2t^2}dt = \frac{t}{2}\sqrt{1-2t^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t + C.$$

$$I = \frac{t}{4}\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t + C = \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2-2x-1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1} + C. ▶$$

Задание 7. Найти интеграл

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}}dx.$$

◀Сначала разложим на элементарные дроби подынтегральную рациональную дробь:

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-3}{x-2} + \frac{4}{x-3}.$$

$$\int \frac{(x+1)}{(x^2-5x+6)\sqrt{x^2+4}}dx = \int\left(-\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = -3\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2+4}} + 4\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+4}}.$$

Каждый из полученных двух интегралов является интегралом типа (4.5) и, следовательно, первый из них берется с помощью подстановки $x-2=\frac{1}{t}$, а второй – с помощью подстановки $x-3=\frac{1}{z}$ (аналогично вычисляется интеграл в задании 6). Дальнейшие выкладки проделайте самостоятельно.▶

3. Интегралы от дифференциальных биномов

Задание 1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2}.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}+1)^2} = \int x^{-\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2} dx.$$

Здесь $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$, то есть p – целое число. Вводим подстановку $x^{\frac{1}{3}}=t$, откуда

$$x=t^3,\ dx=3t^2dt,\ x^{-\frac{2}{3}}=(t^3)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{t^2}.$$

Тогда

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^{-2}dx = 3\int \frac{t^2}{t^2(t+1)^2}dt = 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{3}{t+1}+C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C. \blacktriangleright$$

Задание 2. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Здесь $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}}=1$ есть целое число, следовательно, здесь нужно ввести подстановку $a+bx^n=t$.

Таким образом, для заданного интеграла берем подстановку $1+x^{\frac{1}{3}}=t$, откуда находим

$$x^{\frac{1}{3}}=t-1,\ x=(t-1)^3,\ dx=3(t-1)^2dt,\ x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{(t-1)^2}.$$

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx = 3\int \frac{t^{\frac{1}{2}}(t-1)^2}{(t-1)^2}dt = 3\int t^{\frac{1}{2}}dt = 2t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \left[t = x^{\frac{1}{3}}+1\right] = 2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} + C. \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6}dx = \int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Здесь $m=-6$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$. Легко видеть, что $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-6+1}{2}+\frac{1}{2}=-2$ есть целое число, то есть надо воспользоваться подстановкой $ax^{-n}+b=t$.

Таким образом, применительно к заданному интегралу мы берем подстановку $x^{-2}+1=t$, откуда получаем:

$$x^{-2}=t-1,\ x=\frac{1}{\sqrt{t-1}},\ dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^3}},\ (1+x^2)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{t}{t-1}}.$$

$$\int x^{-6}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^3\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}\sqrt{(t-1)^3}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t-1)t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}dt + \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \left[t=\frac{1+x^2}{x^2}\right] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C. \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

1.2 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

1.3 $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

1.4 $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$;

1.5 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$;

1.6 $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$;

1.7 $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$;

1.8 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

1.9 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$;

1.10 $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$;

1.11 $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

1.12 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

1.13 $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$;

1.14 $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$;

1.15 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$;

1.16 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$;

1.17 $\int \frac{x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}dx$;

1.18 $\int \frac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}dx$;

1.19 $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$;

1.20 $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$;

1.21 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$;

1.22 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$;

1.23 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$;

1.24 $\int \frac{x^2}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}dx$;

1.25 $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$;

1.26 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

1.27 $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

1.28 $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$;

1.29 $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(x+1)}\right)^2}$;

1.30 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;

1.31 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$;

1.32 $\int \frac{x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.33 $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

1.34 $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$;

1.35 $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$;

1.36 $\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$;

1.37 $\int \sqrt{x^2+x^4}dx$;

1.38 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

1.39 $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$;

1.40 $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$;

1.41 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$;

1.42 $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.43 $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$;

1.44 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

1.45 $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$.

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 5
Интегрирование некоторых трансцендентных функций

5.1 Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$

Функция типа $R(\sin x, \cos x)$ – это рациональная функция относительно аргументов $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим способы интегрирования таких функций.

а) Универсальная подстановка

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \ -\pi < x < \pi \quad \left(t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \ 0 < x < 2\pi\right).$$

С помощью указанной подстановки интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{5.1}$$

сводятся к интегралам от рациональных функций. Покажем это.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \ -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Кроме этого,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt, \tag{5.2}$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция.

Аналогично применяется подстановка $t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Пример 5.1. Найти $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

◀Используем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = [\text{смотри } (5.2)] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C. \blacktriangleright$$

б) Подстановки $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$.

Замечание 5.1. Использование универсальной подстановки часто приводит к громоздким преобразованиям, поэтому (по возможности) применяют в некоторых случаях другие подстановки.

Лемма 5.1. *Если $R(-u,v) = R(u,v)$, то $R(u,v) = R_1(u^2,v)$, где R, R_1 – рациональные функции.*

◀Функция R имеет только четные степени u.

$$R(u,v) = \frac{P_n(u,v)}{Q_m(u,v)} = R(-u,v) = \frac{P_n(-u,v)}{Q_m(-u,v)} =$$

$$= \left[\text{используем свойство пропорции } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}\right] =$$

$$= \frac{P_n(u,v)+P_n(-u,v)}{Q_m(u,v)+Q_m(-u,v)} = R_1(u^2,v) -$$

взаимно уничтожаются члены с нечетными степенями относительно u.▶

Лемма 5.2. *Если* $R(-u,v)=-R(u,v)$ $(R(u,-v)=-R(u,v))$, *то*

$$R(u,v)=uR_2(u^2,v)\quad (R(u,v)=vR_3(u,v^2)),$$

где R, R_1, R_2, R_3 *– рациональные функции.*

◀ $\frac{R(u,v)}{u}=R^*(u,v)$,

$$R^*(-u,v)=\frac{R(-u,v)}{-u}=\frac{-R(u,v)}{-u}=\frac{R(u,v)}{u}=R^*(u,v)=R_1^*(u^2,v)\Rightarrow R(u,v)=R_1^*(u^2,v)u,$$

где R^*, R_1^* – рациональные функции.▶

Дальше будем рассматривать интеграл (5.1).

I. Подстановка $t=\cos x$.

Теорема 5.1. *Если* $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, *то подстановка* $t=\cos x$ *приводит итеграл* (5.1) *к интегралу от рациональной функции.*

◀Используя лемму 5.2, будем иметь:

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_1(\sin^2 x,\cos x)\sin x\cdot dx=$$

$$=-\int R_1(1-\cos^2 x,\cos x)d(\cos x)=[t=\cos x]=\int R^*(t)dt.\ ▶$$

II. Подстановка $t=\sin x$.

Теорема 5.2. *Если* $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, *то подстановка* $t=\sin x$ *приводит итеграл* (5.1) *к интегралу от рациональной функции.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1.

III. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$.

Лемма 5.3. *Если $R(-u,-v) = R(u,v)$, то $R(u,v) = R_2(\frac{u}{v}, v^2)$.*

$$\blacktriangleleft\ R(u,v) = R\left(\frac{u}{v}\cdot v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u,-v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R(u,v) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Согласно лемме 5.1, $R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right) = R(u,v)$.$\blacktriangleright$

Теорема 5.3. *Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $t = \operatorname{tg} x$ $(t = \operatorname{ctg} x)$ приводит интеграл (5.1) к интегралу от рациональной функции.*

$$\blacktriangleleft \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)dx =$$

$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

где $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. $\blacktriangleright$

Пример 5.2. Найти $\int \frac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx$.

$$\blacktriangleleft\ R(\sin x, \cos x) = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{3+4\sin^2 x};\ R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Получим:

$$I = \int \frac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x+\sin^2 x)(3\cos^2 x+7\sin^2 x)}dx =$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x\, d(\mathrm{tg}\,x)}{(1+\mathrm{tg}^2 x)(3+7\,\mathrm{tg}^2 x)} = 2\int \frac{t}{(1+t^2)(3+7t^2)}dt =$$

$$= \left[\frac{t}{(1+t^2)(3+7t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{3+7t^2} = \right.$$

$$\left. = \frac{(At+B)(3+7t^2)+(Ct+D)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+7t^2)}\right].$$

Разложив подынтегральную функцию на сумму элементарных дробей и найдя неизвестные коэффициенты A, B, C, D, получим:

$$I = 2\int \frac{-\frac{1}{4}t}{1+t^2}dt + 2\int \frac{\frac{7}{4}t}{3+7t^2}dt = -\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{4}\ln\left(3+7t^2\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2 x\right) + \frac{1}{4}\ln\left(3+7\,\mathrm{tg}^2 x\right) + C. \blacktriangleright$$

в) Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx. \tag{5.3}$$

I. Если $m, n \in \mathbb{Q}$ (рациональные числа), то с помощью подстановки $t = \cos x$ или $t = \sin x$ интеграл вида (5.3) сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Например, если $t = \cos x$, $x \in (0, \pi)$, тогда

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}},\ dt = -\sin x dx;\ dx = -\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Значит,

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = -\int (1-t^2)^{\frac{m}{2}} t^n \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = -\int t^n (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}} dt.$$

Вывод. Интеграл типа (5.3) при $m, n \in \mathbb{Q}$ выражается через элементарные функции тогда, когда этой возможностью обладает соответствующий интеграл от дифференциального бинома.

Если m, n – целые (не обязательно положительные) числа, интеграл (5.3) относится к типу интегралов, рассмотренных выше; в частности, для вычисления таких интегралов целесообразно применять подстановки $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$.

Например, если $m = 2k+1$ $(n = 2k+1)$ – нечетное число, то можно использовать подстановку $t = \cos x$ (соответственно $t = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-t^2)^k t^n dt = \int R(t) dt.$$

Аналогично с помощью подстановки $t = \sin x$ можно интеграл

$$\int \sin^m x \cdot \cos^{2k+1} x dx$$

представить в виде интеграла от рациональной функции.

Если $m = 2k+1$ и $n = 2l+1$, то бывает полезной подстановка $t = \cos 2x$. При этом полезно знать так называемые формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

$$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \cos^{2l} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l \left(-\frac{1}{2} d(\cos 2x)\right) = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1-t)^k (1+t)^l dt = \int R(t) dt.$$

Замечание 5.2. Если $m, n \in \mathbb{Z}$, то для вычисления интеграла типа (5.3) можно использовать подстановки такие же, как и для интегралов типа (5.1).

Если же m, n – четные и положительные числа (или одно из них равно 0), то при вычислении интегралов типа (5.3) применяется так называемый метод удвоенного угла. Покажем это на примере.

Пример 5.3. Найти $\int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x dx$.

$$◀ \int \cos^4 3x \cdot \sin^2 3x dx = \Big[\cos^4 3x \cdot \sin^2 3x = \cos^2 3x(\cos^2 3x \cdot \sin^2 3x) =$$

$$= \frac{1+\cos 6x}{2} \cdot \frac{\sin^2 6x}{4} = \frac{1}{8}(\sin^2 6x + \sin^2 6x \cdot \cos 6x) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 12x}{2} + \sin^2 6x \cdot \cos 6x\right)\Big] =$$

$$= \int \frac{1}{8}\left(\frac{1-\cos 12x}{2} + \sin^2 6x \cdot \cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{6}\int \sin^2 6x d(\sin 6x)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{24}\sin 12x + \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C. ▶$$

Замечание 5.3. При вычислении интегралов типа $\int \operatorname{tg}^n x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ (сводятся к интегралу типа $R(\sin x, \cos x)dx$, а $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$) кроме известных подстановок $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$

$$\left(\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x \cdot \cos^2 x}{(\cos^2 x + \sin^2 x)\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^n x d(\operatorname{tg} x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt\right)$$

можно использовать так называемый **метод понижения степени**. Покажем это на примере.

Пример 5.4. Найти $\int \operatorname{ctg}^5 4x dx$.

$$\blacktriangleleft \int \operatorname{ctg}^5 4x dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^5 4x d(4x) = [4x = t] = \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^5 t dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t d(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^3 t dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16} - \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg} t \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = -\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16} - \frac{1}{4}\int \operatorname{ctg} t d(\operatorname{ctg} t) + \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin t} dt =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{16} - \frac{\operatorname{ctg}^2 t}{8} + \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin t} = -\frac{\operatorname{ctg}^4 4x}{16} - \frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8} + \frac{1}{4}\ln|\sin 4x| + C. \blacktriangleright$$

Замечание 5.4. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$ вычисляют, пользуясь известными тригонометрическими формулами:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y));$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)).$$

5.2 Интегралы типа $\int R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)dx$

Известно, что

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

гиперболические функции. Обратные им:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}),$$

$$\operatorname{Arth} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ \operatorname{Arcth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Способы интегрирования функций $R(\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x)$:

а) Универсальная подстановка $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$. При этом $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, так как

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2} = 2\frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)}{2} =$$

$$= 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sh}\frac{x}{2};$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x} + 2 - e^x - e^{-x} + 2\right) = 1;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, так как

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2 + e^x + e^{-x} - 2) = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

$dx = \frac{2dt}{1-t^2}$, так как

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \Rightarrow x' = (2\operatorname{Arth} t)' = \left(2\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)' =$$

$$= (\ln(1+t) - \ln(1-t))' = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{2}{1-t^2}.$$

Тогда

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2} = \int R_1(t)dt \; -$$

получили интеграл от рациональной функции.

б) Подстановки $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$, $t = thx$. Для вычисления интегралов указанного типа используется следующее:

I) если $R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ – подстановка $t = \operatorname{sh} x$;
II) если $R(-\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ – подстановка $t = \operatorname{ch} x$;
III) если $R(-\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ – подстановка $t = \operatorname{th} x$.

Пример 5.5. Найти $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x}$.

◄ Подынтегральная функция будет иметь вид $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$, и

$$R(\operatorname{sh} x, -\operatorname{ch} x) = -R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x).$$

Поэтому используем подстановку $t = \operatorname{sh} x$. Получим:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{sh} x \\ dt = \operatorname{ch} x dx \end{array}\right] = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}^2 x + 3)} dx =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{sh} x)}{(1 + \operatorname{sh}^2 x)(4 + \operatorname{sh}^2 x)} = \int \frac{dt}{(1 + t^2)(4 + t^2)} =$$

$$= \left[\frac{1}{(1 + t^2)(4 + t^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{4 + t^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \frac{dt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{4 + t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} \operatorname{sh} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh} x}{2}\right) + C. \blacktriangleright$$

Замечание 5.5. При вычислении интегралов вида $\int \operatorname{sh}^m x \cdot \operatorname{ch}^n x dx$, где m, n – рациональные числа, использование подстановки $t = \operatorname{sh} x$ ($t = \operatorname{ch} x$) приводит указанные интегралы к интегралам от дифференциальных биномов.

5.3 Интегралы типа $\int R(e^x)dx$

В этом случае подстановка $t = e^x$ приводит интеграл к интегралу от рациональной функции.

Пример 5.6. Найти $\int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}dx$.

$$◀ \int \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right] = \int \frac{(1+(e^x)^2)\, e^x}{e^x(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt =$$

$$= \left[\frac{1+t^2}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2};\ 1+t^2 = A(1+t)^2 + Bt(1+t) + Ct \right].$$

Применив метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$I = \int \frac{dt}{t} - 2\int (t+1)^{-2} d(t+1) = \ln|t| + \frac{2}{t+1} + C =$$

$$= \ln e^x + \frac{2}{e^x+1} + C = x + \frac{2}{e^x+1} + C. ▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите универсальную подстановку, с помощью которой всегда достигается рационализация дифференциала вида

$$R(\sin x, \cos x)dx, \tag{5.4}$$

и покажите, как ею пользоваться.

2. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой $\cos x = t$? Приведите доказательство.

3. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой $\sin x = t$? Приведите доказательство.

4. В каких случаях рационализация дифференциала (5.4) достигается подстановкой

$$\operatorname{tg} x = t, \ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)?$$

Приведите доказательство.

5. Выведите рекуррентные формулы для вычисления интегралов вида

$$\int x^n e^{ax} \sin bx dx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bx dx.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Интегрирование некоторых трансцендентных функций

Задание 1. Найти интеграл $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x} dx$.

$$◀ \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x} dx = \left[\sin^2 x = t,\ 2\sin x \cdot \cos x dx = dt,\ \sin^4 x = t^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin^2 x) + C. ▶$$

Задание 2. Найти интеграл $\int \sin mx \cdot \cos nx dx\ (m \neq n)$.

$$◀ \int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int \sin\left[(m-n)x\right] dx + \frac{1}{2} \int \sin\left[(m+n)x\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m-n)x}{m-n} + \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right] + C. ▶$$

Задание 3. Найти интеграл

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx.$$

$$◀ \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx = \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] =$$

$$= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t + 2\right) dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{1}{2} t^2 + 2t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. ▶$$

Задание 4. Найти интеграл
$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx.$$

$$◀\ R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos^2 x - \sin^2 x};\ R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Подходит подстановка $t = \cos x$. Имеем:
$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{-(2-\cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1} d(\cos x) = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{t^2 - \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \ln\left|\frac{t - \sqrt{\frac{1}{2}}}{t + \sqrt{\frac{1}{2}}}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C. ▶$$

Задание 5. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}.$$

$$◀ \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 + 4\,\mathrm{tg}^2 x} = \int \frac{d(\mathrm{tg}\, x)}{3 + 4\,\mathrm{tg}^2 x} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{3 + (2t)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\, \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{3}} + C. ▶$$

Задание 6. Найти интеграл
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$
$$◀ \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C. ▶$$
Задание 7. Найти интеграл
$$\int \operatorname{tg}^5 x dx.$$
$$◀ \int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) +$$
$$+ \int \operatorname{tg} x dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$
Здесь мы воспользовались тем, что
$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\sin x} = -\ln|\cos x| + C. ▶$$
Задание 8. Найти интеграл
$$\int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x}.$$
$$◀ \int \frac{dx}{\cos^3 x \cdot \sin^3 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^6 x}}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \operatorname{tg}^{-3} x \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)^2 \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{-3} x \left(\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 1\right) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + 2\int \operatorname{tg}^{-1} x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^{-3} x d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 2\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int (\sin x)^{-6} \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (\sin x)^{-6}(1 - \sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^{-6} x d(\sin x) - \int \sin^{-4} x d(\sin x) = -\frac{1}{5}\sin^{-5} x + \frac{1}{3}\sin^{-3} x + C =$$

$$= \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C. \blacktriangleright$$

Задание 10. Найти интеграл

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$\blacktriangleleft \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos^2 2x)(1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \blacktriangleright$$

Задание 11. Найти интеграл

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx.$$

$$◀ \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x d(\cos x) = \Big[\cos x = t\Big] = -\int t^2(1-t^2)^2 dt =$$

$$= -\int t^2 dt + 2\int t^4 dt - \int t^6 dt = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C. ▶$$

Задание 12. Найти интеграл

$$\int \mathrm{sh}^3 x dx.$$

$$◀ \int \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{sh}\, x dx = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1) d(chx) = \frac{\mathrm{ch}^3 x}{3} - \mathrm{ch}\, x + C. ▶$$

Задание 13. Найти интеграл

$$\int \mathrm{th}^4 x dx.$$

$$◀ \int \mathrm{th}^4 x dx = \left[\mathrm{th}\ x = t,\ dt = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = (1-\mathrm{th}^2 x)dx\right] = \int \frac{t^4}{1-t^2}dt = -\int \left(1 + t^2 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt =$$

$$= -t - \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\mathrm{th}\ x - \frac{\mathrm{th}^3 x}{3} + x + C. ▶$$

Задание 14. Найти интеграл
$$\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}dx.$$

$$◀ \int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x}dx = \int \frac{(1+e^x)e^x}{(1-e^{2x})e^{2x}}dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t, \\ e^x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{(1+t)}{(1-t^2)t^2}dt =$$
$$= -\int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \left[\frac{1}{(t-1)t^2} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \right] =$$
$$= -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t} = -\ln|t-1| - \frac{1}{t} + \ln|t| + C = \ln\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right| - e^{-x} + C. ▶$$

Задание 15. Найти интеграл
$$\int e^{\arcsin x}dx.$$

$$◀ \int e^{\arcsin x}dx = \left[\begin{array}{c} \arcsin x = t, \\ x = \sin t,\ \ dx = \cos t dt \end{array} \right] = \int e^t \cos t dt.$$

Интеграл $I = \int e^t \cos t dt$ можно найти методом интегрирования по частям. Методика нахождения интегралов такого типа была подробно рассмотрена на третьем практическом занятии.▶

Задание 16. Найти интеграл
$$\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx.$$

$$◀ \int xe^{\sqrt[3]{x}}dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt[3]{x} = t,\ \ x = t^3, \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right] = \int 3t^5 e^t dt.$$

Интеграл $I = \int 3t^5 e^t dt$ можно найти методом интегрирования по частям или с помощью метода неопределенных коэффициентов. Методика нахождения интегралов такого типа была подробно рассмотрена на третьем практическом занятии.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1 $\int \cos^5 x dx;$

1.2 $\sin^6 x dx;$

1.3 $\int \cos^6 x dx;$

1.4 $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx;$

1.5 $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx;$

1.6 $\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x dx;$

1.7 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$

1.8 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx;$

1.9 $\int \frac{dx}{\sin^3 x};$

1.10 $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$

1.11 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x};$

1.12 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x};$

1.13 $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x};$

1.14 $\int \operatorname{tg}^5 x dx;$

1.15 $\int \operatorname{ctg}^6 x dx;$

1.16 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}};$

1.17 $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}};$

1.18 $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}};$

1.19 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}};$

1.20 $\int \sin 5x \cdot \cos x dx;$

1.21 $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x dx;$

1.22 $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 3x dx;$

1.23 $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5};$

1.24 $\int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x};$

1.25 $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx;$

1.26 $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx;$

1.27 $\int \frac{dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$

1.28 $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

1.29 $\int \frac{\sin^2 x - \cos 62x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx;$

1.30 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx;$

1.31 $\int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{tg} x};$

1.32 $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3\cos x} dx;$

1.33 $\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx;$

1.34 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin x \cos x}} dx;$

1.35 $\int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$;

1.36 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$;

1.37 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx$;

1.38 $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;

1.39 $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

1.40 $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$;

1.41 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$;

1.42 $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$;

1.43 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$;

1.44 $\int \operatorname{sh}^3 x dx$;

1.45 $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{sh} 3x dx$;

1.46 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}$;

1.47 $\int \sqrt{\operatorname{th} x}dx$;

1.48 $\int \frac{\operatorname{ch} x}{3\operatorname{sh} x-4\operatorname{ch} x}dx$.

2. Ответьте на вопросы теста.

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1. Вариант 2. Вариант 3. Вариант 4.

Итоговый тест по разделу «Неопределенный интеграл»

Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 6
Определенный интеграл Римана[1]

6.1 Разбиение отрезка

Пусть задан отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

Определение 6.1. ***Разбиением отрезка*** $[a, b]$ *называется любой упорядоченный набор различных точек из этого отрезка, включающий его концы:*

$$\tau: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1, n})$ будем называть **частичными**.Через

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

будем обозначать длину k-го частичного отрезка.

Разбиение отрезка $[a, b]$ дает его представление в виде объединения $[a, b] = \bigcup\limits_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$.

Мелкостью разбиения называется число

$$\lambda = \lambda_\tau = \max_{k=\overline{1,n}} \{\Delta x_k\}.$$

Эта величина характеризует степень измельчения отрезка точками разбиения.

Определение 6.2. *Если задано разбиение τ отрезка $[a, b]$ и на каждом частичном отрезке зафиксирована точка*

$$\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k], \ k = \overline{1, n},$$

то обозначим $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ и пару $(\tau, \overline{x})$ назовем ***разбиением с отмеченными точками***.

[1] Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) – немецкий математик.

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть $f \in C([a,b])$ и для любого $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant 0$.

Определение 6.3. *Фигура, ограниченная графиком функции f, осью Ox, вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, называется* ***криволинейной трапецией*** (*рисунок 6.1*).

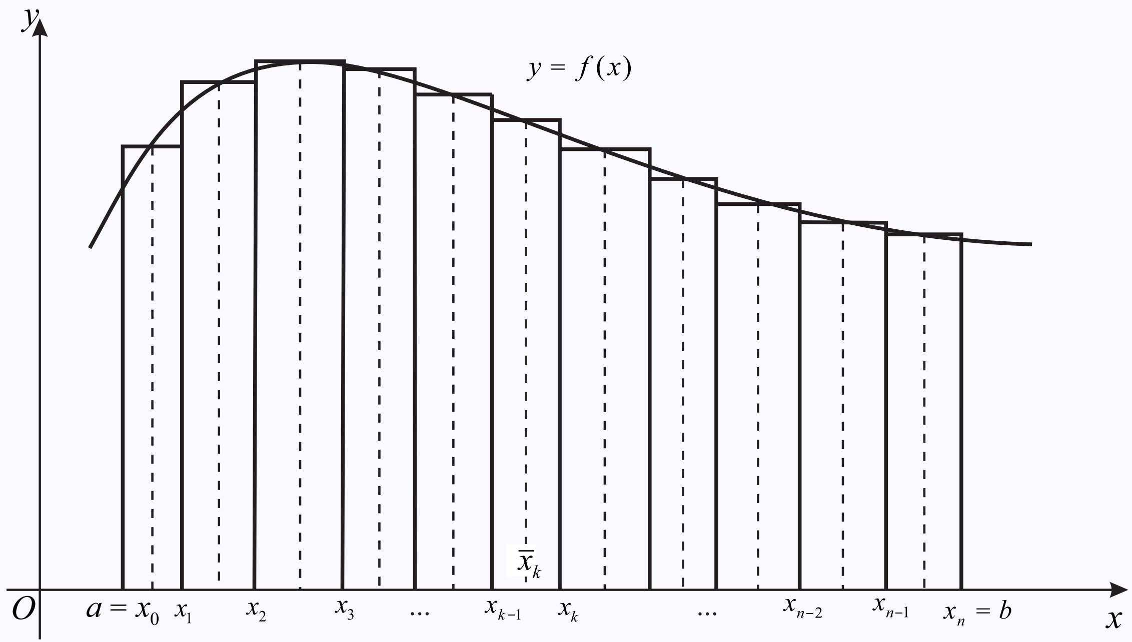


Рисунок 6.1 – Криволинейная трапеция

Дадим понятие площади криволинейной трапеции, а также укажем метод ее вычисления.

◀Возьмем любое разбиение с отмеченными точками $(\tau, \overline{x})$. Построим прямоугольники, для которых основаниями служат отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, а высоты равны $f(\overline{x}_k)$. Получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна

$$\sigma_\tau\left(f; \bar{x}_k\right) = \sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k. \tag{6.1}$$

Площадь ступенчатой фигуры приближенно равна площади S криволинейной трапеции:

$$S \approx \sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k.$$

С уменьшением всех величин Δx_k точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции можно принять предельное значение S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры σ_τ, если n неограниченно возрастает так, что $\lambda_\tau \to 0$.

Таким образом, для вычисления площади криволинейной трапеции необходимо определить предельный переход

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_\tau \to 0)}} \sigma_\tau = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_\tau \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k, \tag{6.2}$$

и под площадью криволинейной трапеции можно будет понимать указанный предел при условии, что он существует и не зависит от способа разбиения τ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\overline{x}_k$.

Далее будет показано, что такой предел существует, значит, формула (6.2) и дает нам метод вычисления площади криволинейной трапеции.▶

Задача о работе переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается под действием силы, направленной вдоль оси Ox и имеющей переменную величину $F(x)$, где x – абсцисса движущейся точки M. Найти работу A силы $F(x)$ по перемещению точки M вдоль оси Ox из точки $x = a$ в точку $x = b$ $(a < b)$.

◀Возьмем любое разбиение с отмеченными точками $(\tau, \overline{x})$. Сила, действующая на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, меняется от точки к точке. Но если длина частичного отрезка достаточно мала, то сила на этом отрезке изменяется незначительно. Ее можно приближенно считать постоянной и равной значению функции $F(\overline{x}_k)$. Поэтому работа, совершаемая этой силой на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, равна произведению $F(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$ (как работа постоянной силы $F(\overline{x}_k)$ на прямолинейном участке $[x_{k-1}, x_k]$).

Приближенное значение работы A силы на всем отрезке $[a; b]$:

$$A \approx F(\overline{x}_1)\Delta x_1 + F(\overline{x}_2)\Delta x_2 + \ldots + F(\overline{x}_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(\overline{x}_k)\Delta x_k. \tag{6.3}$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина Δx_k. Поэтому за точное значение работы A можно принять предельное значение суммы при стремлении наибольшей длины Δx_k частичных отрезков к нулю:

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda_\tau \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} F(\overline{x}_k)\Delta x_k, \tag{6.4}$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от указанного способа разбиения τ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек $\overline{x}_k$.▶

6.3 Понятие определенного интеграла, его геометрический и механический смысл

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и задано любое разбиение $(\tau, \overline{x})$ отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками.

Определение 6.4. *Сумма*

$$\sigma_\tau(f, \overline{x}) = \sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k \tag{6.5}$$

называется ***интегральной суммой*** *(**Римана**) функции f, соответствующей разбиению с отмеченными точками $(\tau, \overline{x})$.*

Определение 6.5. *Число I называется* ***пределом интегральной суммы****, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \ \forall\ \tau \ \ \lambda_\tau < \delta \ \ \forall\ \overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k] \ \ \ |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Краткая запись: $I = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$.

Если предел (6.5) существует, то он называется ***определенным интегралом*** *(**Римана**) функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается*

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{6.6}$$

(читается «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

В этом случае говорят также, что функция f ***интегрируема*** *(**по Риману**) на отрезке $[a, b]$.*

Класс всех интегрируемых на $[a, b]$ функций будем обозначать $R([a, b])$.

В обозначении определенного интеграла (6.6) a называется **нижним пределом интегрирования**, b – **верхним пределом интегрирования**, f – **подынтегральной функцией** и $f(x)dx$ – **подынтегральным выражением**.

Определение 6.6. *Если $a > b$ и функция $f \in R([a,b])$, то положим*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{6.7}$$

Кроме того, пусть

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Пример 6.1. Докажите, используя определение интеграла, что

$$\int_a^b dx = b - a.$$

◀При любом разбиении с отмеченными точками $(\tau, \overline{x})$

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a,$$

тогда существует

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = b - a = \int_a^b dx. \blacktriangleright$$

Замечание 6.1. Далее будет доказана теорема о том, что если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Пример 6.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{10} 2^x dx, \tag{6.8}$$

используя определение интеграла как предела частичных сумм Римана.

◀Функция $f(x) = 2^x$ непрерывна на $[0, 10]$, поэтому существует $\int_0^{10} 2^x dx$. Теперь достаточно подобрать последовательность таких разбиений отрезка $[a, b]$ на конечное число частичных отрезков, чтобы предел соответствующих интегральных сумм Римана без особых сложностей можно было вычислить (если предел интегральных сумм существует при $\lambda_\tau \to 0$, то существует и предел любой из последовательностей интегральных сумм, и они совпадают).

Разбиваем отрезок $[0, 10]$ точками $x_k = k\frac{10}{n}$ $(k = \overline{1, n-1})$. В качестве точек $\overline{x}_k$ берем правые концы частичных отрезков $\left[(k-1)\frac{10}{n}, k\frac{10}{n}\right]$ $(k = \overline{1, n})$, $\lambda_\tau = \frac{10}{n}$. Имеем:

$$\int_0^{10} 2^x dx = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k = \lim_{\frac{10}{n} \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2^{k\frac{10}{n}} \cdot \frac{10}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \left(2^{\frac{10}{n}} + \left(2^{\frac{10}{n}}\right)^2 + \left(2^{\frac{10}{n}}\right)^3 + \ldots + \left(2^{\frac{10}{n}}\right)^n \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \frac{2^{\frac{10}{n}}\left(1 - \left(2^{\frac{10}{n}}\right)^n\right)}{1 - 2^{\frac{10}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{n} \cdot 2^{\frac{10}{n}}\left(2^{10} - 1\right)}{2^{\frac{10}{n}} - 1} = \left(2^{10} - 1\right) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10}{n}}{\frac{10}{n} \ln 2} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}.$$ ▶

Замечание 6.2. Из задачи о площади криволинейной трапеции следует, что ее площадь можно определить как

$$\int\limits_a^b f(x)dx;$$

в этом и заключается **геометрический смысл** определенного интеграла.

Замечание 6.3. Из задачи о работе переменной силы следует, что указанную работу можно определить как

$$\int\limits_a^b F(x)dx;$$

в этом и заключается **механический смысл** определенного интеграла.

6.4 Необходимое условие интегрируемости функции

Теорема 6.1. *Если функция $f \in R\left([a,b]\right)$, то она ограничена на этом отрезке.*

◀Допустим обратное, то есть предположим, что f – не является ограниченной на $[a,b]$. Рассмотрим любое разбиение $(\tau, \overline{x})$ отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками. Так как функция f не является ограниченной на $[a,b]$, то она не будет ограниченной на одном из частичных отрезков, скажем на $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)[x_k - x_{k-1}]\right| \geqslant |f(\overline{x}_i)|\,[x_i - x_{i-1}] - \left|\sum_{i\neq k=1}^{n} f(\overline{x}_k)[x_k - x_{k-1}]\right|.$$

Первое слагаемое может быть сделано сколь угодно большим за счет выбора точки $\overline{x}_i$, поэтому интегральные суммы не являются ограниченными. Значит, не может существовать конечный предел интегральной суммы, то есть функция не будет интегрируемой на отрезке $[a,b]$, что противоречит условию теоремы.▶

Замечание 6.4. В общем случае условие ограниченности функции f на отрезке $[a,b]$ не является достаточным условием ее интегрируемости, о чем и говорит следующий пример.

Пример 6.3. Докажите, что функция Дирихле[2]

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [a,b], \end{cases}$$

не является интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

◀Очевидно, что D ограничена на $[a,b]$. Покажем, что $\int\limits_a^b D(x)dx$ не существует.

Зафиксируем произвольное разбиение τ отрезка $[a,b]$.
Если выбрать точки $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ рациональными, то получим

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} D(\overline{x}_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a,$$

а если взять $\overline{x}_k$ иррациональными, то

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} D(\overline{x}_k)\Delta x_k = 0.$$

Так как это верно для любого разбиения τ, то интегральные суммы σ_τ заведомо не стремятся ни к какому пределу при $\lambda_\tau \to 0$. ▶

---

[2]Петр Густав Лежен Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте задачи о площади криволинейной трапеции, о работе переменной силы, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Дайте определение определенного интеграла Римана.
3. Каков механический смысл определенного интеграла Римана?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла Римана?
5. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции на отрезке.

ЛЕКЦИЯ 7
Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости

7.1 Нижние и верхние суммы Дарбу[1], их свойства

Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Берем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$. На каждом из частичных отрезков функция f также будет ограничена. Введем обозначения:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}\,; \;\; M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\}\,. \tag{7.1}$$

$S_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ – **верхняя сумма Дарбу** функции f;

$s_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ – **нижняя сумма Дарбу** функции f.

В терминах сумм Дарбу ниже будут формулироваться критерии интегрируемости функции, для доказательства которых нам понадобятся некоторые свойства сумм Дарбу.

Теорема 7.1. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Тогда:*
а) $\forall\, (\tau, \overline{x})$ $s_\tau \leqslant \sigma_\tau(f; \overline{x}) \leqslant S_\tau$,
б) $\forall \tau$ $S_\tau = \sup\limits_{\overline{x}} \{\sigma_\tau(f; \overline{x})\}$,
в) $\forall \tau$ $s_\tau = \inf\limits_{\overline{x}} \{\sigma_\tau(f; \overline{x})\}$.

◀а) умножим неравенства $m_k \leqslant f(\overline{x}_k) \leqslant M_k$ на Δx_k и просуммируем полученные неравенства по всем k от 1 до n. Получим доказываемое неравенство;

[1]Жан Гастон Дарбу (1842–1917) – французский математик.

б) если $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{f(x)\}$, то (второе свойство точной верхней границы) для любого $\varepsilon > 0$, существует $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$, что справедливо неравенство

$$0 \leqslant M_k - f(\overline{x}_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Умножим все части последнего неравенства на $\Delta x_k > 0$ и просуммируем полученные неравенства по всем $k = \overline{1,n}$. Получим неравенство $0 \leqslant S_\tau - \sigma_\tau(f;\overline{x}) < \varepsilon$. Аналогично доказывается и в).►

Рассмотрим два разбиения τ и τ' отрезка $[a,b]$. Если каждый частичный отрезок разбиения τ' содержится в некотором частичном отрезке разбиения τ, то будем использовать запись $\tau \subset \tau'$, понимаемую в обычном теоретико-множественном смысле.

Теорема 7.2. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Если $\tau \subset \tau'$, то $s_\tau \leqslant s_{\tau'} \leqslant S_{\tau'} \leqslant S_\tau$.*

◄Предположим, что разбиение τ' получено из разбиения τ путем добавления одной точки разбиения $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Введем следующие обозначения:

$$m'_k = \inf_{x\in[x_{k-1},c_k]} \{f(x)\}\,;\ M'_k = \sup_{x\in[x_{k-1},c_k]} \{f(x)\}\,;$$

$$m''_k = \inf_{x\in[c_k,x_k]} \{f(x)\}\,;\ M''_k = \sup_{x\in[c_k,x_k]} \{f(x)\}\,;$$

$$\Delta' x_k = c_k - x_{k-1};\ \Delta'' x_k = x_k - c_k.$$

Тогда для частичных отрезков:
а) $[x_{k-1}, c_k] : m'_k \geqslant m_k,\ M'_k \leqslant M_k$,
б) $[c_k, x_k] : m''_k \geqslant m_k,\ M''_k \leqslant M_k$.
Значит, $M_k\Delta x_k \geqslant M'_k\Delta' x_k + M''_k\Delta'' x_k$. Откуда $S_{\tau'} \leqslant S_\tau$.
Аналогично доказывается, что $s_\tau \leqslant s_{\tau'}$ и в общем случае (в τ вводится любое конечное число новых точек разбиения и получается разбиение τ') утверждение свойства будет справедливо (доказательство проводится с использованием метода математической индукции).►

Теорема 7.3. *Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Для любых разбиений τ' и τ''*

$$s_{\tau'}\leqslant S_{\tau''}.$$

◀Через τ обозначим разбиение, которое включает как точки разбиения τ', так и τ''. Тогда $\tau'\subset\tau$ и $\tau''\subset\tau$, а значит (теорема 7.2), $s_{\tau'}\leqslant s_\tau\leqslant S_\tau\leqslant S_{\tau'}$, $s_{\tau''}\leqslant s_\tau\leqslant S_\tau\leqslant S_{\tau''}$. Отсюда и следует справедливость утверждения свойства.▶

Следствие 7.1. *Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Множество верхних сумм Дарбу по всем τ ограничено снизу, а нижних – сверху.*

◀По теореме 7.3, все нижние суммы Дарбу ограничены сверху любой верхней суммой Дарбу, а все верхние ограничены снизу любой из нижних сумм.▶

Определение 7.1. *Если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$, то числа*

$$I^*=\inf_\tau\{S_\tau\}\,,\;\;I_*=\sup_\tau\{s_\tau\}$$

*называются соответственно **нижним и верхним интегралами Дарбу** функции f на отрезке $[a,b]$.*

Теорема 7.4. *Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Тогда $I_*\leqslant I^*$.*

◀Предположим противное: $I_*>I^*$. Тогда (второе свойство точных границ) существуют такие разбиения τ', τ'', что $S_{\tau'}<\frac{I^*+I_*}{2}$, а $s_{\tau''}>\frac{I^*+I_*}{2}$. То есть $s_{\tau''}>S_{\tau'}$. Получили противоречие теореме 7.3.▶

Следствие 7.2. *Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена на $[a,b]$. Для любых разбиений τ справедливо неравенство*

$$s_\tau\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S_\tau.\tag{7.2}$$

◀Это вытекает из теоремы 7.4 и определения точных границ.▶

Теорема 7.5. *Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

◀**Необходимость.** Нам дана интегрируемость функции на отрезке $[a, b]$. Необходимо доказать,что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$.

Из интегрируемости функции следует, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ \tau\ \ \lambda_\tau < \delta\ \ \forall\ \overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]\ \ |\sigma_\tau - I| < \varepsilon/3,$$

$$I - \varepsilon/3 < \sigma_\tau < I + \varepsilon/3.$$

Значит, $I + \varepsilon/3$ – верхняя граница для множества интегральных сумм Римана, но S_τ – точная верхняя граница для этого множества, поэтому справедливо неравенство

$$\sigma_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \varepsilon/3 < I + \varepsilon/2.$$

Аналогично доказывается неравенство $I - \varepsilon/2 < I - \varepsilon/3 \leqslant s_\tau \leqslant \sigma_\tau$. Поэтому справедливо неравенство

$$I - \varepsilon/2 < s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau < I + \varepsilon/2,$$

из которого следует, что $0 \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Доказано, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ \tau\ \ \lambda_\tau < \delta\ \ 0 \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon,$$

а это означает, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$.

Достаточность. Известно, что $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$. Необходимо доказать, что функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Справедливо неравенство (7.2) $s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau$ и равенство

$$\lim_{\lambda_\tau\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0 : \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \tau \;\; \lambda_\tau < \delta \;\; S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Тогда $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon$; переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим $I^* = I_* = I$. Но справедливы неравенства $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$, $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$. Поэтому $|\sigma_\tau - I| < \varepsilon$.

Получили:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \tau \;\; \lambda_\tau < \delta \;\; \forall\, \overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k] \;\; |\sigma_\tau - I| < \varepsilon.$$

Значит, f интегрируема на $[a, b]$. ►

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a, b]$. Введем обозначение $\omega_k(f) = M_k - m_k$ для колебания функции f на k-ом частичном отрезке (M_k и m_k определены (7.1)). В терминах колебаний критерий интегрируемости 7.5 можно переформулировать так.

Теорема 7.6. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ограниченная на отрезке $[a, b]$, будет интегрируемой на этом отрезке тогда и только тогда, когда существует* $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k = 0$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятия нижней и верхней сумм Дарбу.
2. Сформулируйте свойства сумм Дарбу.
3. Сформулируйте понятия нижнего и верхнего интеграла Дарбу.
4. Сформулируйте критерий интегрируемости функции на отрезке.

ЛЕКЦИЯ 8
Условия существования определенного интеграла

8.1 Об интегрируемости непрерывных функций

Теорема 8.1. *Если* $f \in C([a,b])$, *то* $f \in R([a,b])$.

◀По теореме Кантора [1, теорема 13.7], из непрерывности функции на отрезке следует ее равномерная непрерывность на этом отрезке. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $\xi \in [a,b]$ и $\eta \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|\eta - \xi| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(\eta) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{8.1}$$

Возьмем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на n частичных отрезков с $\lambda_\tau < \delta$. Поскольку непрерывная на отрезке функция достигает своих нижней и верхней граней на этом отрезке, то существуют такие точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, что $f(\xi_i) = m_i$, $f(\eta_i) = M_i$. Точки ξ_i и η_i принадлежат одному и тому же отрезку разбиения τ, поэтому $|\eta_i - \xi_i| \leqslant \Delta x_i \leqslant \lambda_\tau < \delta$. Отсюда, в силу неравенства (8.1), вытекает неравенство

$$f(\eta_i) - f(\xi_i) = |f(\eta_i) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Следовательно, для любого разбиения τ мелкости $\lambda_\tau < \delta$ выполняется условие

$$0 \leqslant S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$. Поэтому согласно теореме 7.5 $f \in R([a,b])$. ▶

8.2 Об интегрируемости монотонных функций

Теорема 8.2. *Если функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *монотонна на отрезке* $[a,b]$*, то* $f\in R([a,b])$.

◀Для определенности допустим, что функция f является неубывающей на $[a,b]$. Возможны два случая:

1. $f(x)=\mathrm{const}$, например $f(x)=M$, тогда существует $\int\limits_a^b M\,dx = M(b-a)$ (при вычислении используем определение определенного интеграла).

2. $f(x)\neq\mathrm{const}$, тогда $f(b)>f(a)$. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и любое разбиение τ с мелкостью

$$\lambda_\tau<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Получим:

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k<$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon.$$

Таким образом:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0\ \ \forall\ \tau\ \ \lambda_\tau<\delta\ \ S_\tau-s_\tau<\varepsilon,$$

то есть $\lim\limits_{\lambda_\tau\to0}(S_\tau-s_\tau)=0$.▶

8.3 Критерий Дарбу интегрируемости функции

Лемма 8.1. *Если функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ограничена на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$I^* = \lim_{\lambda_\tau\to 0} S_\tau,\ I_* = \lim_{\lambda_\tau\to 0} s_\tau.$$

◀Докажем, например, что $I^* = \lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} S_\tau$. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Функция f ограничена на $[a,b]$, что означает:

$$\exists\, c>0\ \ \forall\, x\in[a,b]\ \ |f(x)|\leqslant c.$$

Если $I^*=\inf\limits_\tau\{S_\tau\}$, то (второе свойство точной нижней границы)

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\tau_0\ \ S_{\tau_0}<I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть τ – любое разбиение отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки с $\lambda_\tau<\delta=\frac{\varepsilon}{4mc}$. Через τ^* обозначим разбиение отрезка $[a,b]$, состоящее из точек разбиений τ_0 и τ и только их, а поэтому $\tau_0\subset\tau^*$ и $\tau\subset\tau^*$. Тогда $S_{\tau^*}<I^*+\frac{\varepsilon}{2}$, $S_{\tau^*}\leqslant S_{\tau_0}$, $S_{\tau_0}<I^*+\frac{\varepsilon}{2}$.

Дальше оценим разность $S_\tau-S_{\tau^*}$. Во-первых, в этой разности взаимно уничтожатся слагаемые сумм $S_\tau=\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$ и $S_{\tau^*}=\sum\limits_{l=1}^{i}M_l\Delta x_l$, соответствующие частичным отрезкам $[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ разбиения τ, для которых в (x_{k-1},x_k) отсутствуют точки разбиения τ_0. Если же в интервал (x_{k-1},x_k) попала одна или несколько точек разбиения τ_0, тогда такой отрезок $[x_{k-1},x_k]$ равен объединению некоторого числа j $(j\in\mathbb{N})$ (в (x_{k-1},x_k) попала $(j-1)$ – точка разбиения τ_0) частичных отрезков разбиения τ^*, а длина частичного отрезка $[x_{k-1},x_k]$ будет равна сумме длин частичных отрезков-компонент указанного объединения, а именно: $\Delta x_k=\sum\limits_{r=1}^{j}\Delta x_r$. Получим:

$$-\sum_{r=1}^{j}M_r\Delta x_r+M_k\Delta x_k=\sum_{r=1}^{j}(M_k-M_r)\Delta x_r\leqslant 2c\sum_{r=1}^{j}\Delta x_r=2c\Delta x_k<2c\delta=\frac{2c\varepsilon}{4mc}=\frac{\varepsilon}{2m}.$$

Число таких отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ с точками разбиения τ_0 в (x_{k-1}, x_k) не превышает m – числа частичных отрезков разбиения τ_0 .

Значит, $S_\tau - S_{\tau^*} < \frac{\varepsilon}{2m} \cdot m = \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом

$$S - \tilde{I} = (S_\tau - S_{\tau^*}) + (S_{\tau^*} - I^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Вывод:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, \tau \;\;\; \lambda_\tau < \delta \;\;\; S_\tau - I^* < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = I^*.$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = I_*$.▶

Теорема 8.3 (критерий Дарбу). *Ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция будет интегрируемой на этом отрезке тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний интегралы Дарбу равны между собой $(I^* = I_* = I)$.*

◀**Необходимость.** Нам дана интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$. Необходимо доказать, что $I^* = I_*$.

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall \tau \;\;\; \lambda_\tau < \delta \;\;\; S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Кроме этого, справедливо неравенство $s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau$. Поэтому

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Из неравенства $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$ и следует справедливость равенства $I^* = I_*$.

Достаточность. Известно, что $I^* = I_*$. Необходимо доказать, что $f \in R\,([a, b])$.

f – ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} (S_\tau - s_\tau) = \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau - \lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = I^* - I_* = 0,$$

значит (теорема 7.5), функция f интегрируема на $[a, b]$. ▶

8.4 Критерий Римана интегрируемости функции

Теорема 8.4 (критерий Римана). *Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция будет интегрируемой по Риману на этом отрезке тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ отрезка $[a,b]$ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.*

◀**Необходимость.** Нам дана интегрируемость функции f; требуется доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Так как существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то, согласно лемме 8.1 и теореме 8.3 $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} s_\tau = I_* = I^* = \lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} S_\tau$, откуда

$$\lim_{\lambda_\tau\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0: \quad \forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 \;\; \forall\,\tau\;\lambda_\tau < \delta \;\; S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое τ, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Достаточность. Известно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Необходимо доказать интегрируемость функции.

Так как $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, то из неравенства $s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau$ следует, что $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, или $0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon$, значит, $I^* = I_*$, что равносильно (критерий Дарбу – теорема 8.3) интегрируемости функции f на отрезке $[a,b]$ по Риману.▶

Следствие 8.1. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ограниченная на отрезке $[a,b]$, будет интегрируемой по Риману на этом отрезке тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение τ, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon$.*

◀Учитывая, что $\omega_k(f)$ – колебание функции f на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$, имеем:

$$\omega_k(f) = M_k - m_k. \;▶$$

8.5 Об интегрируемости некоторых классов разрывных функций

Определение 8.1. *Система S множеств $M_x \subset \mathbb{R}$ называется* ***покрытием множества*** *$X \subset \mathbb{R}$, если для любого $x \in X$ существует M_x такое, что $x \in M_x$.*

Если множество S с элементами M_x конечное, то покрытие называется **конечным**, если S – бесконечное, то покрытие называется **бесконечным**.

Теорема 8.5. *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих точки разрыва функции f, а сумма длин этих интервалов меньше ε, то $f \in R([a, b])$.*

◀Пусть M и m – точные верхняя и нижняя грани функции f на отрезке $[a, b]$. Если $M = m$, то есть функция f постоянна, то, как уже говорилось при доказательстве теоремы 8.2, она интегрируема. Поэтому будем считать, что $M > m$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Покроем точки разрыва функции f конечным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Точки отрезка $[a, b]$, не принадлежащие указанным интервалам, очевидно, образуют множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков. Назовем эти отрезки дополнительными. На каждом из таких отрезков функция непрерывна. Значит, существуют такие числа $\delta_i > 0$, что если $|\xi' - \xi''| < \delta_i$, то $|f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ для всех ξ' и ξ'', принадлежащих i-му дополнительному отрезку.

Пусть $\delta = \min\limits_i \delta_i$. Тогда если взять разбиения дополнительных отрезков на частичные отрезки так, чтобы длина каждого из частичных отрезков не превосходила δ, то разность между точными верхней гранью M_k и нижней гранью m_k функции f на каждом частичном отрезке будет не больше $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Объединяя все разбиения дополнительных отрезков и указанные выше интервалы с присоединенными к ним концами, мы получим разбиение τ всего отрезка $[a, b]$. Для так построенного общего разбиения $[a, b]$

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = \Sigma'(M_k - m_k)\Delta x_k - \Sigma''(M_k - m_k)\Delta x_k, \tag{8.2}$$

где в сумму с одним штрихом отнесены слагаемые, отвечающие частичным отрезкам, образованным из интервалов, покрывающих точки разрыва, а в сумму с двумя штрихами – все остальные. Рассмотрим первое слагаемое правой части (8.2). Поскольку $M_k - m_k \leqslant M - m$ для любого k, то

$$\Sigma'(M_k - m_k)\Delta x_k \leqslant (M-m)\Sigma'\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу сказанного выше, из свойства равномерной непрерывности функции f на дополнительных отрезках получаем, что

$$\Sigma''(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Sigma''\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, нами указано разбиение τ, для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. По критерию Римана (теорема 8.4) получаем, что функция f интегрируема на $[a,b]$. ►

Следствие 8.2. *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a,b]$, то $f \in R([a,b])$.*

◄Допустим, что имеется n $(n \in \mathbb{N})$ точек разрыва функции f на $[a,b]$. Каждую точку разрыва $x_k \in [a,b]$ $(k = \overline{1,n})$ покроем интервалом $\left(x_k - \frac{\varepsilon}{3n}, x_k + \frac{\varepsilon}{3n}\right)$, тогда $\Delta x_k = \frac{2\varepsilon}{3n}$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2\varepsilon}{3n} = \frac{2\varepsilon}{3n} n = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$.

По теореме 8.5 функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. ►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке функции.
2. Сформулируйте теорему об интегрируемости монотонной функции на отрезке.
3. Сформулируйте критерий Дарбу об интегрируемости функции на отрезке.
4. Сформулируйте критерий Римана интегрируемости функции на отрезке.
5. Сформулируйте теорему об интегрируемости некоторых классов разрывных функций.

ЛЕКЦИЯ 9
Свойства определенного интеграла, связанные с равенствами

Прежде всего заметим, что поскольку интеграл от функции является числом, сопоставляемым заданной функции согласно данному выше определению, то само собой разумеется, что это число не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции, то есть от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi.$$

9.1 Свойство линейности

Теорема 9.1. *Если $f, g \in R([a,b])$, а α и β – любые действительные числа, то $\alpha f + \beta g \in R([a,b])$ и*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

◀Интегрируемость функции $\alpha f + \beta g$ следует из теоремы 7.6 и очевидного неравенства

$$\sum_{k=1}^n \omega_k\,(\alpha f + \beta g)\,\Delta x_k \leqslant |\alpha| \sum_{k=1}^n \omega_k(f)\Delta x_k + |\beta| \sum_{k=1}^n \omega_k(g)\Delta x_k.$$

Для любого разбиения τ

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^n (\alpha f(\overline{x}'_k) + \beta g(\overline{x}'_k))\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\overline{x}'_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\overline{x}'_k)\Delta x_k.$$

В последнем равенстве переходим к пределу при $\lambda_\tau \to 0$ и получаем справедливость утверждения теоремы.▶

9.2 Интегрируемость произведения и частного функций

Теорема 9.2. *Если* $f, g \in R([a,b])$, *то и* $f \cdot g \in R([a,b])$.

◀Функции f и g – ограничены на отрезке $[a,b]$ (необходимое условие интегрируемости функции на отрезке), поэтому существуют $A, B \in \mathbb{R}_+$, что для любой точки $x \in [a,b]$ $|f(x)| \leqslant A$ и $|g(x)| \leqslant B$. Берем любое разбиение τ и любые $\overline{x}'_k, \overline{x}''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$. Получим оценку сверху

$$|f(\overline{x}''_k)g(\overline{x}''_k) - f(\overline{x}'_k)g(\overline{x}'_k)| =$$
$$= |f(\overline{x}''_k)g(\overline{x}''_k) - f(\overline{x}'_k)g(\overline{x}''_k) + f(\overline{x}'_k)g(\overline{x}''_k) - f(\overline{x}'_k)g(\overline{x}'_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |(f(\overline{x}''_k) - f(\overline{x}'_k))g(\overline{x}''_k)| + |(g(\overline{x}''_k) - g(\overline{x}'_k))f(\overline{x}'_k)| \leqslant$$
$$\leqslant B(M_k^f - m_k^f) + A(M_k^g - m_k^g) = B\omega_k(f) + A\omega_k(g).$$

Число $B\omega_k(f) + A\omega_k(g)$ является верхней границей для множества модулей

$$L = \{|f(\overline{x}''_k)g(\overline{x}''_k) - f(\overline{x}'_k)g(\overline{x}'_k)|\}$$

по всем $\overline{x}''_k, \overline{x}'_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Через $\omega_k(f \cdot g) = M_k^{f\cdot g} - m_k^{f\cdot g}$ обозначим точную верхнюю границу для указанного множества L (колебание функции $f \cdot g$ на частичных отрезках $[x_{k-1}, x_k]$). Отсюда

$$\omega_k(f \cdot g) \leqslant B\omega_k^f + A\omega_k^g.$$

Левую и правую части последнего неравенства умножаем на $\Delta x_k > 0$ и просуммируем по всем k $(k = \overline{1,n})$:

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f \cdot g)\Delta x_k \leqslant B\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k + A\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k.$$

Видно, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} 0 = 0$ и $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \left(B\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k + A\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k\right) = 0$, тогда $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f \cdot g)\Delta x_k = 0$.

А тогда (следствие 8.1) существует $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.▶

Теорема 9.3. *Если* $f, g \in R([a,b])$, *а* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| = m > 0$, *то и* $\frac{f}{g} \in R([a,b])$.

◀а) рассмотрим сначала случай, когда $f(x) = 1$.
Имеем: $|g(x)| \geqslant m > 0$, отсюда $\frac{1}{|g(x)|} \leqslant \frac{1}{m}$ для любых $x \in [a,b]$. Значит, для любого разбиения τ

$$\left|\frac{1}{g(x'_k)} - \frac{1}{g(x''_k)}\right| \leqslant \frac{|g(x''_k) - g(x'_k)|}{m^2} \leqslant \frac{1}{m^2}\omega_k(g) \quad \forall\ x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Число $\frac{1}{m^2}\omega_k(g)$ – верхняя граница множества

$$A = \left\{\left|\frac{1}{g(x'_k)} - \frac{1}{g(x''_k)}\right|\right\}$$

по любым $x'_k, x''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$. Через $\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) = M_k^{\frac{1}{g}} - m_k^{\frac{1}{g}}$ обозначим точную верхнюю границу множества A. Тогда

$$0 \leqslant \omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{1}{m^2}\omega_k(g).$$

Все части последнего неравенства умножим на $\Delta x_k > 0$ и просуммируем по всем k $(k = \overline{1,n})$. Получим

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k\left(\frac{1}{g}\right)\Delta x_k \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k.$$

Завершение доказательства аналогично доказательству теоремы 9.4;
б) в общем случае $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, а далее применим теорему 9.2 и случай а).▶

9.3 Свойство аддитивности

Теорема 9.4. *Если функция $f \in R([a,b])$, то она будет интегрируемой на любом отрезке $[c,d] \subset [a,b]$.*

◀По критерию Римана (теорема 8.4) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ отрезка $[a,b]$ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. К разбиению τ добавим дополнительные точки c и d, тогда получим разбиение τ^*, $(\tau \subset \tau^*)$, которому соответствует разбиение τ' отрезка $[c,d]$. Тогда (теорема 7.2)

$$s_\tau \leqslant s_{\tau^*} \leqslant S_{\tau^*} \leqslant S_\tau \text{ и } S_{\tau^*} - s_{\tau^*} \leqslant S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Но $S_{\tau'} - s_{\tau'} \leqslant S_{\tau^*} - s_{\tau^*}$, поскольку каждое неотрицательное слагаемое типа $(M_k - m_k)\Delta x_k \geqslant 0$ в выражении $S_{\tau'} - s_{\tau'}$ будет входить в качестве слагаемого и в выражение $S_{\tau^*} - s_{\tau^*}$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ' отрезка $[c,d]$ такое, что $S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon$, значит (достаточное условие критерия Римана), f интегрируема на $[c,d]$. ▶

Теорема 9.5 (свойство аддитивности). *Пусть $a < c < b$. Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{9.1}$$

◀Для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такие разбиения τ_1 и τ_2 соответственно отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, что $S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Функция f ограничена на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$ (следует из необходимого условия интегрируемости f на указанных отрезках), поэтому она будет ограниченной и на $[a,b]$ – объединении указанных выше отрезков. Объединим разбиения τ_1 и τ_2, получим разбиение τ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$S_\tau - s_\tau = (S_{\tau_1} + S_{\tau_2}) - (s_{\tau_1} + s_{\tau_2}) = (S_{\tau_1} - s_{\tau_1}) + (S_{\tau_2} - s_{\tau_2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По достаточному условию критерия Римана (теорема 8.4) функция f будет интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Кроме того, для сумм Римана функции f соответственно на отрезках $[a,b]$, $[a,c]$ и $[c,b]$ справедливо равенство $\sigma_\tau = \sigma_{\tau_1} + \sigma_{\tau_2}$, а для разбиений – неравенства: $\lambda_{\tau_1} \leqslant \lambda_\tau$ и $\lambda_{\tau_2} \leqslant \lambda_\tau$. Переходим к пределу в последнем равенстве при $\lambda_\tau \to +0$ (тогда и $\lambda_{\tau_1} \to +0$, и $\lambda_{\tau_2} \to +0$) и получим равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

Замечание 9.1. Равенство аддитивности 9.1 сохраняется при любом расположении точек a, b и c друг относительно друга, лишь бы функция была интегрируема на минимальном отрезке, содержащем эти точки.

Если точка c лежит вне отрезка $[a,b]$, то отрезок $[a,b]$ есть часть отрезка $[a,c]$ (или $[c,b]$) и поэтому, в силу теоремы 9.4, функция f интегрируема на $[a,b]$. Рассмотрим случай $a < b < c$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Отсюда, используя (6.7), мы опять получим (9.1). Легко убедиться в справедливости этого соотношения и при $c < a < b$.

9.4 О равенстве интегралов от двух различных функций

Теорема 9.6. *Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, и для любой точки $x\in[a,b]$ $f(x)=g(x)$ за исключением, может быть, конечного числа точек указанного отрезка, причем существует один из интегралов $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b g(x)dx$, тогда существует второй интеграл и они между собой равны.*

◄Пусть существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. Функция $\varphi(x) = g(x) - f(x) = 0$ на $[a,b]$, кроме, может быть, конечного числа точек, в которых она принимает конечные значения. Значит, φ – кусочно-гладкая на $[a,b]$, а поэтому (следствие 8.2) существует

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))dx.$$

С другой стороны, $g(x) = (g(x) - f(x)) + f(x)$. Тогда по свойству линейности определенного интеграла (теорема 9.1) существует

$$\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b ((g(x) - f(x)) + f(x))dx = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))dx + \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Аналогично, как и в теореме 8.5, берем покрытие точек $x \in [a,b]$, где $\varphi(x) \neq 0$, конечным числом интервалов (α_k, β_k) $(k = \overline{1,n}$, n – число точек $x \in [a,b]$, где $\varphi(x) \neq 0)$, так, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) < \frac{\varepsilon}{c}$ (обозначения, использованные в теореме 8.5, сохраняются, но роль f играет функция φ). Берем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на частичные, но так, чтобы концы интервалов (α_k, β_k) и точки a и b были точками разбиения. Получим

$$\sigma_\tau(\varphi; \overline{x}_n) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\bar{x}_k)\Delta x_k + \sum_{i=1}^{m} \varphi(\overline{x}_i)\Delta x_i, \quad \forall\, \overline{x}_k \in [\alpha_k, \beta_k],\ \forall\, \overline{x}_i \in [a_i, b_i].$$

Тогда $\varphi(\overline{x}_i) = 0$ и $\sigma_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\overline{x}_k)\Delta x_k$,

$$|\sigma_\tau| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|\Delta x_k \leqslant c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k) < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{\lambda_\tau\to 0}\sigma_\tau = 0 = \int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx, \ \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx. \blacktriangleright$$

Пример 9.1. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \ n = 1, 3, 5, \dots; \\ -1, & \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \ n = 2, 4, 6, \dots; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

◀Функция f ограничена на отрезке $[0, 1]$ и имеет на нем бесконечно много точек разрыва первого рода.

Покроем точку $x = 0$ интервалом $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Разности $[0, 1] \setminus \left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ принадлежат не более конечного числа точек разрыва функции f, пусть это число будет равно p, $p \in \mathbb{N}$. Каждую точку разрыва указанной разности покрываем интервалом, длина которого меньше $\frac{\varepsilon}{2p}$. Тогда сумма длин всех интервалов, покрывающих точки разрыва функции f, будет меньше $\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) + p\frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Все условия теоремы 8.5 выполняются, значит, существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте свойство линейности определенного интеграла.
2. Сформулируйте теоремы об интегрируемости произведения и частного двух функций.
3. Сформулируйте свойство аддитивности определенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о равенстве интегралов от двух различных функций.

ЛЕКЦИЯ 10
Свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами

10.1 Интегрирование неравенств

Теорема 10.1. *Если* $f \in R([a,b])$ *и для любых* $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

◀Берем любое разбиение с отмеченными точками $(\tau, \overline{x})$. Составляем интегральные суммы Римана $\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k \geqslant 0$. Используя аналог теоремы о предельном переходе в неравенствах [1, теорема 8.3], получаем:

$$\lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)dx. ▶$$

Следствие 10.1. *Если* $f, g \in R([a,b])$, *а для любых* $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

◀Для доказательства достаточно применить теорему 10.1 для функции $\varphi = f - g$ и использовать свойство линейности.▶

Следствие 10.2. *Если $f \in R([a,b])$, а для любых $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant 0$ и существует $x_0 \in [a,b]$, в которой f непрерывна и имеет место неравенство $f(x_0) > 0$, то*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

◀ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Используя теорему о сохранении функцией знака предела [1, теорема 8.2], получим:

$$\exists\, U_{x_0} \;\; \forall\, x \in U_{x_0} \;\; f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Возьмем $[\alpha,\beta] \subset U_{x_0}$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}dx = \frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha) > 0. \blacktriangleright$$

Следствие 10.3. *Если $f, g \in R([a,b])$, а для любых $x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant g(x)$, и найдется точка $x_0 \in [a,b]$, в которой функции f и g непрерывны и имеет место неравенство $f(x_0) > g(x_0)$, то*

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

◀Применяя для функции $\varphi = f - g$ следствие 10.2 и свойство линейности, докажем справедливость утверждения следствия.▶

Замечание 10.1. Если выполняются условия следствия 10.2, за исключением условия непрерывности в точке x_0, то заключение следствия в общем случае не выполняется. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin x, & x = 0 \text{ или } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

интегрируема на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (она кусочно-непрерывна на этом отрезке) и принимает на нем неотрицательные значения, причем $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Но в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция разрывна и, как подтверждение нашего вывода, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$ (смотрите следствие 9.6).

Теорема 10.2. *Если $f, g \in R([a, b])$, для любых $x \in [a, b]$ $g(x) \geqslant 0$, а*

$$M = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}, \; m = \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\},$$

то справедливо неравенство

$$m \int\limits_b^a g(x)dx \leqslant \int\limits_b^a f(x)g(x)dx \leqslant M \int\limits_b^a g(x)dx. \tag{10.1}$$

$$◀ \; \forall\, x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Применив следствие 10.1, с учетом свойств об интегрируемости произведения и линейности, докажем справедливость неравенства (10.1).▶

10.2 Об интегрируемости модуля функции

Теорема 10.3. *Если $f \in R([a,b])$, то и $|f| \in R([a,b])$ и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{10.2}$$

◀Из неравенства $||f(x)| - |f(x')|| \leqslant |f(x) - f(x')|$ вытекает неравенство $\omega(|f|) \leqslant \omega(f)$ для колебаний на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Следовательно, для любого разбиения

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(|f|)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(f)\,\Delta x_k.$$

Отсюда и из теоремы 7.6 следует интегрируемость $|f|$. Неравенство (10.2) получается предельным переходом при $\lambda_\tau \to +0$ в очевидном неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\overline{x}_k)|\,\Delta x_k. \text{ ▶}$$

Замечание 10.2. Если $a > b$, то, применяя неравенство (10.2) для интеграла $\int\limits_b^a f(x)dx$, получим:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = \left|\int\limits_b^a f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_b^a |f(x)|\,dx =$$

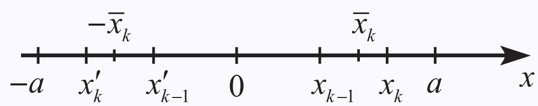
$$= -\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

10.3 Интегрирование четных, нечетных, периодических функций

Теорема 10.4. *Если функция $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ $(a>0)$ четная и $f\in R([0,a])$, то $f\in R([-a,a])$ и*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx.$$

◀Сначала докажем, что существует $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$. Возьмем любое разбиение τ_1 отрезка $[0,a]$ и составим интегральную сумму $\sigma_{\tau_1} = \sum\limits_{k=1}^{m} f(\overline{x}_k)\Delta x_k$. Преобразование симметрии относительно оси Oy переводит их в равные интегральные суммы по отрезку $[-a,0]$ и наоборот. Тогда имеем соответствующую интегральную сумму Римана для отрезка $[-a,0]$: $\sigma_{\tau_2} = \sum\limits_{k=1}^{m} f(-\overline{x}_k)\Delta x'_k$, $\Delta x'_k = x'_k - x'_{k-1}$, причем $\sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1}$ и $\lambda_{\tau_2} = \lambda_{\tau_1}$.



Перейдем к пределу в равенстве $\sigma_{\tau_2} = \sigma_{\tau_1}$ при $\lambda_{\tau_1}\to 0 \Leftrightarrow \lambda_{\tau_2}\to 0$: $\lim\limits_{\lambda_{\tau_1}\to 0} \sigma_{\tau_1} = = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, а тогда существует $\lim\limits_{\lambda_{\tau_2}\to 0} \sigma_{\tau_2} = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$, причем $\lim\limits_{\lambda_{\tau_1}\to 0} \sigma_{\tau_1} = \lim\limits_{\lambda_{\tau_2}\to 0} \sigma_{\tau_2}$, значит, и $\int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$. А тогда (свойство аддитивности интеграла)

$$\exists \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx. ▶$$

Замечание 10.3. Если $f \in R([a,b])$ $(0 \leqslant a < b)$ и для любых $x \in [-b,-a]$ $g(x) = f(-x)$, то f будет интегрируемой на отрезке $[-b,-a]$ и

$$\int_{-b}^{-a} g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

◀Функция

$$\mu(x) = \begin{cases} f(x), & a \leqslant x \leqslant b, \\ g(x), & -b \leqslant x \leqslant -a, \\ 0, & -a < x < a \end{cases}$$

четная на $[-b,b]$, тогда (теорема 10.4) существует

$$\int_{-b}^{b} \mu(x)dx = 2\int_{0}^{b} \mu(x)dx = 2\int_{-b}^{0} \mu(x)dx,$$

поэтому существует

$$\int_{-b}^{0} \mu(x)dx = \int_{-b}^{-a} g(x)dx + \int_{-a}^{0} 0 \cdot dx = \int_{-b}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{b} \mu(x)dx = \int_{0}^{a} 0 \cdot dx + \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx. \blacktriangleright$$

Теорема 10.5. *Если функция $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$ нечетная и $f \in R([0,a])$, то $f \in R([-a,0])$, и $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$, а значит $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.*

◀Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 10.4, с учетом того, что $\sigma_{\tau_2} = -\sigma_{\tau_1}$. ▶

Теорема 10.6. *Если функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *периодическая с периодом* $T \neq 0$ *и интегрируема на отрезке* $[a, a+T] \subset X$, *то для любого* $b \in X$, *такого, что* $[b, b+T] \subset X$, *существует*

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)dx = \int\limits_a^{a+T} f(x)dx.$$

◀Для любого $b \in X$ существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $a + nT \leqslant b < a + (n+1)T$. Тогда

$$a + (n+1)T \leqslant b + T < a + (n+2)T \Leftrightarrow a \leqslant b - nT < a + T.$$

Если существует $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx$, то существуют $I_1 = \int\limits_a^{b-nT} f(x)dx$ и $I_2 = \int\limits_{b-nT}^{a+T} f(x)dx$ (теорема 9.4). Но тогда будут существовать и интегралы (а также справедливы равенства)

$$\int\limits_{a+(n+1)T}^{b+T} f(x)dx = \int\limits_a^{b-nT} f(x)dx, \qquad \int\limits_b^{a+(n+1)T} f(x)dx = \int\limits_{b-nT}^{a+T} f(x)dx$$

(используется метод доказательства, аналогичный использованному при доказательстве теореме 10.4, но вместо симметрии применяется сдвиг по оси Ox на вектор длиной $|mT|$, $m \in \mathbb{Z}$).

Сложив последние равенства и применив свойство аддитивности, получим:

$$\int\limits_b^{b+T} f(x)dx = \int\limits_a^{a+T} f(x)dx. \blacktriangleright$$

10.4 Первая теорема о среднем значении для определенного интеграла

Лемма 10.1. *Если функция $f \in R([a,b])$, M, m – соответственно точная верхняя и точная нижняя грани функции f на отрезке $[a,b]$, то существует $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{10.3}$$

◀Используем неравенство (10.1) при $g(x) = 1$:

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a) \Leftrightarrow m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M.$$

В качестве μ берем число $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. ▶

Теорема 10.7 (первая теорема о среднем). *Если функция $f \in C([a,b])$, то существует $c \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{10.4}$$

◀Если f – непрерывна на отрезке $[a,b]$, то (теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных границ [1, теорема 13.5]) существуют $p, q \in [a,b]$, что $f(p) = m$ и $f(q) = M$. Кроме того, $E(f) = [m, M]$. Поэтому (смотри [1, теорема 13.2]), указанное в лемме 10.1 число μ есть значение функции $f(x)$ в некоторой точке $c \in [a,b]$. ▶

Замечание 10.4. В заключении теоремы 10.7 можно сделать уточнение, а именно: существует $c \in (a, b)$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Замечание 10.5. Равенство (10.4) называют **первой формулой среднего значения для определенного интеграла**.

10.5 Первая теорема о среднем значении в общем виде

Лемма 10.2. *Пусть* $f, g \in R([a,b])$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$, *а функция* g *не меняет знак на* $[a,b]$ *(для любой точки* $x \in [a,b]$ $g(x) > 0$ *или* $g(x) < 0$*). Тогда существует такое число* $\mu \in [m, M]$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.5}$$

◀Доказательство леммы 10.2 проводится аналогично доказательству леммы 10.1.▶

Теорема 10.8. *Если* $f \in C([a,b])$, *а* $g \in R([a,b])$, *причем* g *не меняет знак на отрезке* $[a,b]$, *то существует* $\xi \in (a,b)$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{10.6}$$

◀То, что существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой выполняется равенство (10.6), очевидно (доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 10.7). Докажем, что $\xi \in (a,b)$. Так как выполняются условия леммы 10.2, то справедливо и ее заключение (формула (10.5)). Возможны три случая: 1) $m < \mu < M$; 2) $\mu = m$; 3) $\mu = M$.

1) $m < \mu < M$. Условия теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных границ [1, теорема 13.4] выполняются, поэтому существуют такие $\alpha, \beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Далее, по теореме Больцано – Коши о промежуточных значениях непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции [1, теорема 13.2],

$$\forall\, \mu \in (f(\alpha), f(\beta)) = (m, M) \quad \exists\, \xi \in (\alpha, \beta) \subset (a, b) \quad f(\xi) = \mu.$$

Теорема в этом случае доказана (осталось в формулу (10.5) вместо μ подставить $f(\xi)$);

2) $\mu = M$. Тогда формула 10.5 примет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = M\int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (M - f(x))g(x)dx = 0. \tag{10.7}$$

Очевидно, что $\int\limits_a^b g(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx$. Докажем это. Во-первых, существует такое $c > 0$, что для любых $x \in [a, b]$ $|g(x)| \leqslant c$ (необходимое условие интегрируемости g). Тогда

$$\left|\int_a^b g(x)dx - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)dx\right| = \left|\int_a^{a+\varepsilon} g(x)dx + \int_{b-\varepsilon}^b g(x)dx\right| \leqslant 2c\varepsilon,\ \ 0 < \varepsilon < b - a.$$

Утверждение доказано.

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то из (10.5) следует, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Значит, в этом случае (10.6) выполняется для любого $\xi \in (a, b)$.

Пусть $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$. Для определенности возьмем $g(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, поэтому существует такое ε_0, $\delta < \varepsilon_0 < b - a$, что $\int\limits_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x)\,dx > 0$.

На основании теоремы о сохранении функцией знака предела [1, теорема 8.2]:

$$\varphi(\varepsilon) = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx, \quad \lim_{\varepsilon\to+0} \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) > 0,$$

значит, существует такое $\delta > 0$, что для любого $\varepsilon_0 \in (0,\delta)$ $\varphi(\varepsilon_0) > 0$. Предположим, что не существует $\xi \in (a,b)$, для которой $f(\xi) = M$. Тогда $M - f(x) > 0$ на (a,b), а значит, и на $[a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0]$.

$$M - f(x) \geqslant \min_{x\in[a+\varepsilon_0, a-\varepsilon_0]} (M - f(x)) = M - f(x_0) > 0,$$

поэтому

$$\int\limits_a^b (M - f(x))\,g(x)\,dx \geqslant \int\limits_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} (M - f(x))\,g(x)\,dx \geqslant (M - f(x_0)) \int\limits_{a+\varepsilon_0}^{b-\varepsilon_0} g(x) > 0.$$

Это противоречит равенству 10.7.

Доказательство для случая $\mu = M$ получено, аналогично рассматривается и случай $\mu = m$. ▶

10.6 Неравенства Гельдера[1], Минковского[2], Коши – Буняковского[3]

Пусть $f, g \in R([a,b])$, p – любое фиксированное действительное число из интервала $(1, +\infty)$, а число q определяется равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{10.8}$$

Введем обозначение: $\|f\|_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Можно доказать, что для любых $r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $p > 1$ и q, определенного равенством (10.8), справедливо неравенство

$$rt \leqslant \frac{r^p}{p} + \frac{t^q}{q} \tag{10.9}$$

(для доказательства функцию $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p}$, $x \geqslant 0$, исследовать на наибольшее значение – она достигает его в точке $x = 1$: $f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}\Big)$. Таким образом, для всех $x \geqslant 0$ будет $x^{\frac{1}{p}} - \frac{x}{p} \leqslant \frac{1}{q}$. Взяв в последнем неравенстве $x = \frac{r^p}{t^q}$ и умножив левую и правую части на r^q, получим неравенство (10.9). При $t = 0$ неравенство очевидно.

Возьмем $r = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $t = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$, $x \in [a,b]$. Подставив в (10.9) значения r и t, проинтегрируем левую и правую части полученного неравенства по отрезку $[a,b]$. Получим так называемое **неравенство Гельдера**

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_q\,. \tag{10.10}$$

[1] Гельдер Людвиг Отто (1859–1937) – немецкий математик.
[2] Герман Минковский (1864–1909) – немецкий математик.
[3] В.Я. Буняковский (1804–1889) – русский математик.

Замечание 10.6. Если в неравенстве Гельдера (10.10) взять $p = q = 2$, то получим так называемое **неравенство Коши – Буняковского**:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2\,dx}. \tag{10.11}$$

При указанных выше условиях справедливо **неравенство Минковского**:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10.12}$$

$$◄ \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

Применив для каждого из слагаемых правой части последнего неравенства неравенство Гельдера, получим:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \leqslant \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{10.13}$$

Если $I = \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = 0$, то неравенство 10.12 очевидно. При $I \neq 0$ делим левую и правую части неравенства 10.13 на $I \neq 0$ и получаем неравенство Минковского.►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте основные теоремы об интегрировании неравенств.
2. Сформулируйте теорему об интегрируемости модуля функции.
3. Сформулируйте теоремы об интегрировании четных, нечетных и периодических функций.
4. Сформулируйте теоремы о среднем для определенного интеграла.
5. Запишите интегральные неравенства Гельдера, Минковского и Коши – Буняковского.

Вычисление интеграла Римана по определению. Свойства определенного интеграла

Задание 1. Доказать методом математической индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.14}$$

◀При $n = 1$ равенство, очевидно, выполняется, так как $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$. Предположим, что равенство справедливо при $n = m$. Тогда:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 + (m+1)^3 =$$

$$= (m+1)^2\left(\frac{m^2}{4} + m + 1\right) = \left[\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right]^2.$$

Поэтому равенство (10.14) справедливо и при $n = m+1$. В силу принципа математической индукции равенство (10.14) верно для всех значений $n \in \mathbb{N}$. ▶

Аналогично можно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.15}$$

Задание 2. Вычислить сумму

$$S = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{m\pi}{n}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{10.16}$$

◀Умножим обе части равенства (10.16) на $2\sin\frac{\pi}{2n}$. Так как

$$2\sin\frac{k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},\ \ k=\overline{1,m},$$

то

$$2\sin\frac{\pi}{2n}\cdot S=\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}+\cos\frac{5\pi}{2n}-\ldots-$$

$$-\cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{(2m+1)\pi}{2n}=2\sin\frac{(m+1)\pi}{2n}\sin\frac{m\pi}{2n}.$$

Поэтому

$$S=\frac{\sin\frac{(m+1)\pi}{2n}\cdot\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

В частности, при $m=n$

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}=\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.\ \blacktriangleright$$

Замечание 10.7. При вычислении определенных интегралов по определению, кроме доказанных, полезными являются следующие формулы:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\frac{1+n}{2}n$ (следует из формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии).

2. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ ($b_1\neq 0$ – первый член прогрессии; $q\neq 0$, $q\neq 1$ – знаменатель прогрессии; если $q=1$, то $S_n=nb_1$).

3. $S_m=\cos\frac{\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{\cos\frac{(m+1)\pi}{2n}\cdot\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ (доказательство справедливости равенства можно провести так же, как и в задании 2).

4. Преобразование Абеля: для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_n S_n,$$

где

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, \; a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

5. Обобщение преобразования Абеля:

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n.$$

Задание 3. Тело движется по прямой линии, причем его скорость v в момент времени t равна t^2 м/с. Найти путь, пройденный телом с момента начала движения $(t = 0)$ до момента $t = b$.

◀Разобьем промежуток времени $[0, b]$ на n равных частей. Длина каждой части равна $\frac{b}{n} = \Delta t$, причем k-я часть начинается в момент времени $t_k = \frac{kb}{n}$ и кончается в момент времени $t_{k+1} = \frac{(k+1)b}{n}$ $\left(k = \overline{0, n-1}\right)$.

Сначала найдем приближенное значение пройденного пути. Будем считать, что в течение каждого частичного промежутка времени $[t_k, t_{k+1}]$ тело движется со скоростью, равной той, которую оно имело в начале этого промежутка, то есть в течение промежутка времени $[t_k, t_{k+1}]$ тело движется со скорость $v(t_k) = t_k^2$.

Тогда путь Δs_k, пройденный за k-й промежуток времени, приближенно выражается формулой

$$\Delta s_k \approx v(t_k) \Delta t = t_k^2 \Delta t.$$

Весь путь $s(b)$, пройденный телом, приближенно выражается следующей суммой, состоящей из n слагаемых:

$$s(b) = \Delta s_0 + \Delta s_1 + \ldots + \Delta s_{n-1} \approx v(t_0) \Delta t + v(t_1) \Delta t + \ldots + v(t_{n-1}) \Delta t = t_0^2 \Delta t + t_1^2 \Delta t + \ldots + t_{n-1}^2 \Delta t. \quad (10.17)$$

Так как $t_k = \frac{kb}{n}$, $\Delta t = \frac{b}{n}$, то (с учетом 10.15):

$$s(b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\,\Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{kb}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}.$$

Чем больше значение n, тем меньше частичные промежутки времени и тем меньше ошибка, которую мы делаем, считая движение в течение промежутков времени $[t_k, t_{k+1}]$ равномерным. Поэтому путь, пройденный телом за промежуток времени $[0, b]$, равен пределу суммы (10.17):

$$s(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \Delta t = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3 (n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3}.$$

Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} t_k^2 \Delta t$ является интегральной суммой для определенного интеграла $\int\limits_0^b t^2 dt$, соответствующей разбиению отрезка $[0, b]$. Если бы мы положили скорость, равной скорости в конце соответствующих отрезков, то получили бы другую сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} t_{k+1}^2 \Delta t = \frac{b^3}{n^3} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$. Однако предел этой суммы при $n \to \infty$ был бы тем же самым. В силу непрерывности функции t^2 на отрезке $[0, b]$ можно утверждать, что указанный предел не будет зависеть как от способа разбиения отрезка $[0, b]$ на части, так и от выбора точек, значения функции в которых принимаются равными скорости тела на частичных отрезках (теорема 8.1).

Итак, мы показали, что $\int\limits_0^b t^2 dt = \frac{b^3}{3}$. Путь, пройденный за промежуток времени $[a, b]$, равен

$$s(b) - s(a) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

В то же время он равен интегралу $\int\limits_a^b t^2 dt$. Поэтому $\int\limits_a^b t^2 dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.►

Задание 4. Вычислить, исходя из определения, интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

◀Разобьем отрезок $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на n равных частей точками

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2n},\ x_2 = \frac{2\pi}{2n}, \ldots, x_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$. В качестве ξ_k выберем правый конец k-ого частичного отрезка. Вычислим значение функции в точках ξ_k:

$$\cos\xi_0 = \cos\frac{\pi}{2n}, \ldots, \cos\xi_k = \cos\frac{(k+1)\pi}{2n}, \ldots, \cos\xi_{n-1} = 0.$$

Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\xi_k \cdot \frac{\pi}{2n} = \left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]\frac{\pi}{2n}.$$

Эта сумма вычисляется точно так же, как сумма в задании 2, и равна

$$S_n = \frac{\pi\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

Найдем предел интегральной суммы при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\xi_k\cdot\frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\sin\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{2}$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = 1$.

В силу непрерывности функции $f(x) = \cos x$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, получим: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. ►

Задание 5. Вычислить, исходя из определения, интеграл $\int\limits_a^b x^m dx$, $0 < a < b$, $m \neq -1$.

◄Выберем такое разбиение τ отрезка $[a, b]$, чтобы длины частичных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ образовывали геометрическую прогрессию, и возьмем $\xi_k = x_k$. Тогда

$$x_k = x_0 q^k,\ k = \overline{1, n},\ x_0 = a,\ x_n = b,\ q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ \xi_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}};$$

$$\Delta x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

$$\sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k(m+1)}{n}} = \left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{m+1}{n}\ln\frac{b}{a} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{m+1},$$

и в силу непрерывности функции $f(x) = x^m$ на $[a, b]$, получим:

$$\int\limits_a^b x^m dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_\tau = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. ►$$

Задание 6. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$.

◀Функция $f(x) = e^{-x^2}$ непрерывна на $[0,1]$, а значит, и интегрируема. Исследуем функцию на наибольшее и наименьшее значение на $[0,1]$

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x). \tag{10.18}$$

Из (10.18) видно, что $f'(x) \leqslant 0$ на $[0,1]$ и $f'(x) = 0$ только в $x = 0$, следовательно, $f(x)$ убывает на $[0,1]$. Значит, $f_{\text{наиб}} = f(0) = 1 = M$, $f_{\text{наим}} = f(1) = e^{-1} = m$.
По теореме 10.1:

$$\frac{1}{e} < \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx < 1. \blacktriangleright$$

Задание 7. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше:

$$\int\limits_3^4 \ln x dx \text{ или } \int\limits_3^4 (\ln x)^2 dx.$$

◀Так как $\ln x > 1$ при $x > e$, то $\ln^2 x > \ln x$ для $x \in [3,4]$. С учетом этого неравенства, непрерывности функции $y = \ln x$ на отрезке $[3,4]$ и следствия 10.3 заключаем, что

$$\int\limits_3^4 (\ln x)^2\, dx > \int\limits_3^4 \ln x dx. \blacktriangleright$$

Задание 8. Докажите с помощью неравенства Коши – Буняковского, что

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{1,2}.$$

◀В силу неравенства Коши – Буняковского

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \leqslant \left(\int_0^1 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(1+x^4\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(x+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1} = \sqrt{1,2}.$$

Рассмотрим функции $f, g \in R\left([a,b]\right)$, и любое $\lambda \neq 0$.

$$0 \leqslant \int_a^b \left(f\left(x\right) - \lambda g\left(x\right)\right)^2 dx = \int_a^b f^2\left(x\right) dx - 2\lambda \int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2\left(x\right) dx.$$

Последнее выражение является квадратичным выражением относительно λ. В силу неравенства Коши – Буняковского

$$\left|\int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2\left(x\right) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2\left(x\right) dx}$$

дискриминант

$$\frac{D}{4} = \left(\int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right) dx\right)^2 - \int_a^b f^2\left(x\right) dx \cdot \int_a^b g^2\left(x\right) dx \leqslant 0.$$

Неравенство будет строгим, если $f\left(x\right) - \lambda g\left(x\right) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \neq \lambda = \mathrm{const}$, а функция $f - \lambda g$ непрерывна хотя бы в одной точке $x \in [a,b]$. Для функций $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = 1$, $x \in [0,1]$, указанные требования выполняются. Поэтому, $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{1,2}$. ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать методом математической индукции равенства:

   1.1 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$;

   1.2 $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$;

   1.3 $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2\left(2n^2-1\right)$;

   1.4 $\sum\limits_{k=1}^{n} k\left(m^2-k^2\right)^3 = \frac{1}{4}n\left(n+1\right)\left(2m^2-n^2-n\right)$.

2. Вычислить сумму $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{m\pi}{n}$.

3. Вычислить путь, пройденный точкой за время от $t = 2$ с до $t = 5$ с, если скорость $v = 7t$.

4. Вычислить силу, с которой вода, налитая в сосуд формы прямоугольного параллелепипеда, давит на его боковую грань, если размеры этой грани a м в ширину и b м в глубину.

5. Тело движется по прямой линии, причем на него действует сила притяжения, направленная к началу координат и обратно пропорциональная квадрату расстояния от этого начала: $F = -\frac{k}{x^2}$. Вычислить работу, затраченную на перемещение тела из точки $A\left(a\right)$ в точку $B\left(b\right)$, $0 < a < b$.

6. Тело движется по прямой линии. Вычислить работу, затраченную на перемещение тела с момента времени a до момента времени b, если мощность двигателя зависит от времени и выражается формулой $W = kt^3$.

7. Найти количество электричества, протекшего по проводнику за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant b$, если зависимость силы тока от времени выражается формулой $I = A\sin\frac{\pi t}{2}$.

8. Вычислите следующие интегралы, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм:

8.1 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

8.2 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x}$;

8.3 $\int\limits_0^{10} 2x dx$;

8.4 $\int\limits_a^b e^{kx} dx$;

8.5 $\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right) dx$;

8.6 $\int\limits_1^e \ln x dx$;

8.7 $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$ [положить $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$];

8.8 $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x} dx$ [разбить отрезок $[a, b]$ на части точками, образующими геометрическую прогрессию].

9. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ следующими способами:

9.1 разбивая отрезок $[1, 4]$ на равные части и выбирая в качестве ξ_k левые концы этих частей;

9.2 разбивая отрезок $[1, 4]$ на равные части и выбирая в качестве ξ_k правые концы этих частей;

9.3 разбивая отрезок $[1, 4]$ на равные части и выбирая в качестве ξ_k середины этих частей;

9.4 разбивая отрезок $[1, 4]$ на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{4}$, и выбирая в качестве точек ξ_k левые концы этих частей;

9.5 разбивая отрезок $[1, 4]$ на части теми же точками, но выбирая в качестве точек ξ_k правые концы этих частей;

9.6 разбивая отрезок $[1, 4]$ на части теми же точками и выбирая в качестве точек ξ_k средние геометрические левых и правых концов этих частей.

10. Оценить интегралы:

10.1 $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x} dx$;

10.2 $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$;

10.3 $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$;

10.4 $\int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx$;

10.5 $\int\limits_0^{1} \frac{x^6}{\sqrt{1+x}} dx$;

10.6 $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$.

11. Докажите, что:

11.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$;

11.2 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x} dx > \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right)$ $(R > 0)$;

11.3 $0,5 < \int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \leqslant \frac{\pi}{6}$ $(n \geqslant 1)$;

11.4 $\frac{\pi}{6} < \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$;

11.5 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int\limits_0^{2} e^{x^2-x} dx < 2e$;

11.6 $\frac{2}{5} < \int\limits_1^{2} \frac{xdx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$;

11.7 $9 < \int\limits_8^{18} \frac{x+1}{x+2} dx < 9,5$;

11.8 $e^{-\frac{1}{e}} \leqslant \int\limits_0^{1} x^x dx \leqslant 1$.

12. Проверить справедливость неравенства $e^x + e^{-x} \geqslant 2 + x^2$, а затем доказать, что

$$2,33 < \int\limits_0^1 \left(e^x + e^{-x}\right) dx < 3,09.$$

13. Убедившись в справедливости неравенства $\frac{x}{e} > \ln x > 1$ $(x > e)$, доказать, что $0,92 < \int\limits_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} < 1$.

14. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше:

14.1 $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ или $\int\limits_0^1 xdx$;

14.2 $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 xdx$ или $\int\limits_0^1 x \sin^2 xdx$;

14.3 $\int\limits_1^2 \ln xdx$ или $\int\limits_1^2 (\ln x)^2 dx$;

14.4 $\int\limits_3^4 \ln xdx$ или $\int\limits_3^4 (\ln x)^2 dx$;

14.5 $\int\limits_0^\pi e^{-x} \cos^2 xdx$ или $\int\limits_\pi^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 xdx$.

15. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что:

15.1 $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\sqrt{x^3+1}dx \leqslant \frac{5}{3}$;

15.2 $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{1,2}$;

15.3 $\int\limits_0^\pi x^2\sqrt{\sin x}dx < \frac{2\pi^5}{5}$;

15.4 $\int\limits_0^\pi \sqrt{(1+x^3)\sin x}dx < 2\pi + \frac{\pi^4}{2}$.

ЛЕКЦИЯ 11
Формула Ньютона – Лейбница

11.1 Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема и на любом отрезке $[a,x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$, то есть для любого $x \in [a,b]$ существует интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Эта функция, определенная на отрезке $[a,b]$, называется **интегралом с переменным верхним пределом**. Установим ее основные свойства.

Теорема 11.1. *Если $f \in R([a,b])$, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.*

◀Берем любую точку $x \in [a,b]$ и любое приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a,b]$.

Тогда $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Поскольку функция f интегрируема на $[a,b]$, то она ограничена и на $[x, x+\Delta x]$. Из леммы 10.1 следует, что существует $\mu \in [m_x, M_x]$, что

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x \quad \left(m_x = \inf_{x \in [x, x+\Delta x]} \{f(x)\},\ M_x = \sup_{x \in [x, x+\Delta x]} \{f(x)\} \right).$$

Значит, $\Delta F(x) = \mu \Delta x$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$. ▶

Теорема 11.2. *Если $f \in C([a,b])$, то для любого $x \in [a,b]$*

$$F'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x),$$

т.е. интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции является ее первообразной.

◀Берем любую точку $x \in [a,b]$ и любое $\Delta x \neq 0$ такое, что $x + \Delta x \in [a,b]$. Получим (смотрите теорему 11.1 и первую теорему о среднем значении 10.7):

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ c \to x}} f(c) = f(x).$$

В случае, когда точка x совпадает с одним из концов отрезка $[a,b]$, под $F'(x)$ следует подразумевать соответствующую одностороннюю производную функции F. ▶

Таким образом, операция интегрирования с переменным верхним пределом, примененная к непрерывной функции, приводит к первообразной функции, то есть является операцией, обратной дифференцированию

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b. \tag{11.1}$$

Формула (11.1) называется **формулой дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу**.

Замечание 11.1. Пусть функция $f \in R([a,b])$. Тогда на отрезке $[a,b]$ определена и функция

$$G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

которую называют **интегралом с переменным нижним пределом**.

Можно показать, что для функции G справедливы теоремы, аналогичные теоремам 11.1–11.2 для функции F. Из формулы (11.1) можно легко получить и формулу дифференцирования по нижнему пределу.

Из тождества

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^b f(t)dt$$

имеем

$$G(x) = \int\limits_a^b f(t)dt - F(x). \tag{11.2}$$

Если функция f непрерывна в точке $x \in [a,b]$, то, как доказано выше, функция F дифференцируема в этой точке. Из формулы (11.2) следует, что в этом случае функция G в точке x также дифференцируема и

$$\frac{dG(x)}{dx} = -\frac{dF(x)}{dx}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dx}\int\limits_x^b f(t)dt = -f(x). \tag{11.3}$$

11.2 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 11.3. *Если функция $f \in C([a,b])$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b, \tag{11.4}$$

где F – любая из первообразных функции f на отрезке $[a,b]$.

◀По теореме 11.2, интеграл с переменным верхним пределом является первообразной функции f. По теореме 1.1, существует такая постоянная C, что $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$, где $x \in [a,b]$ – переменная точка. Найдем C.

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt + C = C, \; F(a) = C.$$

Тогда $F(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + F(a)$, $\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ▶

Формулу (11.4) называют **формулой Ньютона – Лейбница**.

Пример 11.1. Найдите $\int\limits_0^1 x^3 dx$.

$$◀ \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}. ▶$$

11.3 Вычисление определенного интеграла

11.3.1 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 11.4. *Если* $f \in C([a,b])$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$, $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, *причем* $E(\varphi)=[a,b]$, *то справедлива формула*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{a}^{b} f(u)du. \tag{11.5}$$

◀Интегралы в левой и правой частях равенства (11.5) существуют, так как подынтегральные функции непрерывны на соответствующих отрезках. Если $f \in C([a,b])$, то на отрезке $[a,b]$ для f существует первообразная F ($F'(u) = f(u)$ для любых $u \in [a,b]$). Еще известно, что для любых $x \in [\alpha,\beta]$ существует $\varphi'(x)$. Значит, сложная функция $F \circ \varphi$ будет дифференцируемой на $[\alpha,\beta]$

$$(F(\varphi(x)))' = F'(u)|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(u)|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Поэтому $F \circ \varphi$ будет первообразной для $g(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем g непрерывна на отрезке как произведение двух непрерывных функций. Отсюда следует, что существует

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(u)du. \blacktriangleright$$

Замечание 11.2. Порядок использования подстановки $u = \varphi(x)$ во многом аналогичен подстановке для неопределенного интеграла, но при подстановке в определенном интеграле необходимо вычислять новые пределы интегрирования, поэтому возвращение к исходной переменной не требуется.

Пример 11.2. Вычислите $\int\limits_0^1 x2^{5-3x^2}dx$.

$$◀ \int\limits_0^1 x2^{5-3x^2}dx = \left[d\left(5-3x^2\right) = -6xdx\right] = -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 2^{5-3x^2}(-6x)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u=\varphi(x)=5-3x^2 - \text{подстановка} & \alpha=0,\ \beta=1 \\ \varphi'(x)=-6x & a=\left.(5-3x^2)\right|_{x=0}=5 \\ f(\varphi(x))=-\frac{1}{6}2^{5-3x^2} & b=\left.(5-3x^2)\right|_{x=1}=2 \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 2^{5-3x^2}d(5-3x^2) = -\frac{1}{6}\int\limits_5^2 2^u du = \frac{1}{6}\int\limits_2^5 2^u du = \frac{1}{6}\left.\frac{2^u}{\ln 2}\right|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{6\ln 2}(2^5-2^2) = \frac{2^2}{6\ln 2}(8-1) = \frac{14}{3\ln 2}. ▶$$

Пример 11.3. Вычислите $I = \int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

$$◀ I = \left[\begin{array}{l} x=\cos t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sin t, \\ t=\arccos x,\ t_{\text{н}}=\frac{\pi}{2},\ t_{\text{в}}=0,\ x^2=\cos^2 t,\ dx=-\sin tdt \end{array}\right] =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t\cdot\sin^2 tdt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2t}{4}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{8}dt = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt - \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4tdt = \frac{\pi}{16}. ▶$$

11.3.2 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 11.5. *Если функции* $u, v \in C^1([a,b])$, *то справедлива следующая формула интегрирования по частям для определенных интегралов:*

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{11.6}$$

◀Во-первых, интегралы

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b u(x)v'(x)dx \text{ и } \int_a^b v\,du = \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

существуют, так как подынтегральные функции непрерывны на отрезке $[a,b]$. Во-вторых, видно, что функция $y = u(x)v(x)$ есть первообразная на отрезке $[a,b]$ для функции $\mu = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, так как для любых $x \in [a,b]$ будет $(uv)' = u'v + v'u$.

Откуда, с одной стороны $\int_a^b (u'v + v'u)dx = \int_a^b vu'dx + \int_a^b uv'dx$ (свойство линейности), с другой стороны:

$$\int_a^b (u'v + v'u)dx = uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a). ▶$$

Замечание 11.3. При интегрировании по частям в определенном интеграле (аналогично как и для неопределенного интеграла) выделяют три группы интегралов (смотрите [4, с. 12]), кроме которых, как известно, есть и другие типы интегралов, вычисляемых с помощью интегрирования по частям.

Пример 11.4. Вычислите $\int\limits_0^{0,5} \arcsin\sqrt{x}dx$.

$$◀ \int\limits_0^{0,5} \arcsin\sqrt{x}dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin\sqrt{x}; & du = \frac{dx}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} \\ dv = dx; & v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^{0,5} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{0,5}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = t, \ \frac{x}{1-x} = t^2 \\ x = \frac{t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2tdt}{(1+t^2)^2} \\ t_{\text{н}} = 0, \ t_{\text{в}} = 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \int\limits_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \int\limits_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{8} - \left[\begin{array}{ll} u = t; & du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(1+t^2)^2}; & v = -\frac{1}{2(1+t^2)} \end{array}\right] = \frac{\pi}{8} + \frac{t}{2(1+t^2)}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}. ▶$$

Замечание 11.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле часто используется при доказательстве формул, рекуррентных соотношений и так далее. Покажем это на примере.

Пример 11.5. Докажите, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & n = 2k, \ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2k+1, \ k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{11.7}$$

(под $n!!$ ($n > 1$, $n \in \mathbb{N}$) понимаем произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и обладающих той же четностью, что и число n; по определению $0!! = 1$, $1!! = 1$).

$$◀\; I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{(n-1)} x; & du = (n-1)\sin^{(n-2)} x \cdot \cos x dx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{(n-1)} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n-2)} x \cdot \cos^2 x dx = (n-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(n-2)} x (1-\sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n;$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \qquad (11.8)$$

Используя рекуррентную формулу, получим:

$$I_{n=2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

так как $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

$$I_{n=2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

так как $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Утверждение доказано для функции $\sin x$, а для функции $\cos x$ учтем, что $\cos^n x = \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left[\begin{array}{ll} t = \frac{\pi}{2} - x; & \begin{array}{l} t_{н} = \frac{\pi}{2} \\ t_{в} = 0 \end{array} \end{array} \right] = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \;▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие определенного интеграла с переменным верхним пределом.
2. Сформулируйте теорему о применимости формулы Ньютона – Лейбница.
3. Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле.
4. Сформулируйте теорему интегрирования по частям в определенном интеграле.

ЛЕКЦИЯ 12
Вторая теорема о среднем значении интеграла. Остаток формулы Тейлора в интегральной форме

12.1 Вторая теорема о среднем значении для определенного интеграла

Лемма 12.1. *Пусть $f \in C([a,b])$, $g \in C^1([a,b])$, причем функция g возрастает и принимает неотрицательные значения на отрезке $[a,b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что*

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)dx = g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx. \tag{12.1}$$

◀Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int\limits_x^b f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{12.2}$$

Функция F, являясь интегралом с переменным нижним пределом от интегрируемой (даже непрерывной) функции f, непрерывна на отрезке $[a,b]$ и поэтому достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений. Если $m = \min\limits_{x\in[a,b]}\{F(x)\}$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]}\{F(x)\}$, то

$$m \leqslant F(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b]. \tag{12.3}$$

Заметив, что $dF(x) = -f(x)dx$ (смотри (11.3)) и проинтегрировав по частям интеграл, стоящий в левой части равенства (12.1), с учетом того, что $F(b) = 0$, получим

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)dx = -\int\limits_a^b g(x)dF(x) = -g(x)F(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx = g(a)F(a) + \int\limits_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{12.4}$$

Вследствие возрастания функции g имеем $g'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. Используя неравенства (12.3) и заметив, что из неотрицательности g на $[a, b]$ следует, в частности, что и $g(a) \geqslant 0$, получим оценки

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \leqslant Mg(a) + M\int_a^b g'(x)dx = Mg(a) + M[g(b) - g(a)] = Mg(b),$$

$$g(a)F(a) + \int_a^b F(x)g'(x)dx \geqslant mg(a) + m[g(b) - g(a)] = mg(b).$$

Таким образом, (смотри (12.4)) имеем

$$mg(b) \leqslant \int_a^b g(x)f(x)dx \leqslant Mg(b).$$

Если $g(b) = 0$, то из неотрицательности и возрастания функции g следует, что $g(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. В этом случае формула (12.1) справедлива при любом выборе $\xi \in [a, b]$.

Если же $g(b) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)dx \leqslant M.$$

Используя [1, теорема 13.2], получаем, что существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)dx.$$

В силу (12.2) это и есть формула (12.1).►

Теорема 12.1 (вторая теорема о среднем). *Если* $f \in C([a,b])$, $g \in C^1([a,b])$, *причем функция* g *монотонная на отрезке* $[a,b]$, *то существует такая точка* $\xi \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx. \tag{12.5}$$

◀Допустим сначала, что функция g возрастает на отрезке $[a,b]$; тогда функция

$$h(x) = g(x) - g(a),\ a \leqslant x \leqslant b,$$

будет неотрицательной возрастающей непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функцией. Поэтому, согласно лемме 12.1, существует такое $\xi \in [a,b]$, что $\int_a^b h(x)f(x)dx = h(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$.

Учитывая, что $h(x) = g(x) - g(a)$, получим

$$\int_a^b [g(x) - g(a)]f(x)dx = [g(b) - g(a)]\int_{\xi}^b f(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a)\int_a^b f(x)dx - g(a)\int_{\xi}^b f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx,$$

то есть получилась формула (12.5).

Если функция g убывает на отрезке $[a,b]$, то для доказательства теоремы достаточно применить формулу (12.5) к функции $(-g)$, которая, очевидно, возрастающая.▶

Замечание 12.1. Можно показать, что теорема 12.1 справедлива и при более слабых ограничениях: от функции f достаточно потребовать лишь ее интегрируемость, а от g – ее монотонность на отрезке $[a,b]$.

12.2 Остаток формулы Тейлора в интегральной форме

Пусть $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 12.2. *Если функция $f : U_a \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ раз $(n \in \mathbb{N})$ непрерывно-дифференцируема в U_a, то для любой точки $x \in U_a$ справедлива формула Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x) \tag{12.6}$$

с ***остатком*** *$R_{n+1}(x)$ в интегральной форме*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{n+1}(t)(x-t)^n dt, \tag{12.7}$$

где x – любая точка из указанной окрестности.

$$\blacktriangleleft \int\limits_a^x f'(t)dt = \int\limits_a^x d(f(t)) = f(t)\Big|_a^x = f(x) - f(a);$$

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt. \tag{12.8}$$

К интегралу $\int\limits_a^x f'(t)dt$ применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^x f'(t)dt = \left[\begin{array}{ll} u = f'(t); & du = f''(t)dt \\ dv = d(t-x) = dt; & v = t - x \end{array}\right] = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int\limits_a^x f''(t)(x-t)dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \left[\begin{array}{ll} u = f''(t); & du = f'''(t)dt \\ dv = (x-t)dt; & v = -\frac{1}{2}(x-t)^2 \end{array}\right] =$$

$$= f'(a)(x-a) - \frac{1}{2!}(x-t)^2 f''(t)\Big|_a^x + \frac{1}{2!}\int\limits_a^x f'''(t)(x-t)^2 dt =$$

$$= f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Подставив полученное выражение для $\int\limits_a^x f'(t)dt$ в формулу (12.8), получим справедливость заключения теоремы.▶

Используем для остатка члена (12.7) первую теорему о среднем значении в общем виде (теорема 10.8):

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n d(x-t) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad -$$

остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте вторую теорему о среднем значении для определенного интеграла.

2. Запишите формулу Тейлора с остатком в интегральной форме. При каких ограничениях, накладываемых на функцию , справедлива эта формула?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Задание 1. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$.

◀Имеем: $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$. Поэтому

$$\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi} |\sin x|\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{\pi} \sin x dx - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx + \ldots - \int\limits_{99\pi}^{100\pi} \sin x dx\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} - \cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi} + \ldots + \cos x\Big|_{99\pi}^{100\pi}\right) = \sqrt{2}\,(2+2+2+\ldots+2) = 200\sqrt{2}. \ ▶$$

Задание 2. Можно ли применить формулу Ньютона – Лейбница к интегралу $I = \int\limits_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$?

◀Нельзя. Если формально вычислять этот интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, то получим неверный результат. Действительно,

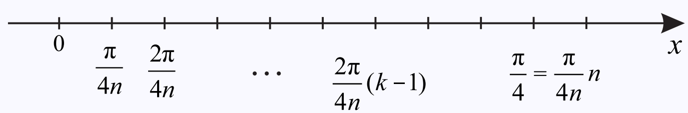
$$I = \int\limits_0^5 \frac{dx}{(x-4)^4} = -\frac{1}{3\,(x-4)^3}\Bigg|_0^5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{192} = -\frac{63}{192} = -\frac{21}{64}.$$

Но подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-4)^4} > 0$ и, следовательно, интеграл не может равняться отрицательному числу. Причина ошибки в том, что подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{(x-4)^4}$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 4$, принадлежащей промежутку интегрирования.▶

Задание 3. С помощью определенного интеграла найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4n}} + \ldots + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi n}{4n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4n}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4n}} + \ldots + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi n}{4n}}\right).$$

◀Указанный предел можно рассматривать как произведение $\frac{4}{\pi}$ на предел интегральной суммы функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ со следующим разбиением отрезка на частичные отрезки и выбором в качестве произвольных точек $\overline{x}_k$ левых концов каждого частичного отрезка:



Так как функция непрерывна на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, то существует $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} \sigma_\tau(f, \overline{x}_k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$, вне зависимости от способа разбиения отрезка $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ на n частичных отрезков и выбора точек $\overline{x}_k$.

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4n}\left(1 + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4n}} + \ldots + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi n}{4n}}\right)\right) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}. \ ▶$$

Задание 4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}\right).$$

◀Слагаемые $e^{\frac{1}{n}}$, $e^{\frac{2}{n}},\ldots,e^{\frac{n}{n}}$ представляют собой значения функции e^x в точках

$$x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ldots,x_n=\frac{n}{n}=1,$$

делящих отрезок $[0,1]$ на n равных частей: $[0,x_1]$, $[x_1,x_2]\,,\ldots,[x_{n-1},x_n]$ длины $\triangle\,x=\frac{1}{n}$.

Так как предел интегральной суммы не зависит от выбора промежуточной точки ξ_i из элементарного отрезка $[x_{i-1},x_i]$, то можно принять $\xi_i=x_i$, и, следовательно, наша сумма является интегральной для функции $f\left(x\right)=e^x$ на отрезке $[0,1]$.

По определению

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\int\limits_0^1 e^x dx=e^x\big|_0^1=e-1.\ ▶$$

Задание 5. Вычислить предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$$◀\ \ln A=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n\right)-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right].$$

Выражение, стоящее под знаком предела в первой части этого равенства, есть интегральная сумма для интеграла $\int\limits_0^1\ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big|_0^1=-1$. Поэтому $\ln A=-1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$ ▶.

Задание 6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} x^2dx$ с помощью подстановки $x^2 = t$.

◀Произведем указанную подстановку: $x^2 = t$, $2xdx = dt$, $x = \sqrt{t}$. При $x = -1$ $t_1 = 1$, при $x = 2$ $t_2 = 4$. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2dx = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{4}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Однако

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}[8-(-1)] = 3.$$

Ошибка здесь состоит в том, что функция $t = x^2$ на отрезке $[-1, 2]$ не является обратимой. На отрезке $[-1, 0]$ она будет обратимой, обратной для нее будет функция $x = -\sqrt{t}$. На отрезке $[0, 2]$ функция также будет обратимой, обратной для нее будет функция $x = \sqrt{t}$.

Чтобы получить правильный ответ, надо представить интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2dx = \int\limits_{-1}^{0} x^2dx + \int\limits_{0}^{2} x^2dx,$$

и в первом интеграле положить $x = -\sqrt{t}$, а во втором $x = \sqrt{t}$. Тогда:

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{0} x^2dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3};\quad I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{3}.$$

Таким образом, $I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$. ▶

Задание 7. Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$.

◀Сделаем в правом интеграле подстановку $x = \frac{\pi}{2} - t$, $dx = -dt$. При $x = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$; при $x = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Откуда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx. \blacktriangleright$$

Задание 8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx$.

◀Положим $\operatorname{arctg} x = u$, $dv = x^3 dx$, откуда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{x^4}{4}$. Следовательно,

$$\int\limits_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^4}{4}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{(x^4 - 1 + 1)dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx$.

◀Применим подстановку $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$. При $x = 0$, $t_1 = 0$; при $x = a$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$I = \int\limits_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^{2n+1}\cos^{2n+1} x dx = a^{2n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx.$$

Используем рекуррентную формулу для неопределенного интеграла

$$\int \cos^m x dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x dx.$$

Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \left.\frac{\sin x \cdot \cos^{2n} x}{2n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx.$$

Так как $\sin 0 = 0$ и $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx.$$

Повторно применяя это соотношение, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2n\,(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)\,(2n-1)\ldots 3 \cdot 1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Поэтому

$$I = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} a^{2n+1}. \blacktriangleright$$

Задание 10. Пользуясь результатом предыдущего задания, получить следующую формулу суммирования:

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

◀Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n \, dx$. Из результата предыдущего задания следует, что

$$I = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \qquad (12.9)$$

С другой стороны, применяя формулу бинома Ньютона и интегрируя в пределах от 0 до 1, получим:

$$I = \int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx = \int\limits_0^1 \left(1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{2n}\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{C_n^1 x^3}{3} + \frac{C_n^2 x^5}{5} - \frac{C_n^3 x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}. \quad (12.10)$$

Сравнивая (12.9) и (12.10), получим искомую формулу суммирования.▶

Задание 11. Найти интеграл $\int\limits_0^\pi x\operatorname{sign}(\cos x)dx$.

$$◀ \operatorname{sign}(\cos x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \\ -1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \\ -x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -\frac{x^2}{2} + C_2, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{cases} \qquad F\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = F\left(\frac{\pi}{2} + 0\right);$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} + C_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} + C_2; \quad C_2 = \frac{\pi^2}{4} + C_1;$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C_1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi^2}{8} + C_1, & x = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \end{cases}$$

$$\int\limits_0^\pi x\operatorname{sign}(\cos x)dx = F(\pi) - F(0) = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4} + C_1 - \frac{0^2}{2} - C_1 = -\frac{\pi^2}{4}. ▶$$

Задание 12. Применяя формулу (11.7), найти

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx, \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx.$$

◄ $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{(5)!!}{(6)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{(4)!!}{(5)!!}.$$ ►

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите следующие интегралы:

1.1 $\int\limits_1^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

1.2 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$;

1.3 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

1.4 $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

1.5 $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$;

1.6 $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$;

1.7 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$;

1.8 $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$;

1.9 $\int\limits_2^3 \frac{e^x}{e^x-1} dx$;

1.10 $\int\limits_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$;

1.11 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

1.12 $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$;

1.13 $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$;

1.14 $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx$;

1.15 $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$;

1.16 $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx;$

1.17 $\int\limits_{0}^{a} \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^3}};$

1.18 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x};$

1.19 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x};$

1.20 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}dx;$

1.21 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x};$

1.22 $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx;$

1.23 $\int\limits_{6}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x};$

1.24 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx;$

1.25 $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx;$

1.26 $\int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx;$

1.27 $\int\limits_{1}^{2} (3x+2)\ln x dx;$

1.28 $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx;$

1.29 $\int\limits_{0}^{1} x\ln\left(1+x^2\right)dx;$

1.30 $\int\limits_{0}^{\pi} e^x\sin 2x dx;$

1.31 $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx;$

1.32 $\int\limits_{0}^{\pi} x^3\sin x dx;$

1.33 $\int\limits_{1}^{e} (1-\ln x)^2 dx;$

1.34 $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^5}dx;$

1.35 $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx;$

1.36 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cdot\cos^2 x dx;$

1.37 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\operatorname{tg} x\right)dx;$

1.38 $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx;$

1.39 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos 2nx dx.$

2. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 13

Приложения определенного интеграла. Площадь плоской фигуры

13.1 Понятие квадрируемости и площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости плоских фигур

13.1.1 Понятия границы множества и плоской фигуры

Пусть $a \in \mathbb{R}^2$ и (x_0, y_0) – координаты этой точки.

Определение 13.1. ***Окрестностью*** *точки a называют множество точек той же плоскости с координатами (x, y), удовлетворяющими неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-x_0)^2} < R$, где $R > 0$ – некоторое число.*

Окрестность точки a будем обозначать U_a.

Определение 13.2. ***Проколотой окрестностью*** *точки a называют множество $U_a \setminus a$.*

Проколотую окрестность точки a будем обозначать $\mathring{U}_a$.

Пусть M – какое угодно множество точек плоскости.

Определение 13.3. *Точку $a \in M$ называют* ***внутренней точкой*** *этого множества, если найдется окрестность $U_a \subset M$.*

Определение 13.4. *Точка $a \in M$ называется* ***внешней точкой*** *множества M, если найдется такая окрестность U_a, что $\mathring{U}_a \cap M = \varnothing$.*

Определение 13.5. *Точка a называется* ***граничной точкой*** *множества M, если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества (любая окрестность точки a содержит как точки, принадлежащие множеству M, так и точки, ему не принадлежащие).*

Совокупность всех граничных точек множества M называется ***границей*** *этого множества.*

Определение 13.6. *Множество M точек плоскости будем называть* ***ограниченным****, если существует круг, которому принадлежат все точки этого множества.*

Определение 13.7. *Произвольное ограниченное множество F точек плоскости будем называть* ***плоской фигурой****.*

13.1.2 Квадрируемость и площадь плоской фигуры

Определение 13.8. *Плоскую фигуру, которую можно представить в виде объединения прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, и не имеющих общих внутренних точек, будем называть* ***простейшей фигурой****.*

Из курса математики средней школы следует, что каждый прямоугольник имеет площадь, равную произведению длин его смежных сторон, а площадь простейшей фигуры равна сумме площадей «составляющих» ее прямоугольников. Пустое множество $\varnothing$ будем считать прямоугольником с нулевой площадью.

Пусть P – простейшая фигура. Через $\mu(P)$ обозначим ее площадь. Напомним, что $\mu(P)$ – это неотрицательное число, обладающее следующими свойствами.

1. Свойство аддитивности: если P_1 и P_2 – две простейшие фигуры без общих внутренних точек, то $\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$.

2. Свойство монотонности: если P_1 и P_2 – две простейшие фигуры и $P_1 \subset P_2$, то $\mu(P_1) \leqslant \mu(P_2)$.

Дадим понятие площади некоторого более широкого класса плоских фигур, чем класс простейших фигур, и найдем удобные формулы для вычисления площадей этих фигур через определенные интегралы.

Рассмотрим плоскую фигуру F и простейшие фигуры P и Q такие, что $P \subset F$, $Q \supset F$. Множество площадей $\{\mu(Q), \ Q \supset F\}$ ограничено снизу (в качестве нижней границы можно взять любое отрицательное число), а множество площадей $\{\mu(P), \ P \subset F\}$ ограничено сверху (в качестве верхней границы можно взять любое положительное число, равное площади какой-нибудь простейшей фигуры $Q \supset F$).

Тогда $\mu^*(F) = \inf\limits_{Q \supset F} \{\mu(Q)\}$ назовем верхней площадью фигуры F, а $\mu_*(F) = \sup\limits_{P \subset F} \{\mu(P)\}$ – нижней площадью фигуры F.

Лемма 13.1. *Для любой плоской фигуры F выполняется неравенство $\mu_*(F) \leqslant \mu^*(F)$.*

◀Предположим, что $\mu_*(F) > \mu^*(F)$. Воспользуемся вторым свойством точных границ: для любого $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = \mu_*(F) - \mu^*(F)$), существуют Q' и P', такие, что

$$\mu(Q') < \mu^*(F) + \varepsilon/2, \quad \mu(P') > \mu_*(F) - \varepsilon/2.$$

Получаем $\mu(Q') < \mu(P')$ – противоречие свойству монотонности площади плоских многоугольных фигур, так как $P' \subset F$, а $F \subset Q'$, поэтому $P' \subset Q'$ и $\mu(P') \leqslant \mu(Q')$. ▶

Определение 13.9. *Плоская фигура F называется* ***квадрируемой*** *(имеющей площадь), если*

$$\mu_*(F) = \mu^*(F) = \mu(F).$$

В этом случае число $\mu(F)$ называется ***площадью плоской фигуры*** *F.*

Любая простейшая фигура является квадрируемой в смысле определения 13.9.

13.1.3 Критерий квадрируемости плоских фигур

Теорема 13.1. *Плоская фигура F будет квадрируемой тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют простейшие фигуры $P' \subset F$ и $Q' \supset F$ такие, что $\mu(Q') - \mu(P') < \varepsilon$.*

◀**Необходимость.** Если F – квадрируемая, $\mu^*(F) = \inf\limits_{Q \supset F}\{\mu(Q)\} = \mu_*(P) = \sup\limits_{P \subset F}\{\mu(P)\} = \mu(F)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют простейшие фигуры $P' \subset F$ и $Q' \supset F$, что $\mu(F) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P') \leqslant \mu(F)$ и $\mu(F) \leqslant \mu(Q') < \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $\mu(Q') - \mu(P') < \varepsilon$.

Достаточность. Известно, что $\mu(P') \leqslant \mu_*(F) \leqslant \mu^*(F) \leqslant \mu(Q')$, тогда

$$0 \leqslant \mu^*(F) - \mu_*(F) \leqslant \mu(Q') - \mu(P') < \varepsilon.$$

Отсюда $\mu_*(F) = \mu^*(F)$, значит, F – квадрируемая.▶

Замечание 13.1. В теореме 13.1 вместо простейших фигур Q' и P' можно взять любые квадрируемые плоские фигуры $Q \supset F$ и $P \subset F$.

13.2 Квадрируемость криволинейной трапеции

Рассмотрим криволинейную трапецию F, ограниченную графиком функции $f \in C([a,b])$, а также прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, причем $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$.

Теорема 13.2. *Криволинейная трапеция F есть квадрируемая фигура и ее площадь* $\mu(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

◀Так как $f \in C([a,b])$, то $f \in R([a,b])$. Значит (необходимое условие критерия Римана интегрируемости функции на отрезке, теорема 8.4), для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, но $S_\tau = \mu(Q_\tau)$ есть площадь простейшей фигуры $Q_\tau \supset F$; $s_\tau = \mu(P_\tau)$ – площадь простейшей фигуры $P_\tau \subset F$. Тогда (достаточное условие критерия квадрируемости плоской фигуры – теорема 13.1) криволинейная трапеция F будет квадрируемой.

Кроме того, $s_\tau \leqslant \mu(F) \leqslant S_\tau$, а так как существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$, то существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = I$.

Значит, $\mu(F) = \int\limits_a^b f(x)dx$. ▶

Пример 13.1. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, который задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

◀В силу симметричности эллипса относительно начала координат

$$S = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{4b}{a}\left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{a^2-x^2}; & du = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ dv = dx; & v = x \end{array}\right]_0^a = \frac{4b}{a}\left(x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a - \int\limits_0^a \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \right) =$$

$$= \frac{4b}{a}\left(-\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a \right) = \frac{4b}{a}\left(-\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx + \frac{a^2\pi}{2} \right). \quad S = \pi ab \text{ (кв. ед.)} ▶$$

Пример 13.2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$, $x + y = 2$, $y = 0$.

◀Изобразим фигуру на рисунке 13.1.

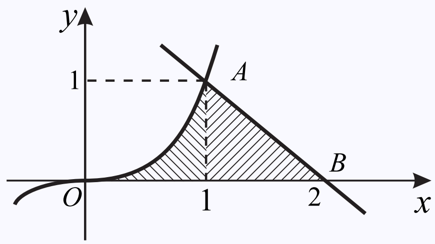


Рисунок 13.1

Найдем координаты точки A:

$$\begin{cases} y = x^3, \\ x + y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \end{cases} \quad A(1,1).$$

Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$ Тогда

$$S = \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 x^3 dx + \int\limits_1^2 (2 - x)\,dx = \frac{3}{4} \text{ (кв. ед.).} ▶$$

Замечание 13.2. К вычислению площадей криволинейных трапеций сводятся и следующие случаи при вычислении площадей плоских фигур.

а) Рисунок 13.2. $S_{abBA} = S_{aA'B'b}$ (как площади симметричных относительно оси Ox плоских фигур).

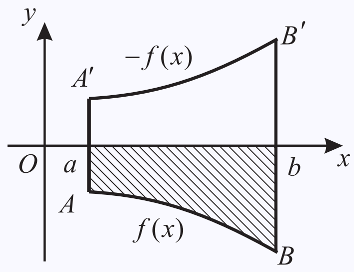


Рисунок 13.2

$$S_{abBA} = \int_a^b (-f(x))\, dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

б) Рисунок 13.3.

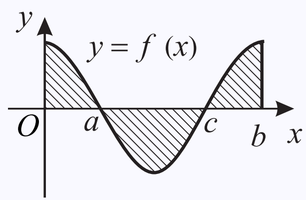


Рисунок 13.3

$$S = \int_0^a f(x)dx - \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

в) Рисунок 13.4.

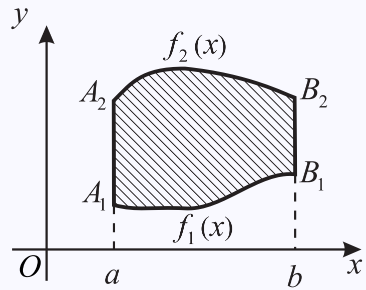


Рисунок 13.4

$$S_{A_1A_2B_2B_1} = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

13.3 Квадрируемость криволинейного сектора

13.3.1 Полярная система координат

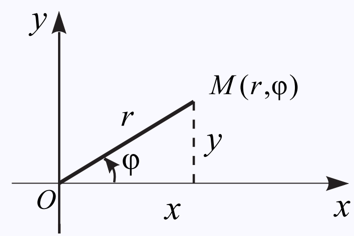
Напомним, что полярная система координат задается точкой O (полюсом), лучом с началом в точке O (полярной осью) и выбранной на полярной оси единицей масштаба.

Полярными координатами точки $M \in \mathbb{R}^2$ называются:

полярный радиус $r = r(M) = \left|\overrightarrow{OM}\right| \geqslant 0$ точки M,

полярный угол $\varphi = \varphi(M)$ ($\varphi > 0$, если поворот полярной оси до совпадения ее с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ осуществляется против часовой стрелки; $\varphi < 0$ – поворот по часовой стрелке). Значение полярного угла $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ называется главным (иногда главными называют значение полярного угла $-\pi < \varphi \leqslant \pi$).

Совместим полюс с началом декартовой системы координат, а полярную ось с неотрицательной частью оси Ox. Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.



Замечание 13.3. Можно рассматривать обобщенные полярные координаты точки $M(r,\varphi)$ так, чтобы $-\infty < r < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$.

Чтобы показать точку $M(r,\varphi)$ в обобщенной полярной системе координат, необходимо построить луч, который образует с полярной осью угол φ, затем отложить $|r|$ единиц масштаба на нем, если $r > 0$, и на его продолжении, если $r < 0$ (рисунок 13.5).

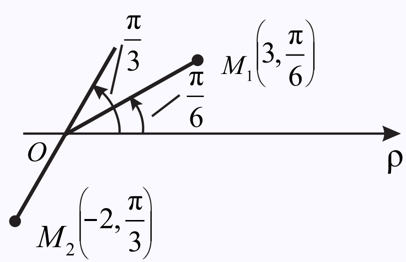


Рисунок 13.5

13.3.2 Уравнения некоторых линий в полярной системе координат

1. Прямая линия.

а) $\operatorname{tg}\varphi = k$ – уравнение прямой, проходящей через полюс ($y = kx$);

б) $r = \frac{P}{\cos(\varphi-\alpha)}$ – уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, не проходящей через полюс, P – расстояние от полюса до прямой, α – угол наклона нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$ прямой к полярной оси.

2. Линии второго порядка.

а) окружность. $r = a \Leftrightarrow x^2+y^2 = a^2$, $r = 2a\cos\varphi \Leftrightarrow (x-a)^2+y^2 = a^2$, $r = 2a\sin\varphi \Leftrightarrow x^2+(y-a)^2 = a^2$;

б) эллипс, гипербола, парабола. $r = \frac{P}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, ε – эксцентриситет, P – параметр: при $0 < \varepsilon < 1$ – эллипс (полюс совпадает с левым фокусом эллипса); при $\varepsilon > 1$ – гипербола (полюс совпадает с правым фокусом гиперболы), в этом случае уравнение нужно рассматривать в обобщенных полярных координатах; при $\varepsilon = 1$ – парабола.

3. Розы – это кривые, уравнения которых в полярных координатах записываются в виде:$r = a\sin k\varphi$ или $r = a\cos k\varphi$; где $(a > 0,\ k > 0)$.

4. Спирали.

а) спираль Архимеда[1] (рисунок 13.6): $r = a\varphi \quad (a > 0), \quad D(r) = \mathbb{R} = E(r)$.

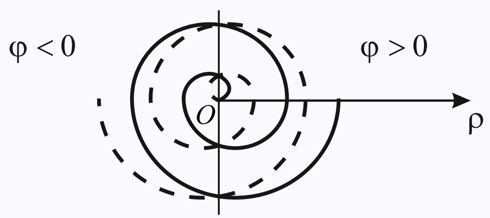


Рисунок 13.6 – Спираль Архимеда

[1] Архимед (287–212 до н. э.) – древнегреческий математик, механик.

б) гиперболическая спираль (рисунок 13.7).

$$r=\frac{a}{\varphi}\ (a>0),\ \ D(r)=\mathbb{R}\setminus\{0\}\,,\ \ E(r)=\mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

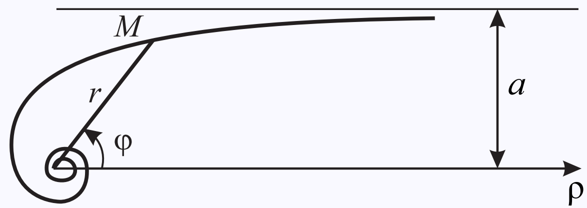


Рисунок 13.7 – Гиперболическая спираль

в) логарифмическая спираль (рисунок 13.8).

$$r=a^{\varphi}\ (a>0,\ \ a\neq 1)\ D(r)=\mathbb{R};\ \ E(r)=(0,+\infty).$$

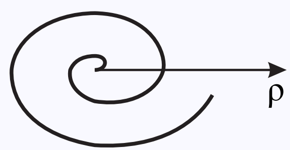


Рисунок 13.8 – Логарифмическая спираль

Некоторые другие кривые в полярной системе координат будут изучены на практических занятиях.

13.3.3 Криволинейный сектор, его квадрируемость

Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, причем функция f непрерывна и принимает неотрицательные значения на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Определение 13.10. ***Криволинейным сектором*** *называется плоская фигура, ограниченная указанной кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β.*

Теорема 13.3. *Криволинейный сектор есть квадрируемая плоская фигура F, площадь которой вычисляется по формуле*

$$\mu(F) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi.$$

◀Рассмотрим любое разбиение $\tau \ : \alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_n = b$.
Для любого частичного отрезка $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ $(k = \overline{1, n})$ построим круговые секторы с радиусами

$$r_k = \min_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \{f(\varphi)\}\,, \ R_k = \max_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \{f(\varphi)\}\,.$$

Получим две квадрируемые фигуры: $Q_\tau \supset F$ (объединение всех круговых секторов с радиусами R_k $(k = \overline{1, n})$); $P_\tau \subset F$ (объединение всех круговых секторов с радиусами r_k $(k = \overline{1, n})$). Их площади соответственно равны:

$\mu(Q_\tau) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} R_k^2 \Delta\varphi_k = S_\tau$ – **верхняя сумма Дарбу** функции $\frac{1}{2}f^2$;

$\mu(P_\tau) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} r_k^2 \Delta\varphi_k = s_\tau$ – **нижняя сумма Дарбу** функции $\frac{1}{2}f^2$.

Функция $\frac{1}{2}f^2$ непрерывна, а значит, интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а по теореме 8.4, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ такое, что $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. А тогда криволинейный сектор F будет квадрируемой плоской фигурой (смотри критерий квадрируемости 13.1 с учетом замечания 13.1) и справедливо неравенство $\mu(P_\tau) \leqslant \mu(F) \leqslant \mu(Q_\tau)$.

Если существует $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) d\varphi = I$, то $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau = I$. Значит, существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \mu(F) = \mu(F) = I$. ▶

Пример 13.3. Найдите площадь, ограниченную кривой $r = a \sin 3\varphi$ $(a > 0)$, заданной в обобщенной полярной системе координат.

◀Если $r \geqslant 0$, то $\sin 3\varphi \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\pi k \leqslant 3\varphi \leqslant \pi + 2k\pi$,

$$\frac{2}{3}\pi k \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \ldots$$

$k = 0$, $\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$;
$k = 1$, $\quad \frac{2}{3}\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$;
$k = 2$, $\quad \frac{4}{3}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi$ и так далее.

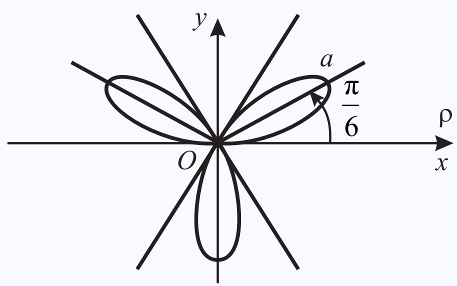


Рисунок 13.9 $- r = a \sin 3\varphi$

Если $r < 0$, то кривая будет иметь такой же вид, как и при $r \geqslant 0$.

$$\mu(F) = 6 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = 3a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{\pi a^2}{4} \text{ (кв. ед.)}. \ ▶$$

Пример 13.4. Найдите площадь, ограниченную кривой $r = a\cos 2\varphi$ $(a > 0)$, заданной в обобщенной полярной системе координат.

◀Строим кривую в обобщенной полярной системе координат.

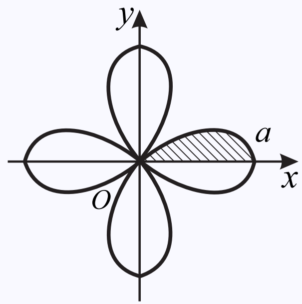


Рисунок 13.10 $- r = a\cos 2\varphi$

Если $r \geqslant 0$, то $\cos 2\varphi \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$k = 0, \qquad -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$;
$k = 1, \qquad \frac{3}{4}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{4}\pi$ и так далее.

Если же $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{4}\pi$, то $r = a\cos 2\varphi < 0$, а кривая будет уже размещена в угле $\frac{5}{4}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{7}{4}\pi$ и наоборот. Поэтому

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi = \frac{\pi a^2}{2} \text{ (кв. ед.)}. ▶$$

13.4 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме

Пусть задана криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная кривыми $L = AB$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рисунок 13.11), но кривая L задана параметрически с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, функция ψ непрерывна и принимает неотрицательные значения на $[\alpha, \beta]$, а φ – непрерывно-дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t) > 0$, если $\alpha < \beta$, $\varphi'(t) < 0$, если $\alpha > \beta$.

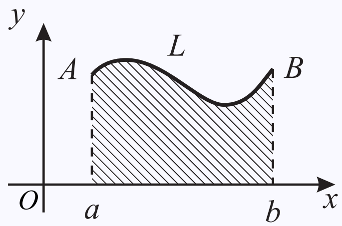


Рисунок 13.11 – Криволинейная трапеция $aABb$

Рассмотрим случай, когда $\varphi'(t) > 0$ $(\alpha < \beta)$. Тогда φ является возрастающей на отрезке $[\alpha, \beta]$. Значит, существует $\varphi^{-1}(x) = t$ – возрастающая и непрерывная на $[a, b]$. Поэтому существует $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x) \geqslant 0$ и f – непрерывна на $[a, b]$. Площадь криволинейной трапеции $S_{aABb} = \int\limits_a^b f(x)dx$. Применим к последнему интегралу подстановку $x = \varphi(t)$ (условия теоремы 11.4 выполняются).

$$S_{aABb} = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Пример 13.5. Найдите площадь, ограниченную астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

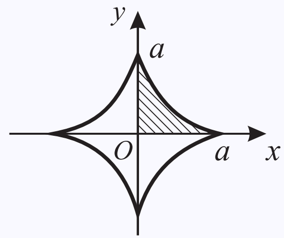


Рисунок 13.12 – Астроида

◀ $x = a\cos^3 t = \varphi(t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi'(t) = -3a\cos^2 t \cdot \sin t < 0$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\cos^3\frac{\pi}{2} = 0;\ \beta = 0,\ \varphi(0) = a\cos^3 0 = a.$$

Тогда в силу симметричности фигуры относительно начала координат:

$$S = 4\int_0^a f(x)dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t(-3a\cos^2 t)\sin t dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2t}{4}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{12}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt - \frac{12a^2}{8\cdot 2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t d(\sin 2t) = \frac{3\pi a^2}{8} \text{ (кв. ед.)}. ▶$$

Пример 13.6. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, который задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

◀Выше нами найдена площадь такой же фигуры с использованием декартовой системы координат (пример 13.1). Параметрическое представление эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где $t \in [0, 2\pi)$. Если взять $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $x' = \varphi'(t) = -a\sin t < 0$.

Откуда, $x = a\cos t$ является убывающей на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и непрерывно-дифференцируемой, значит, существует $\varphi^{-1}(x) = t$, поэтому существует $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$.

$$S = 4\int\limits_0^a f(x)dx = \begin{bmatrix} x = a\cos t, \\ x_{н} = 0,\ 0 = a\cos t,\ t_{н} = \frac{\pi}{2} \\ x_{в} = a,\ a = a\cos t,\ t_{в} = 0 \end{bmatrix} = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \psi(t)\varphi'(t)dt =$$

$$= 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2t)dt = \pi ab \text{ (кв. ед.)}. ▶$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение ограниченного множества на плоскости.
2. Дайте определения внутренней, внешней, граничной точек множества на плоскости.
3. Дайте определение квадрируемой фигуры.
4. Сформулируйте критерий квадрируемости плоской фигуры.
5. Дайте определение криволинейного сектора. Запишите формулу, по которой можно определить площадь криволинейного сектора.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур

Задание 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой и параболой, заданных соответственно уравнениями $y = x$ и $y = 2 - x^2$.

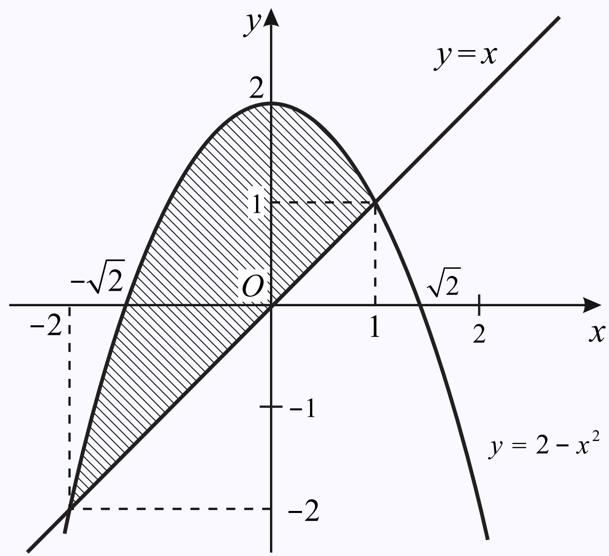


Рисунок 13.13

◀Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$

Получим: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Тогда $S = \int\limits_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\, dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$ (кв. ед.). ▶

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя ветвями кривой и прямой, заданных соответственно уравнениями $(y-x)^2 = x^3$ и $x = 1$.

◀Заметим, что y как неявная функция от x определена лишь при $x \geqslant 0$ (левая часть уравнения всегда неотрицательна).

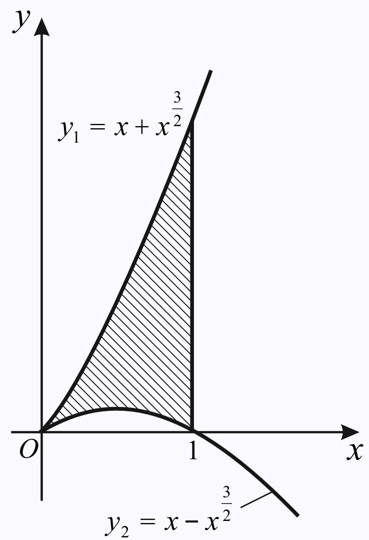


Рисунок 13.14

Найдем уравнение двух ветвей $y - x = \pm x\sqrt{x}$, $y_1 = x + x\sqrt{x}$, $y_2 = x - x\sqrt{x}$.
Очевидно, что $y_1(x) \geqslant y_2(x)$ при $x \geqslant 0$ (рисунок 13.14). Поэтому

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)]\,dx = \int_0^1 \left(x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x}\right) dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5} \text{ (кв. ед.).} \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,. \end{cases}$$

◄Арка циклоиды (рисунок 13.15) описывается при изменении параметра t в пределах от 0 до 2π, так как $y\,(0) = y\,(2\pi) = 0$, а в остальных точках указанного промежутка $y > 0$. Пределы интегрирования равны соответственно $x\,(0) = 0$ и $x\,(2\pi) = 2\pi a$. Следовательно, искомая площадь равна: $S = \int\limits_0^{2\pi a} y dx$.

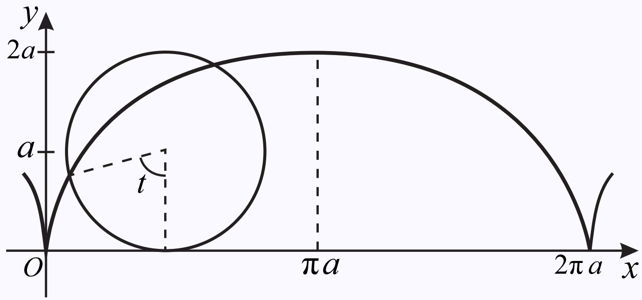


Рисунок 13.15

Сделаем подстановку $x = a\,(t - \sin t)\,,\ y = a\,(1 - \cos t)\,,\ dx = a\,(1 - \cos t)\,dt$.
Когда x пробегает отрезок $[0, 2\pi a]$, t пробегает отрезок $[0, 2\pi]$. Поэтому

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a\,(1 - \cos t)\,a\,(1 - \cos t)\,dt = 3\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Так как площадь круга радиуса a равна πa^2, то полученный результат показывает, что площадь арки в три раза больше площади круга.►

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r = \alpha\varphi$.

$$◀\ S_{OABC} = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Заметим, что точка C пересечения первого витка спирали с полярной осью отдалена от полюса на расстояние $r = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3\cdot\frac{4}{3}\pi^3 a^2 = 3S_{OABC}$.

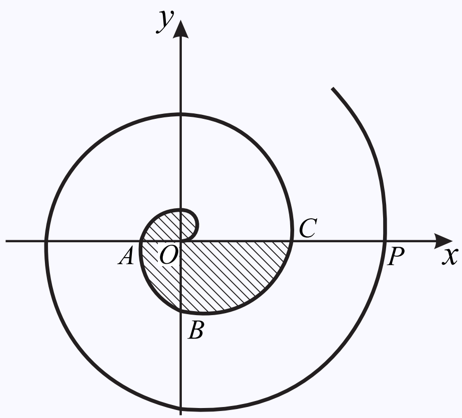


Рисунок 13.16

Таким образом, площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $\frac{1}{3}$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из радиус-векторов точек витка (рисунок 13.16). К этому выводу пришел еще Архимед.▶

Задание 5. Найти площадь фигуры, ограниченной одним лепестком лемнискаты

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

◀Правая часть уравнения кривой неотрицательна при значениях φ, для которых $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Поэтому для первого лепестка лемнискаты

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

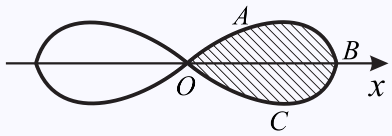


Рисунок 13.17

Следовательно (рисунок 13.17)

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \text{ (кв. ед.)}. ▶$$

Задание 6. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля[2]

$$r = 2a(2 + \cos\varphi).$$

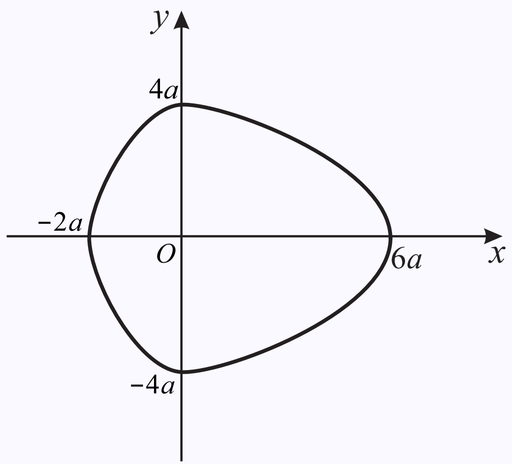


Рисунок 13.18

$$◀\ S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} 4a^2 (2 + \cos\varphi)^2\, d\varphi = 4a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(4 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 4a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(4 + 4\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = 4a^2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \pi = 18\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}.\ ▶$$

[2]Блез Паскаль (1623–1662) – французский математик и физик.

Задание 7. Подерой кривой L относительно точки O называют множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой L.

Определить площадь, ограниченную подерой эллипса $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2$.

◀Построим чертеж (рисунок 13.19).

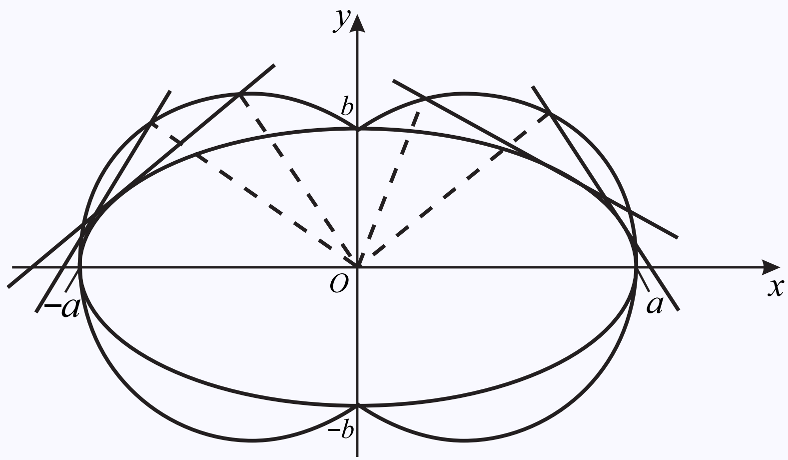


Рисунок 13.19

Перейдем к полярным координатам.

$$r^4 = r^2\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\right),$$

$$r^2 = a^2\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + b^2\frac{1-\cos 2\varphi}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\varphi.$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2+b^2}{2}\pi \text{ (кв. ед.).} \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $x + y = 3$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

   2.1 $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 0$;

   2.2 $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$;

   2.3 $y = 0$, $y = (x + 1)^2$, $y = 4 - x$;

   2.4 $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$;

   2.5 $y = 2 - x^2$, $y^2 = x^2$.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3, 5)$ и осью ординат.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченой параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ и $(3, 0)$.
5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция имеет минимум.
6. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.
7. Найти площадь каждой из фигур, ограниченной окружностью

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$$

   и параболой $y = x^2 + 6x + 10$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$.
9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $x = 2a$.

10. Вычислить площади двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $y^2 = x\,(x-1)^2$.

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ и отрезком оси абсцисс, соединяющим две последовательные точки пересечения кривой с осью абсцисс.

13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^m = x^n$ и $y^n = x^m$, где m и n – целые положительные числа, расположенной в первом квадранте. Рассмотреть вопрос о площади всей фигуры в зависимости от характера чисел m и n.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$x = a\,(2\cos t - \cos 2t)\,,\;\; y = a\,(2\sin t - \sin 2t)\,.$$

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sin 2\varphi$.

17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащей вне круга $r = a$.

18. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми двумя радиус-векторами гиперболической спирали $r\varphi = a$ и ее кривой, прямо пропорциональна разности этих радиусов.

19. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

20. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной ветвью трохоиды $\begin{cases} x = at - b\sin t, \\ y = a - b\cos t, \end{cases}$ $(0 < b \leqslant a)$ и касательной к ней в низших ее точках.

21. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\begin{cases} x = a\cos t\,(1-\cos t)\,, \\ y = a\sin t\,(1-\cos t)\,. \end{cases}$$

Кафедра МАДУП

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◄ ►
◄◄ ►►

Приложение
Закрыть

22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x^4 + y^4 = ax^2y$ (привести уравнение к параметрическому виду, положив $y = tx$.)

23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей

$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \ y = \frac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}.$$

24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r^2 = a^2 \cos 4\varphi.$$

25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной координатными осями и прямой $r = \frac{a}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$.

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi \text{ и } r = 2a\sin\varphi.$$

27. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2 - \cos\varphi$, $r = \cos\varphi$.

28. Вычислить площадь общей части двух кругов

$$r = a\cos\varphi, \ r = a\cos\varphi + a\sin\varphi.$$

29. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 14
Приложения определенного интеграла. Вычисление объема тела и площади поверхности вращения

14.1 Понятие кубируемости и объема тел. Критерий кубируемости тел

Пусть $a \in \mathbb{R}^3$ и (x_0, y_0, z_0) – координаты этой точки.

Определение 14.1. ***Окрестностью*** *точки a называют множество точек того же пространства с координатами (x, y, z), удовлетворяющими неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} < R$, где $R > 0$ – некоторое число.*

Для точек пространства аналогичным образом, как и для точек плоскости, определяются внутренние, внешние и граничные точки множества, а также граница множества.

Определение 14.2. *Множество M точек пространства будем называть* ***ограниченным****, если существует шар, которому принадлежат все точки этого множества.*

В дальнейшем мы будем рассматривать произвольное ограниченное множество F точек пространства $\mathbb{R}^3$ и будем называть это множество **телом**.

Определение 14.3. *Тело, которое можно представить в виде объединения прямоугольных параллелепипедов с гранями, параллельными координатным плоскостям, и не имеющих общих внутренних точек, будем называть* ***простейшим телом****.*

Из курса математики средней школы следует, что каждый параллелепипед имеет объем, равный произведению длин его смежных ребер, а объем простейшего тела равен сумме объемов «составляющих» его параллелепипедов. Пустое множество $\varnothing$ будем считать паралеллепипедом с нулевым объемом.

Пусть P – простейшее тело. Через $\nu(P)$ обозначим его объем. Отметим, что объем $\nu(P)$ – это неотрицательное число, которое обладает свойствами аддитивности и монотонности (смысл указанных свойств для объемов аналогичен рассмотренным для площадей).

Рассмотрим любое тело F и простейшие тела P и Q такие, что $P \subset F$, $Q \supset F$. Множество объемов $\{\nu(Q), Q \supset F\}$ ограничено снизу (в качестве нижней границы можно взять любое отрицательное число), а множество объемов $\{\nu(P), P \subset F\}$ ограничено сверху (в качестве верхней границы можно взять любое положительное число, равное объему какого-нибудь простейшего тела $Q \supset F$).

$\nu^\star(F) = \inf\limits_{Q \supset F} \{\nu(Q)\}$ назовем верхним объемом тела F, а $\nu_\star(F) = \sup\limits_{P \subset F} \{\nu(P)\}$ – нижним объемом тела F.

Лемма 14.1. *Для любого тела F выполняется неравенство $\nu_\star(F) \leqslant \nu^\star(F)$.*

◀Доказательство леммы 14.1 аналогично доказательству леммы 13.1.▶

Определение 14.4. *Тело F называется **кубируемым** (имеющим объем), если $\nu_\star(F) = \nu^\star(F) = \nu(F)$. В этом случае неотрицательное число $\nu(F)$ называется объемом тела F.*

Следствие 14.1. *Любое простейшее тело P является кубируемым в смысле определения 14.4.*

Теорема 14.1 (критерий кубируемости тел). *Тело F будет кубируемым тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют простейшие тела $Q' \supset F$ и $P' \subset F$ такие, что $\nu(Q') - \nu(P') < \varepsilon$.*

◀Доказательство аналогично доказательству критерия квадрируемости плоских фигур.▶

Замечание 14.1. В теореме 14.1 вместо простейших тел P' и Q' можно взять любые кубируемые тела $P \subset F$ и $Q \supset F$.

14.2 Некоторые классы кубируемых тел

14.2.1 Цилиндрические и ступенчатые тела

Напомним, что в аналитической геометрии **цилиндрической поверхностью** называют поверхность, образуемую движением прямой (в каждом своём положении называемой **образующей**) вдоль кривой (называемой **направляющей**) так, что прямая постоянно остается параллельной своему начальному положению.

Часть некоторой цилиндрической поверхности показана на рисунке 14.1 (Γ – направляющая, l – образующая).

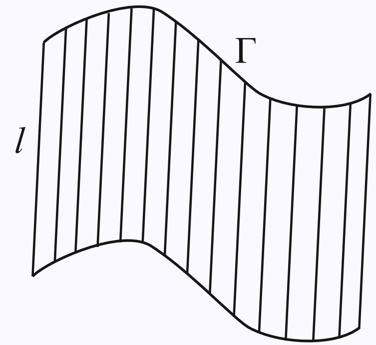


Рисунок 14.1

Определение 14.5. ***Цилиндрическим телом*** *называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными одной из координатных осей, и двумя несовпадающими плоскостями, перпендикулярными этой оси.*

Сечения, полученные при пересечении цилиндрической поверхности указанными плоскостями, называются **основаниями цилиндрического тела**, а расстояние между основаниями цилиндрического тела называется его **высотой**.

Теорема 14.2. *Если основанием цилиндрического тела F является квадрируемая плоская фигура G, то тело F кубируемое и его объем равен $\nu(F) = \mu(G)h$, где h – высота цилиндрического тела, а $\mu(G)$ – площадь его основания.*

◀Если G – квадрируемая плоская фигура, то (необходимое условие критерия квадрируемости – теорема 13.1) для любого $\varepsilon > 0$ существуют простейшие фигуры $P \subset G$ и $Q \supset G$ такие, что $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon/h$. Простейшим фигурам P и Q соответствуют параллелепипеды $F_P \subset F$ и $F_Q \supset F$ (с основаниями соответственно P и Q). Тогда объемы многогранных тел будут равны

$$\nu(F_P) = \mu(P)h \text{ и } \nu(F_Q) = \mu(Q)h.$$

Оценим сверху разность этих объемов:

$$\mu(Q)h - \mu(P)h = (\mu(Q) - \mu(P))\, h < \frac{\varepsilon}{h}h < \varepsilon.$$

Из достаточного условия теоремы 14.1 следует, что цилиндрическое тело F – кубируемое. Поскольку

$$\mu(P)h \leqslant \mu(G)h \leqslant \mu(Q)h,$$

то

$$\nu_\star(F) = \sup_{F_P \subset F} \nu(F_P) \leqslant \mu(G)h \leqslant \inf_{F_Q \supset F} \nu(F_Q) = \nu^\star(F),$$

так как $\mu(G)h$ – верхняя граница для множества $\{\nu(F_P)\}$ и нижняя для множества $\{\nu(F_Q)\}$. Но

$$\nu_\star(F) = \nu^\star(F) = \nu(F),$$

если цилиндрическое тело F – кубируемое. Поэтому $\nu(F) = \mu(G)h$.▶

14.2.2 Тела вращения

Теорема 14.3. *Если $f \in C([a,b])$, то тело F, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $|f|$, прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, кубируемое и его объем можно найти по формуле*

$$\nu(F) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{14.1}$$

◀Возьмем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ с помощью точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{|f(x)|\}$, $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{|f(x)|\}$ $(k = \overline{1,n})$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ построим два прямоугольника с высотами m_k и M_k.

Выполним вращение координатной плоскости вокруг оси Ox. Получим тело вращения F (при вращении указанной в условии теоремы криволинейной трапеции вокруг оси Ox) и два ступенчатых тела F_P и F_Q (F_P – при вращении ступенчатой плоской фигуры, составленной из частичных прямоугольников с основаниями $[x_{k-1}, x_k]$ и высотами m_k $(k = \overline{1,n})$, F_Q – с основаниями $[x_{k-1}, x_k]$ и высотами M_k, $(k = \overline{1,n})$), причем $F_P \subset F$ и $F \subset F_Q$, а $\nu(F_Q) = \pi \sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x_k$ и $\nu(F_p) = \pi \sum\limits_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k$.

Получили соответственно верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$. Поскольку существует $\pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ отрезка $[a,b]$, что $\nu(F_Q) - \nu(F_P) < \varepsilon$. Значит, тело F является кубируемым. Но $\nu(F_P) \leqslant \nu(F) \leqslant \nu(F_Q)$ и существует $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} \nu(F_P) = \lim\limits_{\lambda_\tau\to 0} \nu(F_Q) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$ $(\lambda_\tau = \max\limits_k \{\Delta x_k\})$, тогда $\nu(F) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.▶

Пример 14.1. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной этой осью, кривой $y = \arcsin x$ и $x = 1$.

◀Изобразим тело на рисунке 14.2.

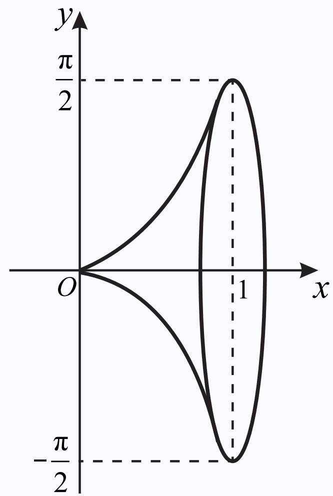


Рисунок 14.2

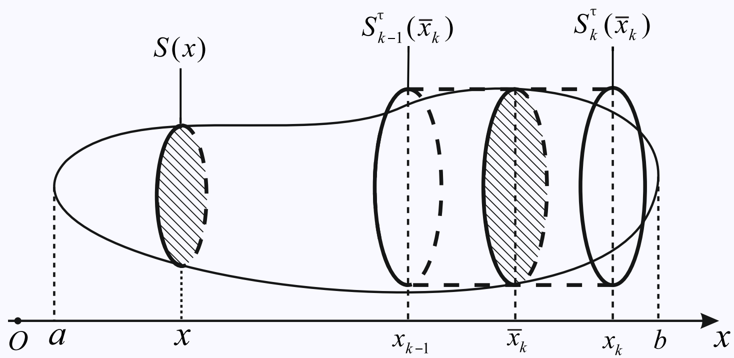
$$V = \pi \int\limits_0^1 y^2 dx = \pi \int\limits_0^1 \arcsin^2 x dx = \pi \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin^2 x, & du = 2 \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right] = \pi x \arcsin^2 x \Big|_0^1 -$$

$$-2\pi \int\limits_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right] = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \int\limits_0^1 dx = \left(\frac{\pi^3}{4} - 2\pi \right) \text{ (куб. ед.)}$$ ▶

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
240
Приложение
Закрыть

14.2.3 Тело с известными площадями поперечных сечений

Пусть для любого $x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ сечения тела F плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $x \in [a,b]$. $S(x)$ называют **площадью поперечного сечения тела** F. Предположим, что $S = S(x)$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Возьмем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$. Через точки разбиения проводим плоскости $x = x_k$, перпендикулярные к оси Ox. На каждом отрезке произвольно выбираем точки $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$.



Через точки $\overline{x}_k$ проводим плоскости $x = \overline{x}_k$, перпендикулярные оси Ox. Строим цилиндрические тела T^{τ}_k с образующими, параллельными оси Ox, и направляющими, являющимися сечениями поверхности тела F плоскостями $x = \overline{x}_k$. Основаниями тел T^{τ}_k берем сечения плоскостей $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$ указанными выше цилиндрическими поверхностями $\left(S^{\tau}_{k-1}(\overline{x}_k)\right.$ и $\left.S^{\tau}_k(\overline{x}_k)\right)$. Сумма объемов полученных цилиндрических тел $\sigma_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} S^{\tau}_n(\overline{x}_k)\Delta x_k$ есть интегральная сумма Римана функции S, непрерывной на отрезке $[a,b]$. Таким образом, существует $\int\limits_a^b S(x)dx = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau = \nu(F)$, то есть объем тела $\nu(F) = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Получили формулу для вычисления объемов тел с известными площадями его поперечных сечений.

Пример 14.2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{z}{H}=\frac{x}{a},\ z=0\ (H>0,\ z\geqslant 0)$.

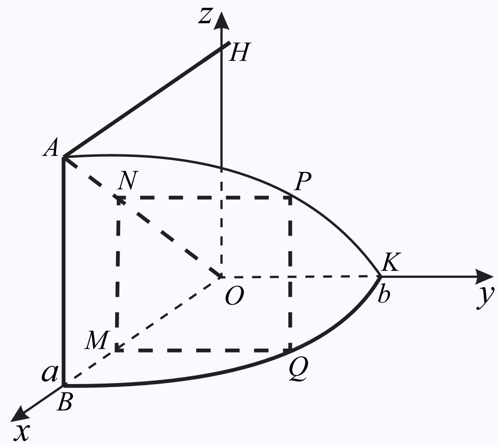


Рисунок 14.3

◀На рисунке 14.3 показан чертеж тела в первом октанте (оно расположено в первом и четвертом октантах, и $y=0$ является его плоскостью симметрии).

Возьмем любое $x\in(0,a)$ (точка $M(x,0,0)$). Строим сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку M – это прямоугольник $MNPQ$. Найдем его площадь. Аппликата точки N $z=\frac{H}{a}x$, а ордината точки Q (из уравнения эллипса) $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда площадь $S(x)$ прямоугольника $MNPQ$ равна $S(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{H}{a}x,\ 0\leqslant x\leqslant a$, а объем тела

$$V=2\int\limits_0^a S(x)dx=2\frac{b}{a}\frac{H}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{2}{3}abH\ (\text{куб. ед.}).\ ▶$$

Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
242
Приложение
Закрыть

14.3 Площадь поверхности вращения

Сначала введем понятие площади поверхности вращения.

Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на этом отрезке неотрицательные значения. Рассмотрим поверхность Π_f, полученную путем вращения графика функции f вокруг оси Ox (рисунок 14.4). Возьмем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ с помощью точек

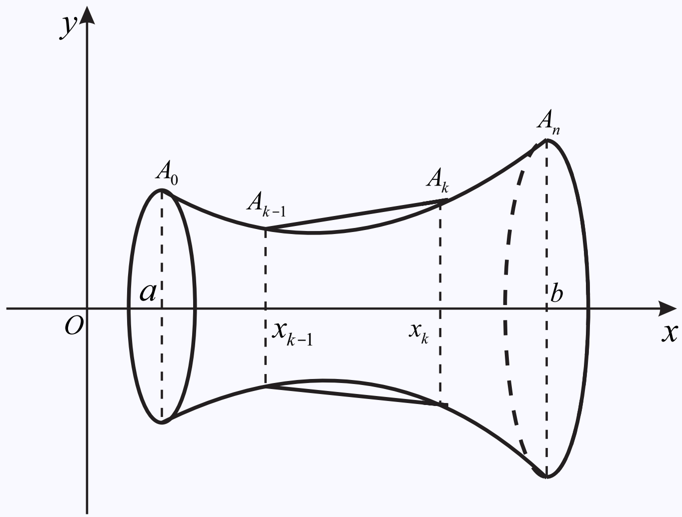


Рисунок 14.4

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Этому разбиению соответствует разбиение графика функции точками

$$A_0(a, f(a)),\ A_1(x_1, f(x_1)), \ldots,\ A_{k-1}(x_{k-1}, f(x_{k-1})), \ldots,\ A_n(x_n, f(x_n)).$$

Построим ломаную $A_0A_1\dots A_k\dots A_n$. При вращении ломаной вокруг оси Ox получим поверхность Π_l, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов. Пусть $\mu(\Pi_l)$ – площадь поверхности Π_l. Тогда

$$\mu(\Pi_l) = 2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\mu(l_k), \tag{14.2}$$

где $\mu(l_k)$ – длина звена $A_{k-1}A_k$ ломаной l.

Пусть $\lambda_\tau = \max\{\Delta x_k\}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение 14.6. *Число $\mu(\Pi_f)$ называют пределом $\mu(\Pi_l)$ при $\lambda_\tau\to 0$ и пишут $\mu(\Pi_f) = \lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\mu(\Pi_l)$, если*

$$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0\ \ \forall\ \tau\ \ \ \lambda_\tau<\delta\ \ |\mu(\Pi_f)-\mu(\Pi_l)|<\varepsilon.$$

*Если указанный предел $\mu(\Pi_f)$ существует, то его называют **площадью поверхности вращения** Π_f, а саму поверхность вращения Π_f в этом случае называют квадрируемой.*

Теорема 14.4. *Если функция $f\in C^1([a,b])$ и принимает на отрезке $[a,b]$ неотрицательные значения, то поверхность Π_f, образованная при вращении графика функции f вокруг оси Ox, будет квадрируемой и ее площадь может быть вычислена по формуле*

$$\mu(\Pi_f) = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \tag{14.3}$$

◄ Длина звена ломаной

$$\mu(l_k) = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(f(x_k)-f(x_{k-1}))^2} = [\text{по формуле Лагранжа}] =$$

$$= \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+f'^2(\overline{x}_k)(x_k-x_{k-1})^2} = \sqrt{1+f'^2(\overline{x}_k)}\Delta x_k.$$

С учетом этого и формулы (14.2) получим:

$$\mu(\Pi_l) = 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\sqrt{1+f'^2(\overline{x}_k)}\Delta x_k + \pi \left(\sum_{k=1}^{n} ((y_{k-1} - f(\overline{x}_k)) + (y_k - f(\overline{x}_k)) \right) \sqrt{1+f'^2(\overline{x}_k)}\Delta x_k.$$

Первое слагаемое в последнем равенстве есть интегральная сумма Римана σ_τ функции

$$\varphi(x) = 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Так как $\varphi \in C([a,b])$, то существует $\int\limits_a^b 2\pi\varphi(x)dx = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau$, где $\sigma_\tau = 2\pi \sum\limits_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\sqrt{1+f'^2(\overline{x}_k)}\Delta x_k$.

Далее докажем, что второе слагаемое имеет предел при $\lambda_\tau \to 0$, который равен нулю. Функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а значит, равномерно непрерывна на этом отрезке, а тогда

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \ \forall\ \tau \ \ \lambda_\tau < \delta \ \ |y_{k-1} - f(\overline{x}_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \text{ и } |y_k - f(\overline{x}_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}.$$

Функция $y(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}$ также непрерывна на $[a,b]$, а значит, ограничена на этом отрезке:

$$\exists\ M > 0 \ \ \forall\ x \in [a,b] \ \ \sqrt{1+f'^2(x)} \leqslant M,$$

$$0 \leqslant |I_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (|y_{k-1} - f(\overline{x}_k)| + |y_k - f(\overline{x}_k)|) \sqrt{1+f'^2(\overline{x}_k)}\Delta x_k \leqslant \frac{2M\varepsilon(b-a)}{2M(b-a)} = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta' = \delta > 0 \ \ \forall\ \tau \ \ \lambda_\tau < \delta' \ \ |I_n - 0| < \varepsilon,$$

а это равносильно тому, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} I_n = 0$. Значит, существует $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \mu(\Pi_l) = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. ▶

Замечание 14.2. Если кривая L, расположенная в полуплоскости $y > 0$ задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(x), \end{cases}$ причем $x, y \in C^1([\alpha, \beta])$ и для любых $t \in [\alpha, \beta]$ будет $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$, то поверхность Π_L, полученная при вращении кривой L вокруг оси Ox, является квадрируемой и ее площадь вычисляется по формуле

$$\mu(\Pi_L) = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt. \tag{14.4}$$

При аналогичных условиях (смотри выше) площадь поверхности, полученной при вращении кривой вокруг оси Oy, существует и соответственно равна:

$$S = 2\pi \int\limits_{c}^{d} x(y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy, \ S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

Замечание 14.3. Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярной оси кривой $r = r(\varphi)$ $(\varphi \in [\alpha, \beta] \subset [0, \pi])$, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi, \ r \in C^1([\alpha, \beta]).$$

При таких же условиях площадь поверхности, образованной при вращении вокруг прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$ кривой $r = r(\varphi)$ $\left(\varphi \in [\alpha, \beta] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\cos\varphi d\varphi.$$

Пример 14.3. Найдите площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси Ox кривой $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant a$ (рисунок 14.5).

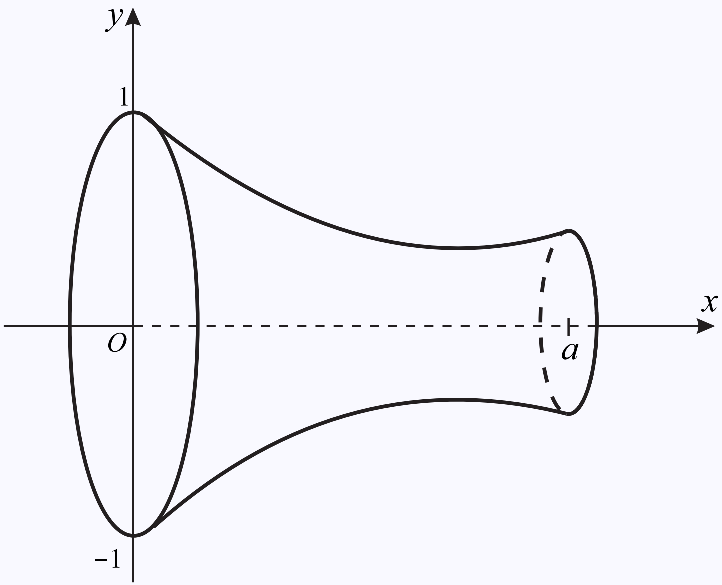


Рисунок 14.5

◀По формуле (14.3) находим

$$S = 2\pi \int_0^a e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}dx = -2\pi \int_0^a \sqrt{1+(e^{-x})^2}d(e^{-x}) = \left[\begin{array}{ll} e^{-x} = t \ - & \text{подстановка,} \\ t_{\text{Н}} = 1, & t_{\text{В}} = e^{-a} \end{array} \right] =$$

$$= -2\pi \int_1^{e^{-a}} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi \int_{1/e^a}^{1} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{t^2+1}, & du = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} \\ dv = dt, & v = t \end{array} \right]\Bigg|_{e^{\frac{1}{a}}}^{1} =$$

$$= 2\pi \left(t\sqrt{t^2+1}\Big|_{\frac{1}{e^a}}^{1} - \int_{1/e^a}^{1} \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}dt \right) =$$

$$= 2\pi \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{e^{2a}}+1}}{e^a} \right) - 2\pi \int_{1/e^a}^{1} \sqrt{t^2+1}dt + 2\pi \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_{1/e^a}^{1}.$$

Тогда

$$S = \pi \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{1+e^{2a}}}{e^{2a}} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln\left(\frac{1}{e^a} + \frac{\sqrt{1+e^{2a}}}{e^a} \right) \right) \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение тела в пространстве $\mathbb{R}^3$.
2. Дайте определение кубируемого тела.
3. Сформулируйте критерий кубируемости тела.
4. Дайте определение цилиндрического тела.
5. Запишите формулу для нахождения объема тел вращения.
6. Запишите формулу для нахождения объема тел с известными площадями его поперечных сечений.
7. Запишите формулу для нахождения площади поверхности вращения.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

Приложения определенного интеграла. Вычисление объемов тел

Задание 1. Вычислить объем пирамиды с высотой H и площадью основания S_0 (рисунок 14.6).

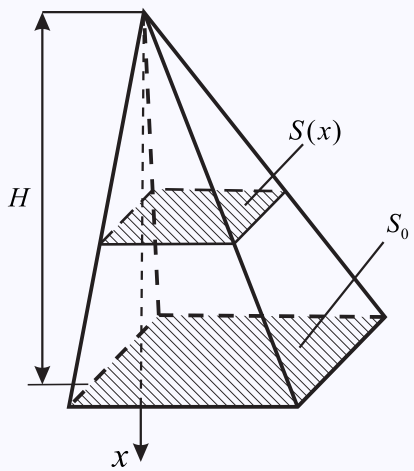


Рисунок 14.6

◀Вершину пирамиды S примем за начало координат и направим ось Ox по высоте H пирамиды от вершины к основанию. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от вершины S на расстоянии x, $0 \leqslant x \leqslant H$. Площадь этого сечения зависит от x, и мы обозначим ее через $S\,(x)$. Пользуясь известным свойством сечений пирамиды, параллельных основанию, составляем пропорцию: $\frac{S(x)}{S_0} = \frac{x^2}{H^2}$, откуда $S\,(x) = \frac{S_0}{H^2}x^2$.

Объем пирамиды равен

$$V = \int\limits_0^H S(x)\,dx = \int\limits_0^H \frac{S_0}{H^2}x^2dx = \frac{S_0}{H^2}\int\limits_0^H x^2dx = \frac{S_0}{H^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{S_0H^3}{3H^2} = \frac{1}{3}S_0H \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleright$$

Задание 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 3x - 1$.

◀Тело образовано вращением фигуры, ограниченной заданными кривыми (рисунок 14.7) вокруг оси Ox.

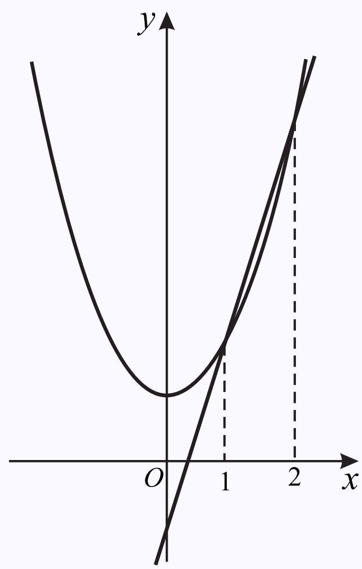


Рисунок 14.7

Чтобы найти абсциссы точек пересечения кривых, решаем систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3x - 1, \end{cases}$ откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

В нашем случае $y_1(x) = x^2 + 1$, а $y_2(x) = 3x - 1$. Следовательно,

$$V = \pi \int\limits_1^2 \left[(3x-1)^2 - \left(x^2+1\right)^2 \right] dx = \pi \int\limits_1^2 \left(7x^2 - 6x - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{7}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{17}{15}\pi \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить объем тора. Тором называется тело, получающееся при вращении круга радиуса a вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии b от центра ($b \geqslant a$) (форму тора имеет, например, баранка).

◄Пусть круг вращается вокруг прямой AE (рисунок 14.8). Тогда объем тора может быть рассмотрен как разность объемов вращения криволинейных трапеций $ABCDE$ и $ABLDE$ вокруг оси Oy.

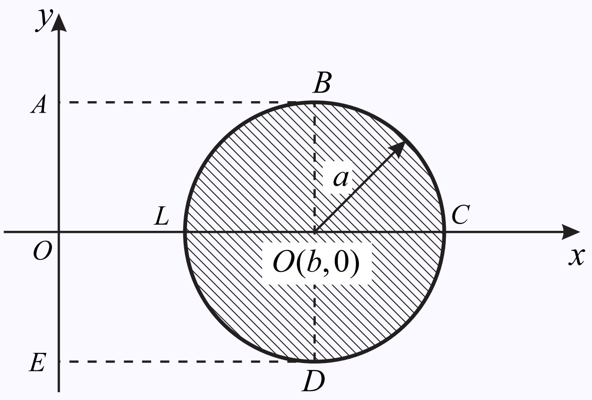


Рисунок 14.8

Расположим систему координат так, как показано на рисунке 14.8. Тогда уравнение окружности $LBCD$ имееет вид: $(x-b)^2+y^2=a^2$, откуда $x=b\pm\sqrt{a^2-y^2}$, причем уравнение кривой BCD имеет вид $x=b+\sqrt{a^2-y^2}$, а уравнение кривой BLD имеет вид $x=b-\sqrt{a^2-y^2}$.

Следовательно, искомый объем равен:

$$V=\pi\int\limits_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\right]dy=4\pi b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}dy=2\pi^2a^2b \text{ (куб. ед.)}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной осью Oy, кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=2\sqrt{2}$ (рисунок 14.9).

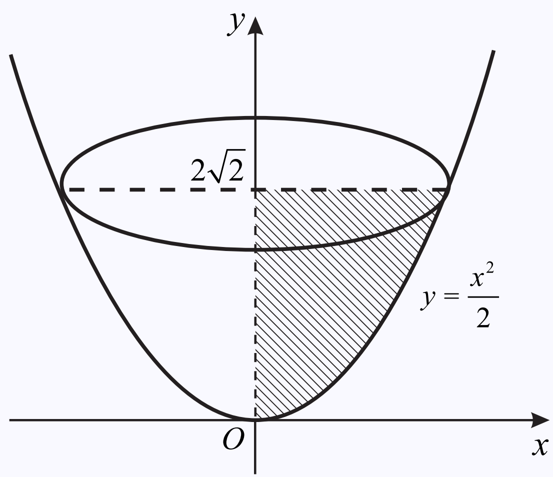


Рисунок 14.9

Кафедра
МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
252
Приложение
Закрыть

◀Здесь $x^2 = 2y$, $c = 0$, $d = 2\sqrt{2}$. По формуле $V = \pi \int\limits_c^d x^2 dy$ находим: $V = \pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = 8\pi$ (куб. ед.). ▶

Задание 5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной этой осью и частью логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

◀Преобразуем уравнение кривой к параметрическому виду

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = e^{\varphi}\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi = e^{\varphi}\sin\varphi. \end{cases}$$

Мы имеем $y^2 = e^{2\varphi}\sin^2\varphi$ и $dx = (e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi)\,d\varphi$. Значению $\varphi = 0$ соответствует точка $M\,(1, 0)$, а значению π – точка $N\,(-e^{\pi}, 0)$, лежащая левее точки M. Поэтому

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2 dx = \pi \int\limits_{\pi}^{0} e^{3\varphi}\sin^2\varphi\,(\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{15}\left(e^{3\pi} - 1\right) \text{ (куб. ед.)}$$ ▶ .

Задание 6. Определить объем сегмента параболоида вращения.

◀Пусть уравнение параболы, вращение которой вокруг оси Ox дает данный параболоид, имеет вид $y^2 = 2px$. Введем обозначения: h – высота сегмента параболоида вращения, r – радиус основания сегмента, x – расстояние между плоскостью, параллельной основанию сегмента, и вершиной параболоида вращения, а r – радиус окружности, получающейся в сечении параболоида вращения указанной плоскостью.

Тогда $r^2 = 2px$, а площадь $S\,(x)$ указанного сечения равна $S\,(x) = \pi r^2 = 2\pi px$.

$$V = \int\limits_0^h 2\pi px dx = \pi px^2\Big|_0^h = \pi ph^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

Площадь S основания сегмента равна πr^2, и так как $r^2 = 2ph$, то $S = 2\pi ph$. Откуда $\pi ph = \frac{S}{2}$, и формулу для объема сегмента можно записать так: $V = \frac{Sh}{2}$, то есть объем сегмента параболоида вращения равен половине произведения площади основания сегмента на его высоту.▶

Задание 7. Определить объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны r, R и высота h.

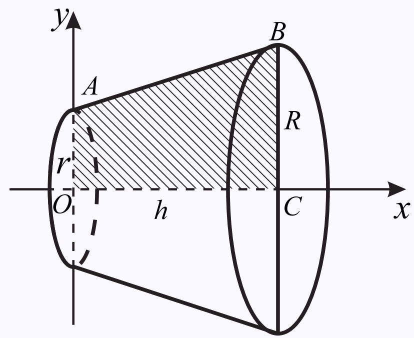


Рисунок 14.10

◀Усеченный конус может быть получен вращением трапеции $OABC$ вокруг оси Ox (рисунок 14.10). Уравнение образующей его имеет вид $y = r + \frac{R-r}{h}x$.

$$V = \pi \int\limits_0^h \left(r + \frac{R-r}{h} x \right)^2 dx = \pi \left[r^2 x + 2r \frac{R-r}{h} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^h =$$

$$= \pi \left[r^2 h + r \frac{R-r}{h} h^2 + \left(\frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{h^3}{3} \right] = \frac{\pi h}{3} \left(r^2 + Rr + R^2 \right) \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleright$$

Задание 8. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

вокруг ее основания (рисунок 14.11).

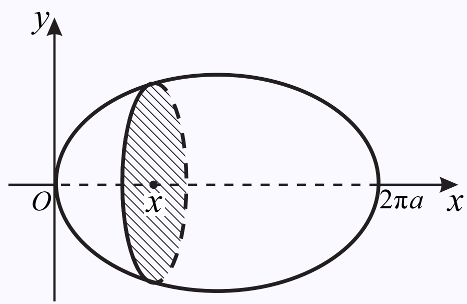


Рисунок 14.11

$$◀\ V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 x'_t dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 \text{ (куб. ед.)}. ▶$$

Задание 9. Вычислить объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.

◀Пусть R – радиус основания цилиндра, α – угол между секущей плоскостью и основанием цилиндра.

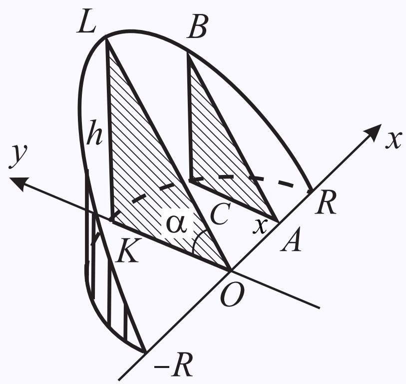


Рисунок 14.12

Изобразим тело на рисунке 14.12. В произвольной точке $x \in (-R, R)$ проводим сечение, перпендикулярное к оси Ox. Это сечение будет прямоугольным треугольником ABC, площадь которого $S(x) = \frac{1}{2} BC \cdot AC$. Но $AC = y$ и $BC = y \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, $S(x) = \frac{1}{2} y^2 \operatorname{tg} \alpha$, а так как $y^2 = R^2 - x^2$, то площадь сечения $S(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right) \operatorname{tg} \alpha$, $-R \leqslant x \leqslant +R$.

$$V = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int\limits_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \operatorname{tg} \alpha \int\limits_{0}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \frac{2}{3} R^2 h \text{ (куб. ед.)},$$

$$h = KL = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Эту задачу можно решить иначе, если проводить сечения тела плоскостями, перпендикулярными к оси Oy (рисунок 14.13).

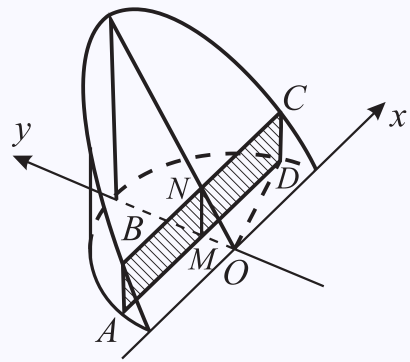


Рисунок 14.13

В результате получим в сечении прямоугольники с площадью

$$S(y) = AD \cdot MN = 2\sqrt{R^2 - y^2}y \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда искомый объем:

$$V = \int\limits_0^R S(y)dy = 2\operatorname{tg}\alpha \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - y^2}ydy = -\operatorname{tg}\alpha \int\limits_0^R \left(R^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - y^2\right) =$$

$$= -\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{2}{3}\left(R^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}R^2 h \text{ (куб. ед.).} \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
2. Найти объем тела, ограниченного двумя цилиндрами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

   3.1 $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг оси Ox;

   3.2 $y^2=(x+4)^3$, $x=0$ вокруг оси Oy;

   3.3 $(y-3)^2+3x=0$, $x=-3$ вокруг оси Ox.
4. Вычислить объем усеченного конуса, основания которого – эллипсы с полуосями a, b и a', b', а высота равна h.
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=ax$, $x-z=0$, $x+z=0$, рассмотрев сечения, перпендикулярные оси Ox.
6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$, рассмотрев горизонтальные сечения.
7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$.
8. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной этой осью, кривой $y=\arcsin x$ и ординатой $x=1$.
9. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной астроидой

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t. \end{cases}$$

   Доказать, что этот объем равен объему тела, полученного при вращении той же фигуры вокруг оси абсцисс.

10. Найти объем тела, которое получается от вращения фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = \alpha(1 + \cos\varphi)$$

вокруг полярной оси.

11. Вычислить объем тела, которое образуется вращением круга $r = \alpha \sin\varphi$ вокруг полярной оси.

12. Найти объем тела, получаемого при вращении вокруг оси ординат криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = \alpha(t - \sin t)$, $y = \alpha(1 - \cos t)$.

13. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \alpha \sin t$, $y = b \sin 2t$.

14. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = \alpha \cos^2\varphi$.

15. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = \alpha \cos^3\varphi$.

16. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

17. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс лепестка лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

18. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 15
Приложения определенного интеграла. Вычисление длин кривых

15.1 Понятие спрямляемой кривой и ее длины

Пусть $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$. Тогда отображение

$$t \to (\varphi(t), \psi(t))\,,\ t \in [\alpha, \beta],$$

описывает кривую на плоскости. Образ L отрезка $[\alpha, \beta]$ при таком отображении будем называть **гладкой кривой**, а пару функций (φ, ψ) – **параметризацией этой кривой**.

Далее введем понятие спрямляемой кривой и ее длины.

Возьмем любое разбиение τ отрезка $[\alpha, \beta]$ на n $(n \in \mathbb{N})$ частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = \overline{1, n})$. Указанному разбиению соответствуют точки $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n$ на кривой L $(M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k)))$ $(k = \overline{1, n})$. Соединяя эти точки отрезками типа $l_k = M_{k-1}M_k$, получим **вписанную в кривую L ломаную** $l = M_0M_1 \ldots M_{k-1}M_k \ldots M_n$, $\mu(l_k) = \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}$ – длина звена l_k ломаной l; $\mu(l) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(l_k)$ – длина ломаной l.

Определение 15.1. *Кривая L называется **спрямляемой**, если множество длин $\mu(l)$ ломаных l, вписанных в кривую L, по всем разбиениям τ отрезка $[a, b]$ ограничено сверху. В этом случае*

$$\sup_{\tau}\{\mu(l)\} = \mu(L)$$

*называется **длиной кривой** L.*

Укажем некоторые важные свойства спрямляемых кривых:

1. Длина спрямляемой кривой не зависит от параметризации этой кривой.

2. Если спрямляемая кривая L разбита на конечное число частичных кривых L_k $(k = \overline{1, n})$, то каждая из кривых L_k будет спрямляемой и $\mu(L) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(L_k)$.

Теорема 15.1. *Гладкая кривая L будет спрямляемой и ее длина вычисляется по формуле*

$$\mu(L) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{15.1}$$

◄Если функции φ' и ψ' непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то они ограничены на этом отрезке (теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции [1, теорема 13.3]). Значит,

$$\exists\ M \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall\ t \in [\alpha, \beta] \ \ |\varphi'(t)| \leqslant M, \ \ |\psi'(t)| \leqslant M.$$

Возьмем любое разбиение τ отрезка $[\alpha, \beta]$ на n ($n \in \mathbb{N}$) частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = \overline{1, n}$). При этом получим соответствующую ломаную l, вписанную в кривую L. Длина этой ломаной

$$\mu(l) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}.$$

Оценим сверху длину $\mu(l)$, использовав теорему Лагранжа [1, теорема 18.3] и ограниченность φ' и ψ':

$$\mu(l) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_k) + \psi'^2(t_k^*)}\Delta t_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{M^2 + M^2}\Delta t_k = M\sqrt{2}(\beta - \alpha).$$

Показана ограниченность сверху множества длин ломаных, вписанных в кривую L, по всем разбиениям τ отрезка $[\alpha, \beta]$. Тогда (определение 15.1) кривая L будет спрямляемой и ее длина $\mu(L) = \sup\limits_{\tau}\{\mu(l)\}$.

Докажем формулу (15.1). Функция $\mu(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, а значит, она интегрируема на этом отрезке. Возьмем любое разбиение τ отрезка $[\alpha, \beta]$. Ему соответствует интегральная сумма Римана функции μ:

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(\mu, \bar{t}_k) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_k) + \psi'^2(\bar{t}_k)}\Delta t_k.$$

При этом существует

$$I = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(\mu, \bar{t}_k) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,\ \ \lambda_\tau = \max_k\{\Delta t_k\},\ \ \Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

Докажем, что $\sup\limits_\tau\{\mu(l)\} = I$. Во-первых,

$$|\mu(l) - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_k) + \psi'^2(t_k^*)} - \sqrt{\varphi'^2(\bar{t}_k) + \psi(\bar{t}_k)} \right| \Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left| \sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2}} \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \frac{|x^2 - y^2|}{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}} = \frac{|x-y||x+y|}{|x| + |y|} \leqslant \frac{|x-y||x+y|}{|x+y|} = |x-y| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \left| \psi'(t_k^*) - \psi'(\bar{t}_k) \right| \Delta t_k \leqslant \left[\begin{array}{l} M_k = \sup\limits_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \{\psi'(t)\}, \\ m_k = \inf\limits_{t \in [t_{k-1}, t_k]} \{\psi'(t)\} \end{array} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\Delta t_k = S_\tau^{\psi'} - s_\tau^{\psi'} \to 0 \text{ при } \lambda_\tau \to 0,$$

что следует из существования $\int\limits_\alpha^\beta \psi'(t)dt$, так как $\psi'(t)$ – непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Тогда $|\mu(l)-I| = |\mu(l)-\sigma_\tau+\sigma_\tau-I| \leqslant |\mu(l)-\sigma_\tau| + |\sigma_\tau - I| \to 0$ при $\lambda_\tau \to 0$. А значит,

$$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, \delta>0\ \ \forall\, \tau\ \ \lambda_\tau<\delta\ \ |\mu(l)-I|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\mu(L)=\sup\limits_{\tau}\{\mu(l)\}$, то

$$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, \widetilde{\tau}\ \ \mu(L)-\mu(l_{\widetilde{\tau}})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим разбиение τ^*, $\widetilde{\tau}\subset\tau^*$, с $\lambda_{\tau^*}<\delta$. Тогда $|\mu(l_{\tau^*})-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. Но при добавлении новых точек разбиения длина вписанной ломанной не уменьшается (неравенство треугольника). Поэтому

$$\mu(L)-\mu(l_{\tau^*})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получим:

$$|\mu(L)-I| = |\mu(L)-I+\mu(l_{\tau^*})-\mu(l_{\tau^*})| \leqslant |I-\mu(l_{\tau^*})| + |\mu(L)-\mu(l_{\tau^*})| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Откуда $\mu(L)=I$.►

Замечание 15.1. Формула (15.1) для вычисления длины кривой L справедлива и при менее жестких условиях, накладываемых на функции φ и ψ, а именно: φ и ψ должны иметь на $[\alpha,\beta]$ интегрируемые производные.

Замечание 15.2. Если кривая L есть график непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции f (или f дифференцируема на $[a,b]$ и существует $\int\limits_a^b f'(x)dx$), то кривая L – спрямляемая, и

$$\mu(L)=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx. \tag{15.2}$$

Замечание 15.3. Если кривая L определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ полярным уравнением $r = r(\varphi)$, где $r \in C^1([\alpha, \beta])$ (или r дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ и существует $\int\limits_\alpha^\beta r'(\varphi)d\varphi$), то кривая L – спрямляемая и

$$\mu(L) = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi. \tag{15.3}$$

Пример 15.1. Найдите длину кривой $y = \frac{x}{4}\sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀Область определения $D(y) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

$$y' = \frac{1}{4}\sqrt{2 - x^2} + \frac{x}{4}\frac{1}{2\sqrt{2 - x^2}}(-2x) = \frac{1 - x^2}{2\sqrt{2 - x^2}}.$$

По формуле (15.2) вычисляем длину кривой. Имеем:

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{(1 - x^2)^2}{4(2 - x^2)}} = \frac{1}{2}\frac{3 - x^2}{\sqrt{2 - x^2}};$$

$$\mu(L) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{3 - x^2}{\sqrt{2 - x^2}}dx = \left[\begin{array}{l|l} x = \sqrt{2}\cos t \text{ — подстановка}, & \\ \sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2 - 2\cos^2 t} = \sqrt{2}\sin t, & \begin{array}{l} x_{\text{н}} = 0,\ t_{\text{н}} = \frac{\pi}{2}; \\ x_{\text{в}} = 1,\ t_{\text{в}} = \frac{\pi}{4} \end{array} \\ dx = -\sqrt{2}\sin t dt, & \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 - 2\cos^2 t}{\sqrt{2}\sin t}(-\sqrt{2})\sin t dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(3 - 1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \text{ (ед. дл.).} \ ▶$$

Пример 15.2. Найдите длину кривой $x = 6 - 3t^2$, $y = 4t^3$, где $x \geqslant 0$.

◀Так как $x \geqslant 0$, то $6 - 3t^2 \geqslant 0$, $t^2 \leqslant 2$, $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$. На отрезке $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ функция $y = 4t^3$ возрастает, значит, она является на этом отрезке обратимой (имеет обратную) $t = \sqrt[3]{\frac{y}{4}}$; $x = 6 - \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{y^2}$.

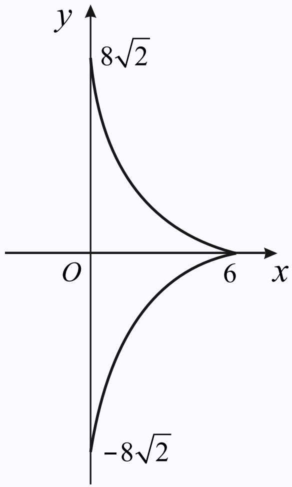


Рисунок 15.1

Изобразим график функции $x = x(y)$ на рисунке 15.1. Длину кривой находим по формуле (15.1).

$$x'_t = -6t,\ y'_t = 12t^2,\ \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 6|t|\sqrt{1+4t^2}.$$

$$\mu(L) = 2\cdot 6\int\limits_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{3}{2}\int\limits_0^{\sqrt{2}}(1+4t^2)^{1/2}d(1+4t^2) = \frac{3}{2}\left.\frac{(1+4t^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{\sqrt{2}} = 27 - 1 = 26 \text{ (ед. дл.)}.$$ ▶

Пример 15.3. Найдите длину кривой $r = a(1 - \sin\varphi)$ $(a > 0)$. Постройте кривую.

◀Сначала построим кривую $r = a(1 - \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (рисунок 15.2).

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
r	a	$\frac{a}{2}$	0	a	$2a$	a

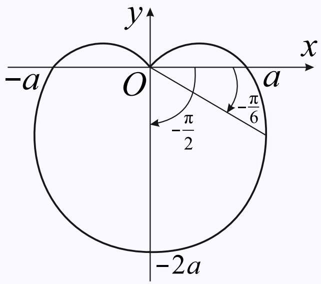


Рисунок 15.2

Длину кривой находим по формуле (15.3). Имеем:

$$r' = -a\cos\varphi,\ \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} = \sqrt{a^2(1 - \sin\varphi)^2 + a^2\cos^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2 - 2\sin\varphi} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = 2a\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right|.$$

$$\mu(L) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} 2a\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \cdot a = 2a \text{ (ед. дл.)}. \blacktriangleright$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение спрямляемой кривой.
2. Сформулируйте свойства спрямляемых кривых.
3. Запишите формулу длины спрямляемой кривой для случая, когда кривая задана параметрически.
4. Запишите формулу длины спрямляемой кривой для случая, когда кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат.
5. Запишите формулу длины спрямляемой кривой для случая, когда кривая задана в полярной системе координат.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

Приложения определенного интеграла. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей вращения

Задание 1. Вычислить длину кривой $l = \overset{\frown}{AB}$ цепной линии, заданной уравнением $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)$, от точки $x = 0$ до точки $x = 4$.

◀Воспользуемся формулой $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$. Имеем:

$$y' = 2\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right)$$

и

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + 2 + e^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)^2.$$

Откуда

$$l = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right)dx = 2\left[e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right]\Bigg|_0^4 = 2\left(e - e^{-1}\right) \text{ (ед. дл.).} ▶$$

Задание 2. Вычислить длину кривой $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

◀Дифференцируя по t параметрические уравнения заданной кривой, получим:

$$x'_t = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t\left(\sin t + \cos t\right),$$

$$y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t\left(\cos t - \sin t\right).$$

Используем формулу длины кривой в параметрическом виде:

$$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sqrt{\left[(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2\right]}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) \text{ (ед. дл.).} ▶$$

Задание 3. Вычислить длину кривой, заданной параметрически равенствами

$$x = \int\limits_1^t \frac{\cos z}{z} dz, \; y = \int\limits_1^t \frac{\sin z}{z} dz$$

от начала координат $(t = 1)$ до ближайшей точки с вертикальной касательной.

◀Очевидно, что при $t = 1$ кривая проходит через начало координат. Далее

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left[\int\limits_1^t \frac{\sin z}{z} dz\right]'_t}{\left[\int\limits_1^t \frac{\cos t}{z} dz\right]'_t} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\cos t}{t}} = \operatorname{tg} t.$$

Таким образом, касательная к данной кривой будет вертикальна во всех точках, для которых $\cos t = 0$, то есть в точках $t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ближайшей к началу координат $(t = 1)$ является точка со значением параметра $t = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, пределы интегрирования найдены: $1 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$x'_t = \frac{\cos t}{t}, \; y'_t = \frac{\sin t}{t}, \; \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{\frac{\cos^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

Следовательно,

$$l = \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t} = \ln t \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\pi}{2} \text{ (ед. дл.)}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти длину замкнутой кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

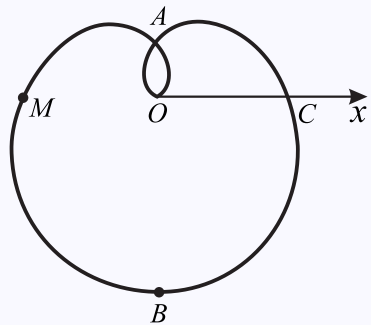


Рисунок 15.3

◄Так как $r \geqslant 0$, то $\sin\frac{\varphi}{3} \geqslant 0$. Отсюда $0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$. При изменении φ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$ полярный радиус r меняется от 0 до a (рисунок 15.3). Затем при изменении φ от $\frac{3}{2}\pi$ до 3π величина r убывает от a до 0; при этом описывается кривая $BCAO$, симметричная кривой $OAMB$ относительно прямой, содержащей лучи, заданные уравнениями $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Теперь вычислим длину кривой. $r'_\varphi = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$,

$$\sqrt{r^2 + r'^2_\varphi} = \sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}} = a\sin^2\frac{\varphi}{3},$$

$$l = a\int\limits_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{a}{2}\int\limits_0^{3\pi}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right]\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3\pi a}{2} \text{ (ед. дл.).} ►$$

Задание 5. Вычислить длину кривой $r = a\cos^4\frac{\varphi}{4}$.

◀Изобразим кривую на рисунке 15.4.

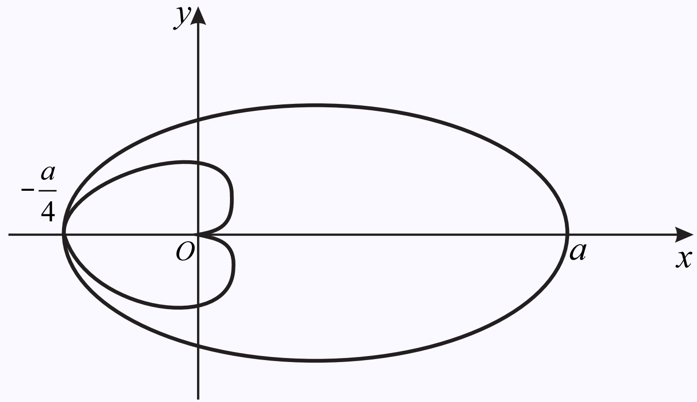


Рисунок 15.4

$$l = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^8\frac{\varphi}{4} + a^2\cos^6\frac{\varphi}{4}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{4}}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\cos^3\frac{\varphi}{4}\,d\varphi = 2a\int_0^{2\pi}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{4}\,d\varphi =$$

$$= 8a\int_0^{2\pi}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)d\sin\frac{\varphi}{4} = 8a\left(\sin\frac{\varphi}{4} - \frac{\sin^3\frac{\varphi}{4}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}a \text{ (ед. дл.)}. ▶$$

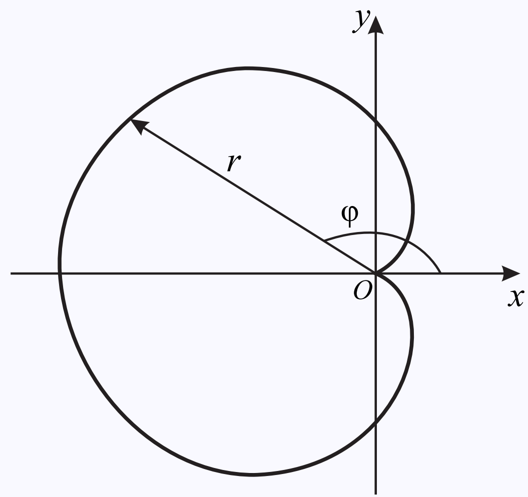


Рисунок 15.5

Задание 6. Вычислить длину кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$ (рисунок 15.5).

$$◀\ r' = a\sin\varphi, \ \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Так как кардиоида симметрична относительно полярной оси, то для нахождения ее длины достаточно найти половину ее длины. Эту половину мы получим, изменяя полярный угол от 0 до π, при этом

$$\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому

$$l = 4a\int\limits_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\left[-2\cos\frac{\varphi}{2}\right]\Big|_0^\pi = 8a \text{ (ед. дл.). ▶}$$

Задание 7. Найти длину астроиды

$$x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

◄Так как астроида симметрична относительно координатных осей (рисунок 13.12), то достаточно определить длину кривой, расположенной в первой четверти и получаемой при изменении параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Учитывая, что $x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$, $y' = 3a\cos t \cdot \sin^2 t$, получим:

$$l = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2\cos^2 t \cdot \sin^4 t}\,dt = 12a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t\,dt =$$

$$= 12a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \text{ (ед. дл.)}. ►$$

Задание 8. Вычислить длину одной арки циклоиды (рисунок 13.15)

$$x = a\,(t - \sin t)\,,\ \ y = a\,(1 - \cos t)\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

$$◄\ x'(t) = a\,(1 - \cos t)\,;\ \ y'(t) = a\sin t.$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = 2a\sin\frac{t}{2}\ \ \left(0 \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \pi\right).$$

$$l = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = 8a \text{ (ед. дл.)}. ►$$

Задание 9. Определить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy кривой

$$y = 1 - x^2,$$

расположенной над осью абсцисс (рисунок 15.6).

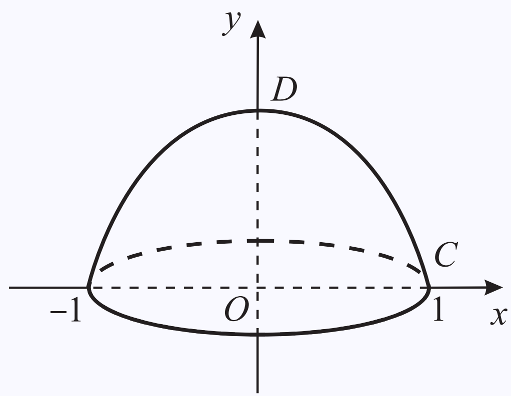


Рисунок 15.6

◀Данная поверхность образуется вращением вокруг оси Oy кривой CD, содержащейся между точкой с ординатой $y = 0$ и точкой с ординатой $y = 1$. Поэтому пределы интегрирования при вычислении рассматриваемой площади поверхности вращения будут 0 и 1.

Здесь $x = \sqrt{1-y}$, $x'_y = -\frac{1}{2\sqrt{1-y}}$. Находим:

$$S = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-y}\sqrt{1 + \frac{1}{4(1-y)}}dy = \pi \int_0^1 \sqrt{5-4y}dy = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \text{ (кв. ед.)}. ▶$$

Задание 10. Определить площадь поверхности, образованной вращением цепной линии

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

вокруг оси абсцисс от точки $x_1 = -a$ до $x_2 = a$ (рисунок 15.7).

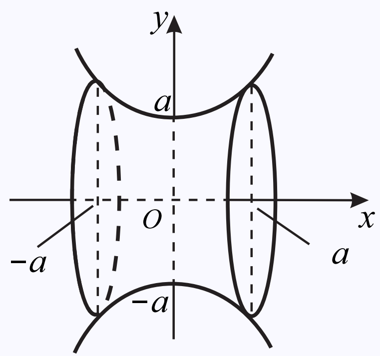


Рисунок 15.7

◄Из уравнения цепной линии находим: $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. Рассматриваемая часть цепной линии симметрична относительно оси Oy, поэтому

$$S = 4\pi \int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}dx = \pi a \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$= \pi a \left[\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{\frac{-2x}{a}}\right]\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right) \text{ (кв. ед.). ►}$$

Задание 11. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy одной «арки» циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

◀Находим $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Получаем:

$$S = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} 2(1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}dt =$$

$$= 8\pi a^2 \left(-2\cos\frac{t}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleright$$

Задание 12. Определить площадь поверхности, образованной вращением астроиды вокруг оси Ox.

◀Так как кривая симметрична относительно оси Oy, то достаточно вычислить площадь поверхности, образованной вращением части астроиды, находящейся в первой четверти.

Из уравнения астроиды находим: $x'_t = -3a\sin t\cos^2 t$, $y'_t = 3a\sin^2 t\cos t$, а тогда ${x'_t}^2 + {y'_t}^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$. Тогда

$$S = 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt = 4\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t\cos t dt =$$

$$= 12\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\sin t) = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleright$$

Задание 13. Вычислить длину петли кривой $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.

◄Из уравнения кривой видно, что областью существования функций x и y является промежуток $(-\infty, +\infty)$ и что с изменением только знака параметра t переменная x не изменяется, тогда как y изменяет лишь свой знак. Откуда вытекает, что данная кривая симметрична относительно оси Ox. Так как $x \geqslant 0$ при всех t, то кривая расположена в первой и четвертой четвертях. Непосредственно из уравнения кривой следует, что $x \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$, а $y \to +\infty$ при $t \to -\infty$ и $y \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Это значит, что кривая имеет две бесконечные ветви: одну в первой четверти, другую – в четвертой.

Найдем теперь точки пересечения кривой с осями координат. Из уравнения для x сразу видно, что $x = 0$ только при $t = 0$. При этом значении параметра t переменная y тоже равна нулю; значит, данная кривая имеет с осью Oy единственную общую точку в начале координат. Положив теперь $y = 0$, то есть $t - t^3 = 0$, найдем $t = 0$ и $t = \pm 1$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получим две точки $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ пересечения кривой с осью Ox; при этом через точку $x_2 = \sqrt{3}$ кривая проходит дважды (при $t = \pm 1$), пересекая саму себя и образуя петлю (рисунок 15.8).

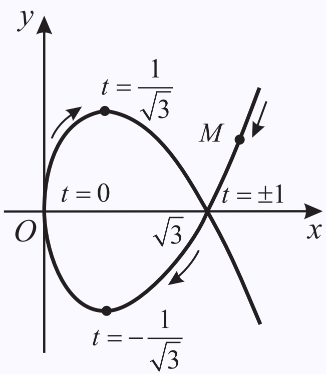


Рисунок 15.8

Из всего сказанного выше видно, что при возрастании параметра t в промежутке $(-\infty, +\infty)$ точка M обходит кривую так, как указано стрелкой на рисунке, при этом петля обходится по часовой стрелке при возрастании t в промежутке $[-1, 1]$. В силу симметрии кривой относительно оси Ox достаточно вычислить длину половины петли и результат удвоить. Найдем, например, длину верхней части (над осью Ox), которой соответствует изменение параметра t от 0 до $+1$ – это и будут пределы интегрирования. Так как $x'_t = 2\sqrt{3}t$, $y'_t = 1 - 3t^2$, $x'^2_t + y'^2_t = (1 + 3t^2)^2$, то искомая длина равна:

$$l = 2\int\limits_0^1 \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt = 2\int\limits_0^1 (1 + 3t^2)dt = 2(t + t^3)\Big|_0^1 = 4 \text{ (ед. дл.).} \blacktriangleright$$

Задания для самостоятельного решения

1. Определить длину кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox.
2. Определить длину кривой $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.
3. Определить длину кривой $9y^2 = x\,(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox.
4. Определить длину кривой $y = \ln\sin x$ между точками, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$.
5. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$.
6. Найти длину кривой, заданной уравнением $y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$.
7. Вычислить длину кривой $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{2}t^3$ в пределах от 0 до $\sqrt{3}$.
8. Вычислить длину эволюты эллипса

$$\begin{cases} x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases} \quad \left(c^2 = a^2 - b^2\right), \ a \geqslant b.$$

9. Вычислить длину кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$$

   от точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = \pi$.
10. На циклоиде $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ найти точку, которая делит первую арку циклоиды по длине в отношении $1 : 3$.
11. Найти длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

12. Найти длину кривой $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t + \sin t), \end{cases}$ от точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = 1$.

13. Найти длину эпициклоиды $\begin{cases} x = a(2\cos t + \cos 2t), \\ y = a(2\sin t + \sin 2t). \end{cases}$

14. Найти длину эвольвенты окружности $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ от точки $t = 0$ до точки $t = 2\pi$.

15. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

16. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

17. Вычислить длину прямой линии $\frac{a}{r} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ в пределах от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

18. Вычислить длину части циссоиды Диоклеса $r = 2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ в пределах от φ_1 до φ_2.

19. Вычислить длину части параболы $\frac{a}{r} = \cos^2\frac{\varphi}{2}$, отсекаемой от параболы вертикальной прямой, проходящей через полюс.

20. Вычислить длину кривой $r = a\cos^4\frac{\varphi}{4}$.

21. Найти длину кривой $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

22. Найдите площадь поверхности, образованной вращением кривой:

22.1 $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y = 1,5$, вокруг оси Oy;

22.2 $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси Ox;

22.3 $y = \cos\frac{\pi x}{2a}$ вокруг оси Ox от $x_1 = -a$ до $x_2 = a$;

22.4 эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$ вокруг оси Oy;

22.5 петли кривой $9x^2 = y(3 - y)$ вокруг оси Oy;

22.6 петли кривой $9y^2 = x^2 - x^4$ вокруг оси Ox;

22.7 части параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$;

22.8 $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ вокруг оси Ox от $y = 1$ до $y = e$;

22.9 кривой $y^2 + 4x = 2\ln y$ вокруг оси Oy от $y = 1$ до $y = 2$;

22.10 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ вокруг оси Ox от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$;

22.11 $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ вокруг оси Ox;

22.12 $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ вокруг оси Ox между точками пересечения с осями координат;

22.13 петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ вокруг оси Ox;

23. Окружность $r = 2r\sin\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

24. Вычислить площадь поверхности, полученной в результате вращения кривой $r^2 = a^2\cos\varphi$: а) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

25. Вычислить площадь поверхности тора, полученного при вращении круга радиуса R вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, расстояние которой от центра круга равно $a > R$.

26. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 16
Физические приложения определенного интеграла

16.1 Интегральный метод

При решении задач о нахождении площади криволинейной трапеции, объема тела вращения, длины кривой, работы переменной силы и так далее нами использован один и тот же прием, а именно:

а) искомой постоянной величине Q, $(S, V, \mu(L), A)$, связанной с некоторым отрезком $[a, b]$ и некоторой функцией $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ставится в соответствие интегральная сумма функции f:

$$Q(f; [a, b]) \approx \sigma_\tau(f, \overline{x}_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k;$$

б) точное значение величины $Q(f; [a, b])$ находится по формуле

$$Q(f; [a, b]) = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \overline{x}_k) = \int_a^b f(x)dx,$$

причем величина $Q(f; [a, b])$ обладает следующими двумя свойствами:

1. Свойство аддитивности: для любого разбиения τ отрезка $[a, b]$ на n частичных отрезков

$$Q(f; [a, b]) = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k, \quad \Delta Q_k = Q(f; [x_{k-1}, x_k]).$$

2. Свойство линейности в малом: для любого частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ будет $\Delta Q_k \approx w\Delta x_k$, где $w = f(\overline{x}_k)$ – коэффициент пропорциональности.

Замечание 16.1. Покажем, что если искомая величина $Q(f;[a,b])$ обладает свойствами аддитивности и линейности в малом, то ее значение равно определенному интегралу.

◀В силу свойств аддитивности и линейности в малом

$$Q(f;[a,b]) \approx \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\Delta x_k.$$

Правая часть последнего приближенного равенства есть интегральная сумма $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f,\overline{x}_k)$ функции f. Тогда

$$Q(f;[a,b]) = \lim_{\lambda_\tau\to 0} \sigma_\tau = \int\limits_a^b f(x)dx, \text{ где } \lambda_\tau = \max_k\{\Delta x_k\}. \blacktriangleright$$

Подынтегральное выражение $f(x)dx$ называется **элементом величины** $Q(f;[a,b])$ и обозначается $dQ = f(x)dx$.

Замечание 16.2. Если величина $Q(f;[a,b])$ обладает указанными свойствами, то для ее вычисления достаточно найти элемент величины $dQ = f(x)dx$, а потом вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Покажем это на примерах.

Пример 16.1. Куб опущен в воду так, что его верхнее основание находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения куба из воды, если его ребро равно a, а плотность куба γ $(\gamma > 10^3)$ (плотность воды 10^3 кг/м^3).

◀Обозначим на рисунке (рисунок 16.1) произвольную глубину x, $0 < x < a$, дадим x приращение Δx, $0 < x + \Delta x < a$. Получим частичный параллелепипед $KMNP$ с основанием, равным основанию куба и высотой Δx. Считаем, что все точки частичного параллелепипеда находятся в воде на глубине x.

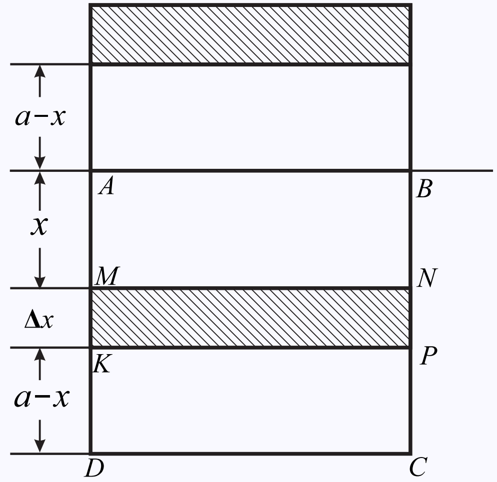


Рисунок 16.1

Вычислим (приближенно) частичную работу по поднятию частичного параллелепипеда из воды на высоту $a - x$ над ее поверхностью.

По закону Архимеда

$$\Delta A = \Delta Q \approx (\Delta P_{\text{К}} - \Delta P_{\text{В}})x + \Delta P_{\text{К}}(a-x) = \Delta P_{\text{К}}a - \Delta P_{\text{В}}x =$$

$$= \Delta V rga - \Delta V 10^3 gx = g(\gamma a - 10^3 x)\Delta V = a^2 g(\gamma a - 10^3 x)\Delta x.$$

Тогда элемент работы $dA = a^2 g(\gamma a - 10^3 x)dx$. А искомая работа

$$A = a^2 g \int\limits_0^a (\gamma a - 10^3 x)dx = a^2 g \left(\gamma a x \Big|_0^a - 10^3 \, \frac{x^2}{2} \Big|_0^a \right) = a^2 g \left(\gamma a^2 - \frac{10^3}{2} a^2 \right) = a^4 g \left(\gamma - \frac{10^3}{2} \right) \text{ (Дж)}. \blacktriangleright$$

Пример 16.2. Вычислить суммарную силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

◀Изобразим рисунок в системе координат (рисунок 16.2).

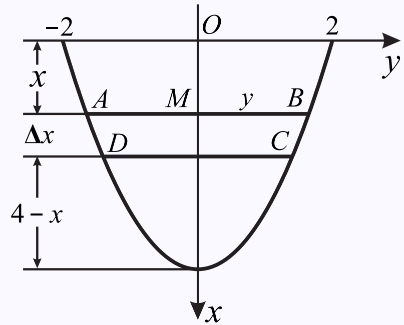


Рисунок 16.2

Возьмем глубину x, $0 < x < 4$, дадим x приращение $\Delta x > 0$, $0 < x + \Delta x < 4$. Уравнение соответствующей параболы в системе координат xOy будет $x = 4 - y^2$. Получим частичную полоску $ABCD$ параболического сегмента. Считаем, во-первых, что $ABCD$ – прямоугольник, во-вторых, что все точки этого прямоугольника находятся на глубине x. Подсчитаем (приблизительно) частичную силу давления, которая действует на указанную частичную полоску. Эта сила давления будет равна весу частичного столба воды формы прямоугольного параллелепипеда, основание которого есть прямоугольник $ABCD$ $(2y \cdot \Delta x)$, а высота x (закон Паскаля).

$$\Delta P \approx \Delta mg = \Delta V 10^3 g = \Delta S x 10^3 g = 2yx10^3 g\Delta x.$$

Из уравнения параболы $y = \sqrt{4 - x}$. Тогда

$$\Delta P \approx 2 \cdot 10^3 gx\sqrt{4 - x}\Delta x.$$

Получим элемент силы давления $dP = 2\cdot 10^3 gx\sqrt{4-x}dx$. Откуда

$$P = 2\cdot 10^3 g\int\limits_0^4 x\sqrt{4-x}dx = \left[\begin{array}{ll} \sqrt{4-x}=t \ - & \text{подстановка}, \\ t^2 = 4-x, & x = 4-t^2, \\ dx = -2tdt, & t_{\text{Н}} = 2,\ t_{\text{В}} = 0 \end{array}\right] = 2\cdot 10^3 g\int\limits_2^0 (4-t^2)t(-2tdt) =$$

$$= 4\cdot 10^3 g\int\limits_0^2 (4t^2 - t^4)dt = 4\cdot 10^3 g\left(4\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2 - \left.\frac{t^5}{5}\right|_0^2\right) = 4\cdot 10^3 g\left(\frac{4}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{5}\cdot 2^5\right) = \frac{2^9\cdot 10^2 g}{3}\ (\text{Н}). \ \blacktriangleright$$

Пример 16.3. Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, который вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно его поверхности (считать поверхностную плотность диска постоянной).

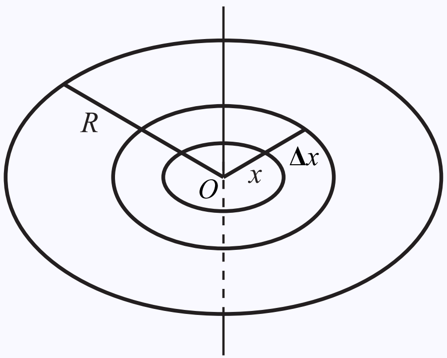


Рисунок 16.3

◀Известно, что кинетическая энергия материальной точки массы m, которая движется со скоростью v, равна $K = \frac{mv^2}{2}$.

Отложим от центра диска произвольное расстояние x, $0 < x < R$, дадим x приращение $\Delta x > 0$, $0 < x + \Delta x < R$. Получим частичное кольцо с центром в точке O, внутренний радиус – x, внешний – $x+\Delta x$ (рисунок 16.3). Считаем, что все точки частичного кольца находятся от центра диска (точка O) на расстоянии x. Еще допустим, что площадь кольца равна приблизительно площади прямоугольника с основанием $2\pi x$ и высотой Δx, $\Delta S \approx 2\pi x \Delta x$.

Найдем массу частичного кольца ΔM:

$$\left.\begin{array}{lcl} \Delta S & - & \Delta M \\ \pi R^2 & - & M \end{array}\right| \quad \Delta M = \frac{2\pi x M \Delta x}{\pi R^2} = \frac{2Mx\Delta x}{R^2}.$$

Линейную скорость Δv, с которой движутся точки частичного кольца, найдем, используя формулу $v = \omega R$, известную из курса физики. В нашем случае $\Delta v = \omega x$.

Кинетическая энергия $\Delta K = \frac{\Delta M (\Delta v)^2}{2}$. С учетом найденного

$$\Delta K \approx \frac{2Mx\Delta x(\omega x)^2}{2R^2} = \frac{M\omega^2 x^3 \Delta x}{R^2}.$$

Получили элемент кинетической энергии $dK = \frac{M\omega^2 x^3}{R^2} dx$. Тогда искомая кинетическая энергия

$$K = \int\limits_0^R \frac{M\omega^2}{R^2} x^3 dx = \frac{M\omega^2}{R^2} \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^R = \frac{1}{4} M\omega^2 R^2 \text{ (Дж)}. \blacktriangleright$$

16.2 Масса, статические моменты и центр тяжести материальной кривой. Первая теорема Паппа-Гульдина

Определение 16.1. *Если $A(x,y)\in\mathbb{R}^2$ – материальная точка массы m, то произведения my и mx называются* ***статическими моментами*** *точки A относительно осей Ox и Oy.*

Пусть задана спрямляемая материальная кривая $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, с линейной плотностью $\gamma=\gamma(t)$, $\gamma\in C([\alpha,\beta])$. Возьмем любое разбиение τ отрезка $[\alpha,\beta]$ на n ($n\in\mathbb{N}$) частичных отрезков $[t_{k-1},t_k]$ ($k=\overline{1,n}$). Произвольно на каждом частичном отрезке выбираем точку $\bar{t}_k\in[t_{k-1},t_k]$, которой соответствует точка $\overline{M}_k\left(\varphi(\bar{t}_k),\psi(\bar{t}_k)\right)$ на кривой. Частичному отрезку $[t_{k-1},t_k]$ соответствует частичная кривая L_k кривой L с длиной $\mu(L_k)=\Delta S_k$. Считаем, что на каждой из частичных кривых L_k линейная плотность будет неизменной и равной $\gamma(\bar{t}_k)$. Тогда частичная масса Δm_k материальной кривой будет равна $\Delta m_k\approx\gamma(\bar{t}_k)\Delta S_k$, а элемент массы – $dm=\gamma(t)dS$, где $dS=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$.

Поэтому масса материальной кривой будет вычисляться по формуле

$$m=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\gamma(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \qquad (16.1)$$

Считаем, что вся масса частичной материальной кривой L_k сконцентрирована в точке $\overline{M}_k\left(\varphi(\bar{t}_k),\psi(\bar{t}_k)\right)$. Частичные статические моменты кривой L_k относительно координатных осей Ox и Oy соответственно будут приближенно равны: $\Delta M_{k,x}\approx\Delta m_k\psi(\bar{t}_k)$, $\Delta M_{k,y}\approx\Delta m_k\varphi(\bar{t}_k)$, а элементы статических моментов:

$$dM_x=\gamma(t)\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\ dM_y=\gamma(t)\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Статические моменты относительно осей Ox и Oy соответственно будут вычисляться по формулам:

$$M_x=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\gamma(t)\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt;\quad M_y=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\gamma(t)\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \qquad (16.2)$$

Определение 16.2. ***Центром тяжести*** *спрямляемой материальной кривой L называется такая точка $(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$, что если в ней сконцентрировать всю массу кривой L, то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут равны соответственно статическим моментам кривой L относительно осей координат.*

Используя определение, получаем формулы для вычисления координат центра тяжести

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \ y_c = \frac{M_x}{m}. \tag{16.3}$$

Теорема 16.1 (первая теорема Паппа[1]-Гульдина[2]). *Площадь поверхности, полученная при вращении кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описанной центром тяжести этой кривой.*

◀Из формулы $y_c = \frac{M_x}{S}$ имеем (при $\gamma(t) = 1$):

$$y_c \cdot \mu(L) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

Умножим обе части последнего равенства на 2π и получим справедливость заключения теоремы Паппа-Гульдина:

$$2\pi y_c \cdot \mu(L) = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \ ▶$$

[1]Папп Александрийский – древнегреческий математик (2-я половина III века).
[2]Пауль Гульдин – швейцарский математик (1577–1643).

Замечание 16.3. Статические моменты материальной кривой в декартовой системе координат вычисляются по формулам (при $\gamma = 1$)

$$M_x = \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx, \ M_y = \int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx; \tag{16.4}$$

в полярной системе координат:

$$M_x = \int\limits_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r'^2+r^2}d\varphi, \ M_y = \int\limits_\alpha^\beta r\cos\varphi\sqrt{r'^2+r^2}d\varphi. \tag{16.5}$$

Пример 16.4. Найдите координаты центра тяжести однородной ($\gamma = 1$) кривой $y^2 = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

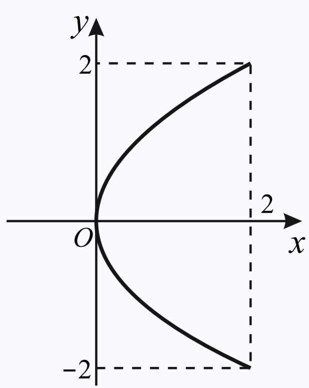


Рисунок 16.4

◀Очевидно, что $y_c = 0$, а $x_c = \frac{M_y}{m}$. Так как $\gamma = 1$, то масса материальной кривой численно равна ее длине (рисунок 16.4).

$$m = 2\int_0^2 \sqrt{1+x_y'^2}dy = 2\int_0^2 \sqrt{1+y^2}dy = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{1+y^2}, & du = \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}, \\ dv = dy, & v = y \end{array}\right] =$$

$$= 2\left(y\sqrt{1+y^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}dy \right) = 2\left(2\sqrt{5} - \int_0^2 \sqrt{1+y^2}dy + \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\Big|_0^2 \right) = \frac{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}{2}.$$

$$M_y = 2\int_0^2 x\sqrt{1+x'^2}dy = \int_0^2 y^2\sqrt{1+y^2}dy = \left[\begin{array}{ll|l} y = \operatorname{tg} x, & y^2 = \operatorname{tg}^2 x, & \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos x}, \\ x_{\text{Н}} = 0, & x_{\text{В}} = \operatorname{arctg} 2, & dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{\sin^2 x d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^3} = \left[\begin{array}{c} t = \sin x, \\ t_{\text{Н}} = 0, \\ t_{\text{В}} = 2/\sqrt{5} \end{array}\right] = \int_0^{2/\sqrt{5}} \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^3} = \left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \frac{tdt}{(1-t^2)^3}, & v = \frac{1}{4(1-t^2)^2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{t}{4(1-t^2)^2}\Big|_0^{2/\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\int_0^{2/\sqrt{5}} \frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2/\sqrt{5}}{4\cdot\frac{1}{25}} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{2/\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \frac{tdt}{(1-t^2)^2}, & v = \frac{1}{2(1-t^2)} \end{array}\right]\Big|_0^{2/\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{16}\ln(9+4\sqrt{5}) - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{9\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{8}\ln(2+\sqrt{5}).\ x_c = \frac{\frac{18\sqrt{5}-\ln(2+\sqrt{5})}{8}}{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})} = \frac{18\sqrt{5}-\ln(2+\sqrt{5})}{8(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))}.$$ ▶

Пример 16.5. Используя первую теорему Паппа-Гульдина (теорема 16.1), найдите центр тяжести полуокружности радиуса a.

◀По первой теореме Паппа-Гульдина, $2\pi y_c \cdot \pi a = 4\pi a^2$. Тогда $y_c = \frac{4\pi a^2}{2\pi\cdot\pi a} = \frac{2a}{\pi}$, $x_c = 0$.▶

16.3 Масса, статические моменты и центр тяжести материальной плоской фигуры. Вторая теорема Паппа-Гульдина

Пусть материальная плоская фигура Q задана с помощью системы неравенств (рисунок 16.5):

$$\begin{cases} 0 \leqslant f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x), \\ a \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где функции $f_1, f_2 \in C([a, b])$.

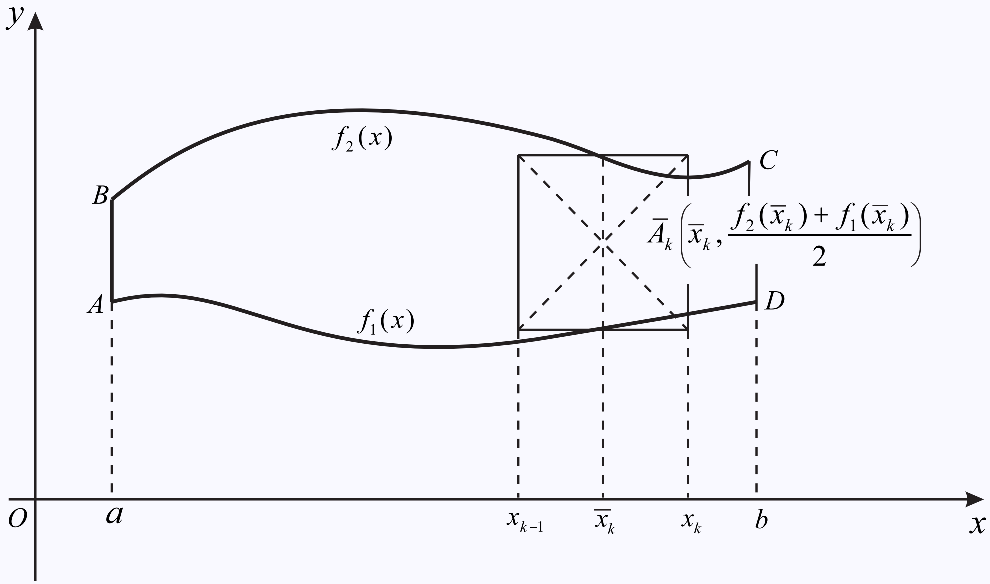


Рисунок 16.5

Предположим, что в любой точке $(x, y) \in Q$ плотность известна и равна $\gamma(x)$, где $\gamma \in C([a, b])$.

Возьмем любое разбиение τ отрезка $[a,b]$ на n $(n\in\mathbb{N})$ частичных отрезков $[x_{k-1},x_k]$ $(k=\overline{1,n})$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\overline{x}_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{2}$, $\overline{A}_k\left(\overline{x}_k,\frac{f_2(\overline{x}_k)+f_1(\overline{x}_k)}{2}\right)$. Считаем, что площадь частичной полоски

$$\begin{cases} x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, \\ f_1(x)\leqslant y\leqslant f_2(x), \end{cases}$$

приблизительно равна площади частичного прямоугольника с основанием Δx_k и высотой

$$h_k=f_2(\overline{x}_k)-f_1(\overline{x}_k),$$

а также плотность $\gamma(x)$ на указанной полоске является постоянной и равной $\gamma(\overline{x}_k)$ в каждой ее точке. Тогда масса материальной полоски приблизительно равна $\Delta m_k\approx\gamma(\overline{x}_k)(f_2(\overline{x}_k)-f_1(\overline{x}_k))\Delta x_k$.

Элемент массы m плоской материальной фигуры $dm=\gamma(x)(f_2(x)-f_1(x))dx$. А тогда

$$m=\int_a^b\gamma(x)(f_2(x)-f_1(x))dx. \tag{16.6}$$

Далее считаем, что масса частичной полоски сконцентрирована в точке $\overline{A}_k$ (в силу симметрии прямоугольника). Тогда частичные статические моменты материальной фигуры Q относительно осей Ox и Oy будут соответственно равны $\Delta M_{kx}\approx\Delta m_k\frac{f_2(\overline{x}_k)+f_1(\overline{x}_k)}{2}$ и $\Delta M_{ky}\approx\Delta m_k\overline{x}_k$, а элементы статических моментов фигуры Q относительно указанных осей соответственно будут равны

$$dM_x=\frac{1}{2}\gamma(x)(f_2^2(x)-f_1^2(x))dx \text{ и } dM_y=\gamma(x)(f_2(x)-f_1(x))xdx.$$

А это значит, что

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\gamma(x)(f_2^2(x)-f_1^2(x))dx,\ M_y=\int_a^b\gamma(x)(f_2(x)-f_1(x))xdx. \tag{16.7}$$

Определение 16.3. ***Центром тяжести*** *плоской квадрируемой материальной фигуры Q называется такая точка $K(x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$, что если в ней сконцентрировать всю массу фигуры Q, то статические моменты этой точки относительно координатных осей будут соответственно равны статическим моментам фигуры Q относительно осей координат.*

Координаты центра тяжести плоской материальной фигуры могут быть вычислены по формулам, аналогичным формулам (16.3) для плоской материальной кривой: $x_c = \frac{M_y}{m}$, $y_c = \frac{M_x}{m}$.

Теорема 16.2 (вторая теорема Паппа-Гульдина). *Объем тела, полученного при вращении однородной материальной фигуры Q вокруг оси Ox, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести указанной фигуры.*

◀По формуле $y_c = \frac{M_x}{m}$ имеем (при $\gamma(x) = 1$): $y_c \cdot \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx$.
Умножив обе части последнего равенства на 2π, получим справедливость заключения теоремы.▶

Пример 16.6. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (рисунок 13.15).

◀Очевидно, что $x_c = \pi a$. Считаем, что $\gamma = 1$. $y_c = \frac{M_x}{m}$.

$$m = \int\limits_0^{2\pi a} y dx = \left[\begin{array}{l} y = a(1 - \cos t), \\ x = a(t - \sin t), \end{array} \quad dx = a(1 - \cos t)dt\right] = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2;$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^3(1 - \cos t)^3 dt = \frac{a^3}{2}(2\pi + 3\pi) = \frac{5\pi a^3}{2}; \quad y_c = \frac{\frac{5\pi a^3}{2}}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a.$$

Таким образом, центр тяжести есть точка $\left(\pi a, \frac{5}{6}a\right)$. ▶

Пример 16.7. Тело получено путем вращения правильного шестиугольника со стороной a вокруг одной из его сторон. Найдите объем указанного тела.

◀Поместим шестиугольник в систему координат (рисунок 16.6) и будем рассматривать его как фигуру Q (смотри выше). График f_1 – ломаная $ABCD$. График f_2 – ломаная $ALKD$.

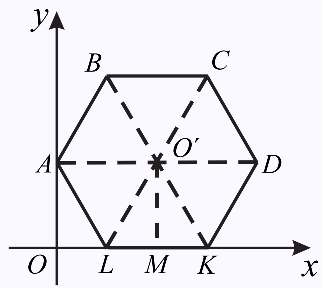


Рисунок 16.6

Используем вторую теорему Паппа-Гульдина (теорема 16.2). Площадь фигуры

$$S = \frac{a^2 6\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2},$$

центр тяжести – точка O (в силу симметрии фигуры Q). $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – радиус окружности, описанной центром тяжести при вращении шестиугольника вокруг оси Ox. Длина этой окружности $2\pi\frac{a\sqrt{3}}{2} = \pi a\sqrt{3}$. Тогда искомый объем будет находиться по формуле

$$V = \pi a\sqrt{3}\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}\pi a^3. ▶$$

Замечание 16.4. Пусть криволинейный сектор задан в полярных координатах неравенствами

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),$$

где $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $r \in C([\varphi_1, \varphi_2])$.

Кроме того, на секторе распределена масса с плотностью $\gamma(\varphi)$ (линейчатая лучевая плотность). Тогда масса материального сектора и соответствующие статические моменты будут высчитываться по формулам:

$$m = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\gamma(\varphi)d\varphi, \tag{16.8}$$

$$M_x = \frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\sin\varphi\cdot\gamma(\varphi)d\varphi,\ M_y = \frac{1}{3}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\cos\varphi\cdot\gamma(\varphi)d\varphi. \tag{16.9}$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте общий алгоритм применения интегрального метода.
2. Запишите формулы для вычисления статических моментов материальной кривой относительно осей Ox и Oy.
3. Запишите формулу для вычисления массы материальной кривой для случая, когда кривая задана параметрически.
4. Дайте определение центра тяжести материальной кривой.
5. Сформулируйте первую и вторую теоремы Паппа-Гульдина.
6. Дайте определение центра тяжести плоской квадрируемой материальной фигуры.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

Физические приложения определенного интеграла. Вычисление работы переменной силы, кинетической энергии

Задание 1. Вычислить кинетическую энергию прямого кругового конуса массы M, вращающегося с угловой скоростью ω около своей оси, если радиус основания конуса R, а высота H (рисунок 16.7).

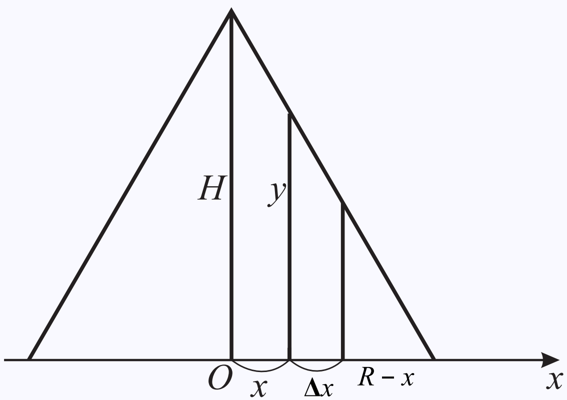


Рисунок 16.7

$$◀\ K = \frac{mv^2}{2},\ v \approx \omega x,$$

$$\Delta m \approx 2\pi xy\Delta x\frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = 6x\frac{H}{R}(R-x)\frac{M}{R^2 H}\Delta x = \frac{6Mx(R-x)}{R^3}\Delta x,\ dK = \frac{6Mx(R-x)}{2R^3}\omega^2 x^2 dx,$$

$$K = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{6M\omega^2}{R^3}(x^3 R - x^4)dx = \frac{6M\omega^2}{2R^3}\left(R\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^R = \frac{3}{20}M\omega^2 R^2\ (\text{Дж}).\ ▶$$

Задание 2. Вычислить кинетическую энергию шара массы m и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр (рисунок 16.8).

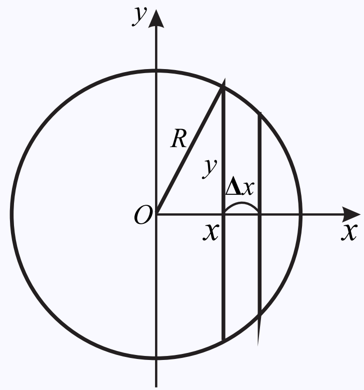


Рисунок 16.8

$$◀\ K=\frac{mv^2}{2},\ \Delta K=\frac{\Delta m(\Delta v)^2}{2},\ \Delta m\approx 2\pi x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\Delta x\cdot\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3},\ v=\omega x,$$

$$\Delta K\approx 2\pi x 2\sqrt{R^2-x^2}\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{1}{2}\omega^2x^2\Delta x=\frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{R^3}x^3\sqrt{R^2-x^2}\Delta x,\ dK=\frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{R^3}x^3\sqrt{R^2-x^2}dx,$$

$$K=\int\limits_0^R\frac{3}{2}\frac{m\omega^2}{R^3}\frac{1}{2}x^2\sqrt{R^2-x^2}dx^2=\frac{R^2m\omega^2}{5}\ (\text{Дж}).\ ▶$$

Задание 3. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 см, если известно, что для сжатия ее на $0,5$ см требуется сила в 1 H.

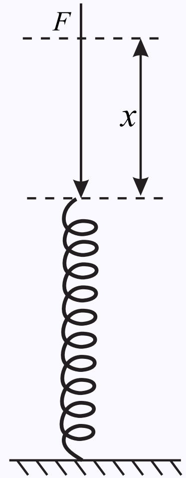


Рисунок 16.9

◀Обозначим через x величину сжатия пружины (выраженную в метрах), а через F – силу (выраженную в ньютонах), требуемую для сжатия пружины на x метров (рисунок 16.9).

Тогда $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности (коэффициент жесткости пружины).

При $x = 0,005$ м и $F = 1$ H имеем: $1 = k \cdot 0,005$, откуда $k = 200\frac{H}{м}$ и следовательно, $F(x) = 200x$. Тогда работа равна:

$$A = \int\limits_0^{0,04} 200x dx = 100x^2\Big|_0^{0,004} = 0,16 \text{ (Дж)}. \blacktriangleright$$

Задание 4. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь которого S, высота H, плавает на поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить поплавок из воды, сохраняя вертикальное положение его оси, если плотность дерева равна γ.

◀Обозначим высоту AK подводной части поплавка $ABCD$ через h (рисунок 16.10).

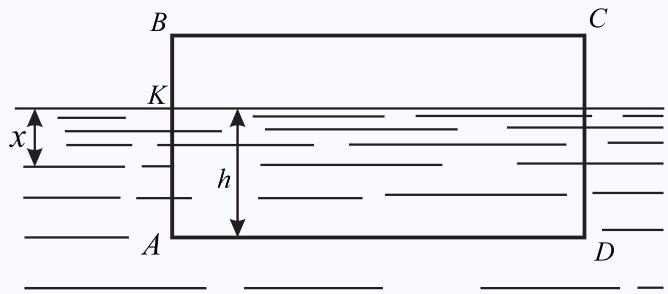


Рисунок 16.10

По закону Архимеда сила давления воды, действующая снизу вверх на плавающее тело, равна его весу P, то условие плавания тел имеет вид: $P = SHg\gamma_{п} = Shg\gamma_{в}$, откуда $h = \frac{H\gamma_{п}}{\gamma_{в}}$.

Пусть к некоторому моменту времени подводная часть поплавка оказалась поднятой на высоту x (считая от поверхности воды). В этот момент сила давления воды на тело будет: $F_1(x) = S(h-x)g\gamma_{в}$, а сила, которую надо приложить к телу, чтобы удержать его от погружения в воду, окажется равной:

$$F(x) = P - F_1(x) = Shg\gamma_{в} - S(h-x)g\gamma_{в} = Sgx\gamma_{в}.$$

Тогда искомая работа равна:

$$A = \int\limits_0^h Sg\gamma_{в}x\,dx = Sg\gamma_{в}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h = \frac{Sg\gamma_{в}h^2}{2} = \frac{SgH^2\gamma_{п}^2}{2\gamma_{в}} \text{ (Дж).} \ ▶$$

Задание 5. Цилиндр диаметром 20 см и длиной 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем газа в два раза, считая, что температура газа остается постоянной?

◀Используем закон Бойля – Мариотта $pv = c = \text{const}$. Работа внешней силы (которая по величине равна давлению пара) по сжатию пара от объема v_2 до объема v_1 $(v_1 < v_2)$ вычисляется по формуле $A = \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{c}{v} dv = c \ln \frac{v_2}{v_1}$. Так как объем газа уменьшается в два раза, то $A = c\ln 2$. Найдем

$$c = pv = \pi g \cdot 10 \cdot 100 \cdot 80 = 80000\pi g \ (H \cdot см) = 800\pi g \ (H \cdot м).$$

Откуда $A = 800\pi g \ln 2$ (Дж).▶

Задание 6. Найдите работу гравитационной силы (силы тяготения) массы M по перемещению массы m с расстояния R_1 до расстояния R_2 от центра масс тела M.

◀Согласно закону всемирного тяготения, $F = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$. Проекция силы $\overrightarrow{F}$ на ось $\overrightarrow{r}$, проведенную в направлении увеличения расстояния, отрицательна, то есть $F_r = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$, тогда $dA = -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr$, следовательно,

$$A = -\int\limits_{R_1}^{R_2} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \frac{\gamma Mm}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = \gamma Mm \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \ (\text{Дж}). \ ▶$$

Задание 7. Найдите работу, совершаемую силой Кулона по перемещению точечного заряда q с расстояния R_1 до расстояния R_2 от центра заряда q.

◀Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между двумя точечными зарядами $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{r}}{r}$ и ее проекция на ось $\overrightarrow{r}$ $F_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, тогда $dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$.

Следовательно, работа по перемещению одного точечного заряда в поле другого точечного заряда

$$A = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \ (\text{Дж}). \ ▶$$

Задания для самостоятельного решения

1. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого S, а высота H, плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность?
2. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота H.
3. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 кг растягивает ее на 1 см.
4. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.
5. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли (радиус которой R) на высоту h.
6. Вычислить кинетическую энергию шара массы m и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр.
7. Шар лежит на дне бассейна глубиной H. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус равен R, а его плотность δ.
8. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a,0)$ в точку $(b,0)$. Определить работу A силы отталкивания F, если известно $F = \frac{Ee}{x^2}$ дин, где x см – расстояние между зарядами E и e.
9. Ракета поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $j = \frac{A}{a-bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость в любой момент времени t, если начальная скорость равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.
10. Вычислить сопротивление при прохождении тока с одного основания усеченного конуса к другому, если радиусы оснований равны a и b, а высота усеченного конуса равна H.

11. Куб погружен в воду так, что его верхнее основание находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения куба из воды, если его ребро равно a, а удельный вес δ $(\delta > 1)$.

12. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса H, радиус R.

13. Ответьте на вопросы теста.

Физические приложения определенного интеграла. Вычисление давления жидкости на вертикальную пластинку и пройденного телом пути

Задание 1. Найти величину силы давления на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен R, а верхний диаметр лежит на свободной поверхности жидкости; плотность жидкости равна γ.

◀Рассмотрим горизонтальную полоску полукруга на глубине x (рисунок 16.11). Пусть ширина полоски dx, а длина l. Принимая эту полоску за элемент площади, для дифференциала площади получим выражение $dS = ldx$.

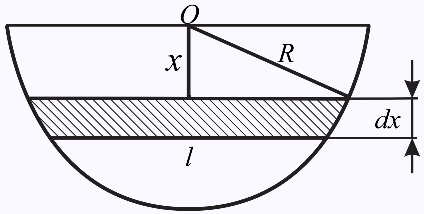


Рисунок 16.11

По теореме Пифагора, $x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$. Откуда $l = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ и, следовательно, $dS = 2\sqrt{R^2 - x^2}dx$.
Сила давления жидкости на элементарную полоску равна $dP = \gamma xgdS = 2\gamma xg\sqrt{R^2 - x^2}dx$.
Таким образом,

$$P = \gamma g \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\gamma g \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - x^2\right) = -\gamma g \left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^R = \gamma g R^3 \text{ (Н)}. \blacktriangleright$$

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Задание 2. Вычислить силу давления воды на треугольник, высота которого равна h, а основание b, если он погружен в воду таким образом, что основание его лежит на поверхности воды, а высота направлена вертикально вниз (рисунок 16.12).

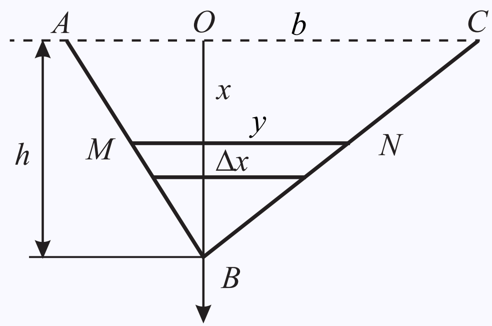


Рисунок 16.12

$$◀\ \Delta P \approx y\Delta x \cdot x10^3 g = \frac{b}{h}10^3 gx(h-x)\Delta x,$$

$$P = \frac{b}{h}10^3 g \int\limits_0^h (hx - x^2)\,dx = \frac{b}{h}10^3\, g \left(h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = bgh^2 10^3 \frac{1}{6}\ (\text{Н}).\ ▶$$

Задание 3. Прямоугольная пластинка со сторонами a и b помещена в жидкость плотностью γ таким образом, что пластинка расположена вертикально и ее верхняя сторона a находится на глубине H от поверхности и параллельна поверхности воды. Найти силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки (рисунок 16.13).

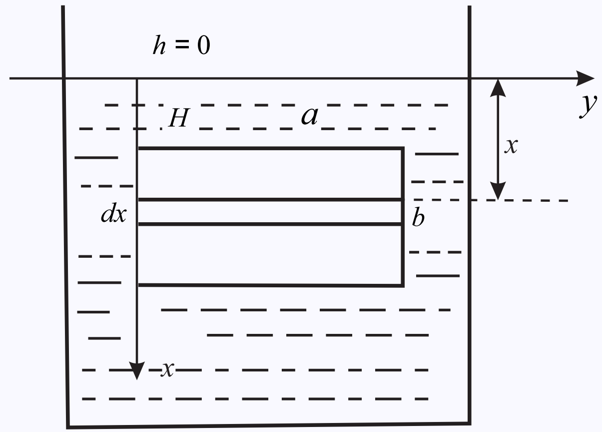


Рисунок 16.13

◀Силу давления можно в этом случае найти по формуле $P = \gamma g \int\limits_c^d (y_2 - y_1) x dx$.

В нашем случае $y_2 = a$, $y_1 = 0$, $c = H$, $d = H + b$, тогда получим следующую формулу для вычисления силы давления:

$$P = \gamma g a \int\limits_H^{H+b} x dx = \gamma g a \frac{x^2}{2}\Big|_H^{H+b} = \frac{1}{2}\gamma g a b(2H + b) \ H \ (\text{Н}). ▶$$

Задание 4. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела

$$v(t) = 10t + 2 \text{ (м/с)}.$$

◀Если $v(t) = 10t+2$ (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения $t = 0$ до конца 4-й секунды, определяется формулой $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$:

$$l = \int\limits_0^4 (10t + 2)dt = (5t^2 + 2t)\Big|_0^4 = 88 \text{ (м)}. ▶$$

Задание 5. Материальная точка движется прямолинейно. Ее скорость изменяется по закону

$$v(t) = 5 + 3t^2 \text{ (м/с)}.$$

Какой путь пройдет материальная точка за 2-ю секунду от начала движения?

◀Если $v(t) = 5 + 3t^2$ (м/с), то путь, пройденный телом за вторую секунду, определяется формулой

$$l = \int\limits_0^2 v(t)dt - \int\limits_0^1 v(t)dt$$

и равен:

$$l = \int\limits_0^2 (5 + 3t^2)dt - \int\limits_0^1 (5 + 3t^2)dt = (5t + t^3)\Big|_0^2 - (5t + t^3)\Big|_0^1 = 12 \text{ (м)}. ▶$$

Задание 6. Материальная точка движется прямолинейно. Ускорение материальной точки изменяется по закону $a(t) = 8 + 4t + 14t^2$ $(\text{м}/\text{с}^2)$. Какой скорости она достигнет через $0,4$ с после начала движения из состояния покоя? Каков путь пройдет она за это время?

◀Скорость и путь определяются по формулам: $v = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)dt$, $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Найдем скорость и путь:

$$v = \int\limits_0^{0,4} (8 + 4t + 14t^2)dt = \left(8t + 2t^2 + \frac{14t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{0,4} = 3,82\ (\text{м}/\text{с}),$$

$$l = \int\limits_0^{0,4} \left(8t + 2t^2 + \frac{14t^3}{3}\right) dt = \left(4t^2 + \frac{2t^3}{3} + \frac{7t^4}{6}\right)\Bigg|_0^{0,4} = 0,71\ (\text{м}).$$ ▶

Задание 7. Закон изменения углового ускорения задан формулой $\beta(t) = 60t^2 + 4$ $(\text{рад}/\text{с}^2)$. Какой угловой скорости β достигнет материальная точка через $0,5$ с после начала движения из состояния покоя? Чему равно ее угловое перемещение φ за это время?

◀Скорость и путь определяются по формулам:

$$\omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} \beta(t)dt,\ \ \varphi = \int\limits_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt.$$

Найдем скорость и путь:

$$\omega = \int\limits_0^{0,5} (60t^2 + 4)dt = \left(20t^3 + 4t\right)\Big|_0^{0,5} = 4,5\ (\text{рад}/\text{с}),\ \ \varphi = \int\limits_0^{0,5} \left(20t^3 + 4t\right) dt = \left(5t^4 + 2t^2\right)\Big|_0^{0,5} = 0,81\ (\text{рад}).$$ ▶

Задания для самостоятельного решения

1. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.
2. Вычислить силу давления жидкости на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h ($h \geqslant b$). Плотность жидкости d.
3. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой имеет 70 м в длину, нижнее 50 м, а высота 20 м.
4. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 м, лежит на поверхности воды. Определить величину силы давления на каждую из частей шлюза, образуемого делением квадрата одной из его диагоналей.
5. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см. Плотность жидкости равна γ, и жидкость полностью заполняет цилиндр.
6. Вычислить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.
7. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 граммов радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшится в два раза.
8. Ответьте на вопросы теста.

Физические приложения определенного интеграла. Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра тяжести

Задание 1. Найти момент инерции треугольника относительно его основания.

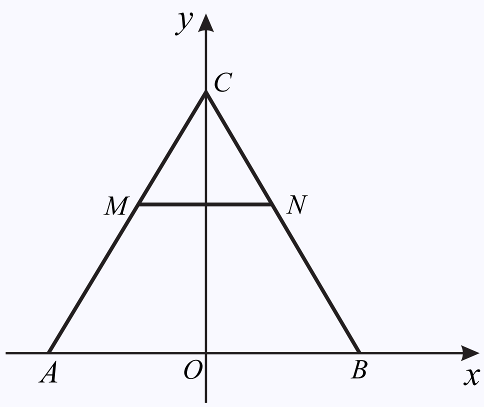


Рисунок 16.14

◀Обозначим основание треугольника через b, а высоту через h. Расположим оси координат, как показано на рисунке 16.14. Тогда $dI_x = y^2 dS$, где $dS = MN dy$, но $MN = \frac{b(h-y)}{h}$. Следовательно,

$$dI_x = y^2 \frac{b\,(h-y)}{h} dy, \quad I_x = \frac{b}{h} \int\limits_0^h (h-y)\, y^2 dy = \frac{1}{12} b h^3. \ ▶$$

Задание 2. При расчете балочных деревянных мостов часто приходится иметь дело с круглыми бревнами, отесанными на два канта (рисунок 16.15). Найти момент инерции подобного сечения относительно горизонтальной средней линии.

◀Расположим систему координат, как показано на рисунке 16.15.

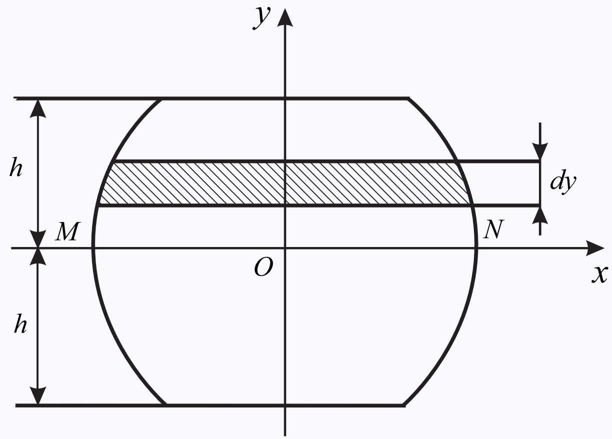


Рисунок 16.15

Тогда $dI_x = y^2 dS$, где $dS = MNdy = 2xdy = 2\sqrt{R^2 - y^2}dy$. Откуда

$$I_x = 2\int_{-h}^{h} y^2\sqrt{R^2 - y^2}dy = 4\int_{0}^{h} y^2\sqrt{R^2 - y^2}dy.$$

Вычисляя интеграл с помощью подстановки $y = R\sin t$, получаем:

$$I_x = \frac{R^4}{2}\arcsin\frac{h}{R} + \frac{h}{R}\left(2h^2 - R^2\right)\sqrt{R^2 - h^2}. \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти координаты центра тяжести той части астроиды (рисунок 16.16),

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \tag{16.10}$$

которая расположена в первом координатном углу.

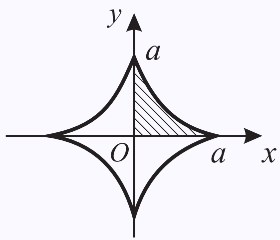


Рисунок 16.16 – Астроида

◀Из соображений симметрии заключаем, что $x_c = y_c$. Далее учтем, что длина четвертой части астроиды $l = \frac{3}{2}a$. Продифферинцировав выражение (16.10), получим:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0.$$

Откуда

$$y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad 1 + y'^2 = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}, \ \sqrt{1 + y'^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Поэтому

$$x_c = y_c = \frac{2}{3a}\int\limits_0^a x \cdot a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{3a}\int\limits_0^a x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{2}{5}a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a = \frac{2}{5}a. \ ▶$$

Задание 4. Найти декартовы координаты центра тяжести части кардиоиды $r = a\,(1+\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ (рисунок 16.17).

◀Выберем оси координат, как указано на рисунке. Тогда

$$x = r\cos\varphi = a\,(1+\cos\varphi)\cos\varphi,\;\; x = r\sin\varphi = a\,(1+\cos\varphi)\sin\varphi.$$

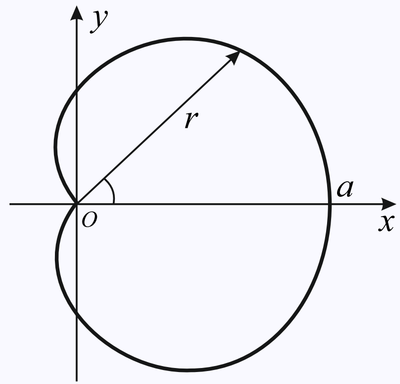


Рисунок 16.17

Мы получили уравнение кардиоиды в параметрической форме, где параметром служит переменная φ. При изменении параметра φ от 0 до π точка (x, y) опишет верхнюю часть кривой.

Учтем, что длина всей кардиоиды равна $8a$, поэтому $x_c = \frac{1}{l}\int\limits_0^\pi y\,dl = \frac{1}{4a}\int\limits_0^\pi a\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)\,dl$.

Но для кардиоиды $dl = 2a\cos\frac{\varphi}{2}$. Следовательно, $x_c = \frac{1}{4a}\int\limits_0^\pi a\sin\varphi\,(1+\cos\varphi)\,2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{4}{5}a$.

Аналогично получаем: $y_c = \frac{4}{5}a$. Итак, $x_c = y_c = \frac{4}{5}a$ ▶ .

Задание 5. Найти координаты центра тяжести фигуры, заданной неравенствами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \; x \geqslant 0, \; y \geqslant 0.$$

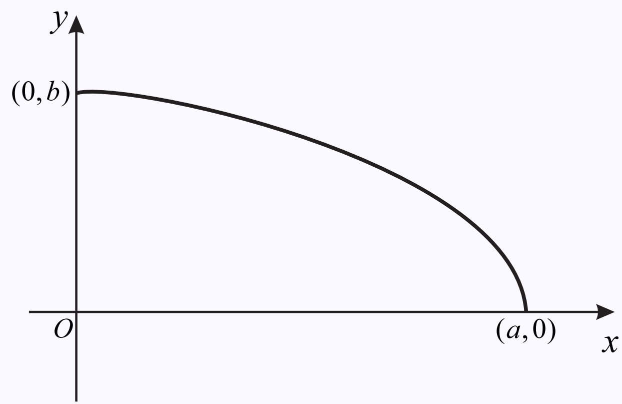


Рисунок 16.18

◀Координаты (x_c, y_c) центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx, \tag{16.11}$$

где S – площадь криволинейной трапеции, по которой равномерно распределена масса постоянной плотности γ.

Площадь четверти фигуры, ограниченной эллипсом, равна $\frac{\pi ab}{4}$; остается вычислить интегралы $\int\limits_0^a xydx$ и $\int\limits_0^a y^2dx$:

$$\int\limits_0^a xydx = \frac{b}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2b}{3}.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Далее,

$$\int\limits_0^a y^2dx = \frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a \left(a^2-x^2\right)dx = \frac{2ab^2}{3},$$

поэтому

$$y_c = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{\pi ab}{2}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

Итак, центр тяжести рассматриваемой фигуры находится в точке $M\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$. ►

Задание 6. Пользуясь второй теоремой Паппа-Гульдина (теорема 16.2), вычислить объем тора, образованного вращением вокруг оси Ox круга $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $a < b$ (рисунок 16.19).

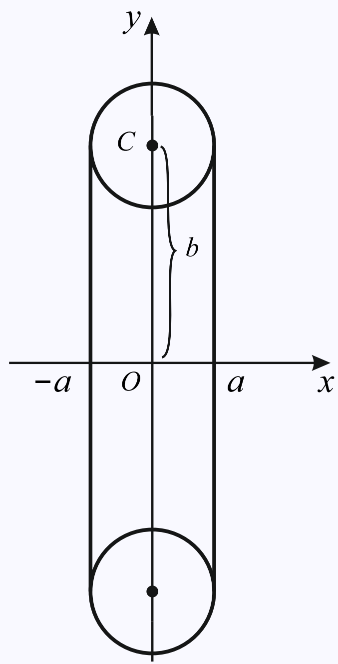


Рисунок 16.19

◄Площадь данного круга $S = \pi a^2$, центр тяжести круга совпадает с его центром, и, следовательно, путь, описываемый центром тяжести круга при вращении его вокруг оси Ox, равен $2\pi b$. Тогда, по второй теореме Паппа-Гульдина, искомый объем равен:

$$V = \pi a^2 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b \text{ (куб. ед.)}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Пользуясь первой теоремой Паппа-Гульдина (теорема 16.1), найти площадь поверхности тора, рассмотренного в предыдущей задаче.

◀Длина l данной окружности равна $2\pi a$. Центр тяжести окружности, очевидно, совпадает с ее центром. Следовательно, длина пути, описываемого центром тяжести равна $2\pi b$:

$$S = 2\pi b \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ab \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleright$$

Задание 8. Найти центр тяжести ветви циклоиды (рисунок 13.15)

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$$

плотность $\gamma = 1$, $a > 0$.

$$\blacktriangleleft\ x_c = \pi a,\ y_c \cdot m_L = M_x,\ y_c = \frac{\int\limits_0^{2\pi} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt}{\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt} =$$

$$= \left[\sqrt{(a(1-\cos t))^2 + a^2\cos^2 t} = a\sqrt{2(1-\cos t)} = 2a\sin\frac{t}{2}\right] =$$

$$= \frac{4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt}{2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt} = 2a\frac{-2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2}}{-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}} =$$

$$= 2a\frac{\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}}{-2} = -a\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}a. \blacktriangleright$$

Задание 9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом, окружностью и прямой, заданных соответственно уравнениями $x^2+4y^2=4$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, и расположенной в первой координатной четверти (рисунок 16.20).

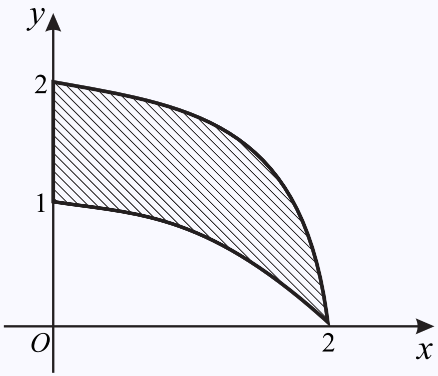


Рисунок 16.20

$$◀\ y_c=\frac{M_x}{m},\ x_c=\frac{M_y}{m},\ m=\frac{1}{4}\pi 2^2-\frac{1}{4}\pi 2\cdot 1=\frac{\pi}{2},$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(4-x^2-\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(3-\frac{3}{4}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(3x-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(3\cdot 2-\frac{8}{4}\right)=2,$$

$$M_y=\int\limits_0^2 x\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx=\int\limits_0^2-\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right)+\int\limits_0^2 2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 + 2\cdot\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3},$$

$$y_c = \frac{2}{\frac{2}{\pi}} = \frac{4}{\pi},\ x_c = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3\pi}. \blacktriangleright$$

Задание 10. Пользуясь первой теоремой Паппа-Гульдина (теорема 16.1), найти центр тяжести полуокружности радиуса a (рисунок 16.21).

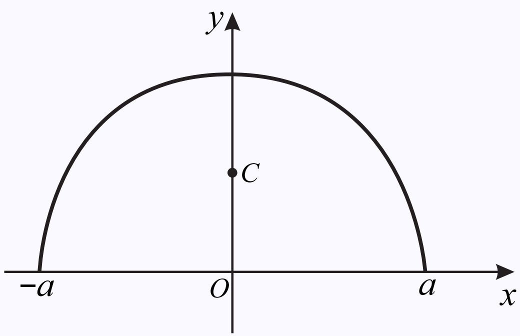


Рисунок 16.21

$$\blacktriangleleft\ x_c = 0,\ 2\pi y_c\cdot\pi a = S_{\text{пов. вр.}},\ 2\pi y_c\cdot\pi a = 4\pi a^2,$$

$$y_c = \frac{4\pi a^2}{2\pi\cdot\pi a} = \frac{2a}{\pi},\quad C\left(0, \frac{2a}{\pi}\right). \blacktriangleright$$

Задание 11. Найти статические моменты относительно координатных осей M_x и M_y кривой $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$ (рисунок 16.22).

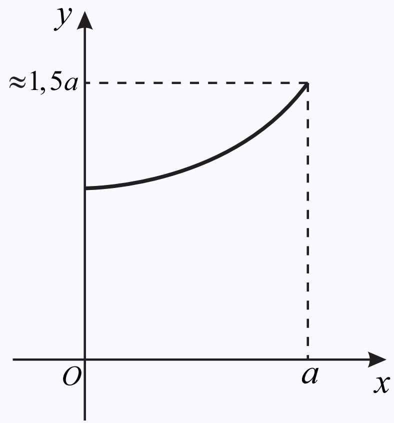


Рисунок 16.22

$$◀\ M_x = \int_0^a a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}+1}dx = a\int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = a\int_0^a \operatorname{ch}^2\frac{x}{a}dx = \left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}\right)\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^a\left(\operatorname{ch}\left(2\frac{x}{a}\right)+1\right)dx = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sh}\left(2\frac{x}{a}\right)+x\right)\Big|_0^a = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\operatorname{sh}2+a\right) = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{sh}2+2\right).$$

$$M_y = \int_0^a x\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}+1}dx = \int_0^a x\operatorname{ch}\frac{x}{a}dx = \begin{bmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \operatorname{ch}\frac{x}{a}dx; & v = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} \end{bmatrix} = a^2\operatorname{sh}1 - a^2\operatorname{ch}\frac{x}{a}\Big|_0^a = a^2\left(e^{-1}+1\right).\ ▶$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.
2. Найти статические моменты части параболы $y^2=2$ $(y>0)$ относительно осей Ox и Oy от $x=0$ до $x=2$.
3. Найти статический момент относительно оси Ox косинусоиды $y=\cos$ от точки $x=-\frac{\pi}{2}$ до точки $x=\frac{\pi}{2}$.
4. Вычислить момент инерции квадрата со стороной a относительно диагонали.
5. Вычислить момент инерции правильной шестиугольной пластинки со стороной a относительно ее оси симметрии, проходящей через противоположные вершины.
6. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.
7. Найти статические моменты относительно осей координат отрезка прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, заключенного между осями координат.
8. Найти статический момент относительно осей координат части астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первом квадранте.
9. Найти статический момент относительно оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{1+x^2}$ и $y=x^2$.
10. Найти момент инерции дуги окружности радиуса a, соответствующей центральному углу φ.
11. Найти момент инерции прямого параболического сегмента с основанием $2b$ и высотой h относительно его оси симметрии.
12. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей.
13. Показать, что статический момент всякой фигуры, имеющей ось симметрии, относительно этой оси равен нулю.

14. Найти центр тяжести части кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, содержащейся между точками, для которых $y = 1$ и $y = 2$.
15. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса a, стягивающей угол 2α.
16. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(x > 0)$.
17. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $x^2x + 4y - 16 = 0$ и осью Ox.
18. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{2}{\pi}x$ и синусоидой $y = \sin x$ при $x > 0$.
19. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,. \end{cases}$$

20. Найти координаты центра тяжести сектора, ограниченного одним полувитком архимедовой спирали $r = a\varphi$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.
21. Найти координаты центра тяжести части логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$.
22. Пользуясь теоремой Паппа-Гульдина, найти центр тяжести полуокружности радиуса a.
23. Найти площадь поверхности, образованной вращением фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox, вокруг касательной к вершине циклоиды.
24. Вычислить по теореме Паппа-Гульдина объем и боковую поверхность прямого конуса с высотой H и радиусом основания r.
25. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из сторон. Найти объем тела, которое при этом получается.
26. Ответьте на вопросы теста.

ЛЕКЦИЯ 17
Несобственные интегралы

17.1 Понятие несобственного интеграла

Определенный интеграл Римана, во-первых, рассматривался нами на конечном отрезке, во-вторых, подынтегральная функция на этом отрезке должна быть ограниченной. При решении многих задач физики, техники и т.д. приходится соприкасаться с необходимостью расширения понятия интеграла Римана как в плане рассмотрения интеграла на неограниченных промежутках, так и интегралов от неограниченных функций. В результате мы приходим к понятию несобственного интеграла.

Определение 17.1. *Пусть функция $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b < \omega$.*

Если существует $\lim\limits_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)dx$, то функция f называется ***интегрируемой в несобственном смысле*** *на промежутке $[a, \omega)$, а указанный предел называется* ***несобственным интегралом*** *функции f на промежутке $[a, \omega)$ и обозначается*

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx. \tag{17.1}$$

Замечание 17.1. Если $\lim\limits_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)dx$ не существует, то все равно (17.1) называют несобственным интегралом, однако при этом говорят, что несобственным интеграл (17.1) является **расходящимся**.

Если же указанный предел существует, то несобственный интеграл называется **сходящимся**.

Пример 17.1. Вычислите $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ или установите его расходимость.

◀Имеем дело с несобственным интегралом на бесконечном промежутке интегрирования. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится.▶

Пример 17.2. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ a>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

◀Если $\alpha\neq 1$, то

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^{b}x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)=$$
$$=\begin{cases}\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{где } \alpha>1,\\ +\infty, & \text{где } \alpha<1.\end{cases}$$

Если $\alpha=1$, то

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to=\infty}\int\limits_a^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty.$$

Значит, при $\alpha>1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R},\ a>0)$ сходится, а при $\alpha\leqslant 1$ расходится.▶

Замечание 17.2. Если $\omega < +\infty$ и функция f интегрируема на $[a, \omega]$ в обычном понимании интеграла, то она интегрируема на $[a, \omega)$ и в смысле несобственного интеграла, причем оба интеграла для нее совпадают. Это следует из того, что интегрируемая функция ограничена, поэтому

$$\left| \int\limits_b^\omega f(x)dx \right| \leqslant M(\omega - b) \to 0$$

при $b \to \omega - 0$. Поэтому определение 17.1 при $\omega < +\infty$ содержательно лишь в случае, когда функция f не ограничена в любой окрестности точки $x = \omega$, то есть на любом интервале $(\omega - \varepsilon, \omega)$. Это связано с тем, что всякая функция, интегрируемая по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b < \omega \leqslant +\infty$, и ограниченная на полуинтервале $[a, \omega)$, является интегрируемой по Риману и на отрезке $[a, \omega]$ при любом ее доопределении в точке $x = \omega$. При этом интеграл Римана от таким образом доопределенной функции равен пределу

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_a^b f(x)dx$$

и тем самым не зависит от выбора дополнительного значения функции при $x = \omega$. В этом смысле интеграл Римана является частным случаем несобственного инеграла, и можно говорить об интеграле Римана по конечному полуинтервалу $[a, \omega)$ от функции, заданной на этом промежутке. В силу сказанного, теория несобственных интегралов содержательна, то есть приводит к принципиально новым результатам лишь когда функция определена на бесконечном промежутке или конечном, причем в последнем случае она не ограничена.

Определение 17.2. *Пусть функция $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $a < b < +\infty$. Если $\omega = +\infty$ или функция f не ограничена в любой окрестности точки $\omega \in \mathbb{R}$, то $x = \omega$ называют* ***особой точкой****.*

Пример 17.3. Исследуйте на сходимость интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀Имеем дело с интегралом от неограниченной в любой окрестности точки $x = b$ функции $y = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ ($x = b$ – особая точка). Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}d(b-x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\alpha-1}\left(\varepsilon^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{-d(b-x)}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln(b-x)\right)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(b-a) - \ln\varepsilon\right) = +\infty.$$

Таким образом, при $\alpha \geqslant 1$ интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ расходится, а при $\alpha < 1$ сходится.▶

Замечание 17.3. Если функция $f : (\eta, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant \eta < b < +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset (\eta, b]$, то несобственный интеграл определяется по формуле

$$\int_\eta^b f(x)dx = \lim_{a\to\eta+0}\int_a^b f(x)dx. \tag{17.2}$$

При этом, если в любой окрестности точки $\eta \in \mathbb{R}$ функция f не ограничена или $\eta = -\infty$, то точку $x = \eta$ называют особой точкой.

Если же для функции $f : (\eta, \omega) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant \eta < < \omega \leqslant +\infty$, при некотором выборе точки $c \in (\eta, \omega)$ существуют несобственные интегралы $\int\limits_{\eta}^{c} f(x)dx$ (в смысле определения 17.1) и $\int\limits_{c}^{\omega} f(x)dx$ (в смысле определения 17.2), то, по определению, имеем:

$$\int\limits_{\eta}^{\omega} f(x)dx = \int\limits_{\eta}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\omega} f(x)dx. \tag{17.3}$$

При этом существование и значение интеграла $\int\limits_{\eta}^{\omega} f(x)dx$ не зависит от выбора точки $c \in (a, b)$. В самом деле, в рассматриваемом случае функция f, очевидно, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $\eta < a < b < \omega$, и равенство (17.3), в силу определений (17.1) и (17.2), равносильно следующему:

$$\int\limits_{\eta}^{\omega} f(x)dx = \lim_{a \to \eta + 0} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx,$$

причем переменные a и b стремятся соответственно к η и ω независимо друг от друга.

Если хотя бы один из интегралов $\lim\limits_{a \to \eta + 0} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx$ или $\lim\limits_{b \to \omega - 0} \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$ расходится, то говорят, что и интеграл $\int\limits_{\eta}^{\omega} f(x)dx$ также **расходится**.

Замечание 17.4. Теперь можно определить общее понятие несобственного интеграла от функции f по промежутку с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Множество $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$, называется **правильным разбиением промежутка** относительно функции f, если выполняются следующие условия:

1) $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_k < b$ (если $a = -\infty$, то $x_0 = -\infty$, а если $b = +\infty$, то $x_k = +\infty$),

2) функция f интегрируема по Риману на любом отрезке, лежащем в рассматриваемом промежутке и не содержащем точек множества X.

На каждом из промежутков $[a, x_0]$, $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1,k})$, $[x_k, b]$ имеет смысл рассматривать несобственный интеграл.

Если все интегралы

$$\int_a^{x_0} f(x)dx, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \ (i = \overline{1,k}), \quad \int_{x_k}^{b} f(x)dx,$$

сходятся, то можно найти интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Он определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \int_{x_k}^{b} f(x)dx \tag{17.4}$$

и называется **сходящимся** интегралом.

Если хотя бы один из интегралов в (17.4) расходится, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **расходится**.

Очевидно, что определенный таким образом интеграл по отрезку может оказаться интегралом Римана в том и только том случае, когда у этого отрезка имеется пустое правильное разбиение относительно интегрируемой функции.

Пример 17.4. Вычислите $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

◄ $x=0$ – особая точка (в любой окрестности точки $x=0$ функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ является неограниченной).

$$\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\delta\to-0}\int\limits_{-1}^{\delta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}\left(\lim_{\delta\to-0}\left(\sqrt[3]{\delta^2}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right).$$ ►

Определение 17.3. *Если в несобственном интеграле* $\int\limits_{a}^{\omega}f(x)dx$ *промежуток интегрирования является бесконечным, а других, кроме бесконечных, особых точек на этом промежутке функция* f *не имеет, то* $\int\limits_{a}^{\omega}f(x)dx$ *называется* ***несобственным интегралом первого рода****. Если промежуток интегрирования* $[a,\omega)$ *конечный (*ω *– особая точка), то несобственный интеграл* $\int\limits_{a}^{\omega}f(x)dx$ *называется* ***несобственным интегралом второго рода****.*

17.2 Геометрический смысл несобственного интеграла

Пусть $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}_+$, $-\infty<a<\omega\leqslant+\infty$, является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a,b]$, $a<b<+\infty$, ω – особая точка.

Определение 17.4. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_{a}^{\omega}f(x)dx$ *сходится, то множество*

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a\leqslant x<\omega,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\right\}$$

называется ***квадрируемым****, а число* $S=\int\limits_{a}^{\omega}f(x)dx$ *называется* ***площадью*** *множества* X.

Аналогично можно ввести понятия площади других неограниченных множеств, а также объема множества, получаемого при вращении неограниченного множества на плоскости плоскости вокруг координатной оси и т.п.

Пример 17.5. *Найти площадь множества*

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\infty < x < +\infty, \ 0 \leqslant y \leqslant \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, \ a > 0\right\}.$$

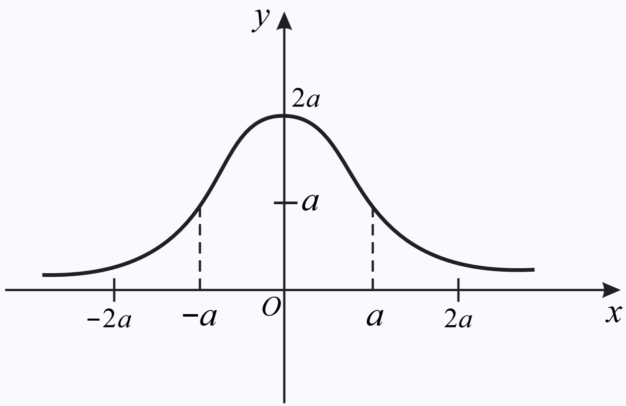


Рисунок 17.1

◀ $S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 2 \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{0}^{A} \frac{8a^3 dx}{x^2 + 4a^2} = 4\pi a^2$ (кв. ед.). ▶

17.3 Основные свойства несобственных интегралов

Класс функций, интегрируемых в несобственном смысле на промежутке $[a,\omega)$, (ω – особая точка), будем обозначать $R_*\left([a,\omega)\right)$.

1. Свойство линейности

Если $f,g\in R_*\left([a,\omega)\right)$, α и β – любые действительные константы, то функция $\alpha f+\beta g\in R_*\left([a,\omega)\right)$ и справедлива формула $\int\limits_a^\omega(\alpha f(x)+\beta f(x))dx=\alpha\int\limits_a^\omega f(x)dx+\beta\int\limits_a^\omega g(x)dx$.

◀Для доказательства используется определение несобственного интеграла и свойство линейности для интеграла Римана.▶

2. Свойство аддитивности

Если $f\in R_*\left([a,\omega)\right)$ и c – любая точка из указанного промежутка, то существует в несобственном смысле интеграл $\int\limits_c^\omega f(x)dx$, и справедлива формула $\int\limits_a^\omega f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^\omega f(x)dx$.

◀Для любых $b,c\in[a,\omega)$ $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$, где все определенные интегралы существуют (свойство аддитивности для интеграла Римана). Тогда существует

$$\lim_{b\to\omega-0}\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{b\to\omega-0}\left(\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^c f(x)dx\right)=\lim_{b\to\omega-0}\int\limits_a^b f(x)dx-\int\limits_a^c f(x)dx=\int\limits_a^\omega f(x)dx-\int\limits_a^c f(x)dx.$$

Откуда

$$\int\limits_c^\omega f(x)dx=\int\limits_a^\omega f(x)dx-\int\limits_a^c f(x)dx \text{ и } \int\limits_a^\omega f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^\omega f(x)dx. \blacktriangleright$$

3. Формула Ньютона – Лейбница

Если F – любая первообразная функции f на промежутке $[a,\omega)$ (F может быть и обобщенной первообразной), ω – единственная особая точка функции f на промежутке $[a,\omega)$, то

$$\int_a^\omega f(x)dx = F(\omega) - F(a) = \begin{cases} F(\omega-0) - F(a), & \omega \in \mathbb{R}, \\ F(+\infty) - F(a), & \omega = +\infty. \end{cases}$$

◀Возьмем любое $b \in [a,\omega)$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{17.5}$$

(из условия следует, что для любого $b \in [a,\omega)$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$). В равенстве (17.5) переходим к пределу при $b \to \omega - 0$ и получаем справедливость заключения свойства.▶

4. Теорема о подстановке

Если $f \in C([a,\omega))$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta))$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, $a = \varphi(\alpha) \leqslant \varphi(t) < \omega = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$ для $\alpha \leqslant t < \beta$, $E(\varphi) = [a,\omega)$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$, причем несобственные интегралы в обеих частях последнего равенства одновременно сходятся или расходятся.

◀Берем любую точку $\gamma \in [\alpha,\beta)$, которой соответствует точка $b = \varphi(\gamma) \in [a,\omega)$. По теореме о подстановке для определенного интеграла (теорема 11.4): $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. В правой и левой частях последнего равенства переходим к пределам соответственно при $b \to \omega - 0$ и $\gamma \to \beta - 0$. Получим справедливость нашего утверждения.▶

5. Теорема об интегрировании по частям

Если $u, v \in C^1([a,\omega))$, то справедлива формула интегрирования по частям для несобственных интегралов

$$\int\limits_a^\omega u dv = uv\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega v du, \tag{17.6}$$

причем несобственные интегралы в обеих частях формулы (17.6) одновременно сходятся либо расходятся; при сходимости указанных несобственных интегралов будет существовать и

$$uv\Big|_a^\omega = \lim_{b\to\omega-0} u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

◀Возьмем любую точку $b \in [a,\omega)$. Тогда будет справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

В этом равенстве переходим к пределу при $b \to \omega - 0$ и получаем справедливость заключения теоремы об интегрировании по частям для несобственного интеграла.▶

6. Интегрирование неравенств

Если несобственные интегралы $\int\limits_a^\omega f(x)dx$, $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ (ω – единственная особая точка) сходятся, и для любых $x \in [a,\omega)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^\omega f(x)dx \leqslant \int\limits_a^\omega g(x)dx$.

◀Возьмем любое $b \in [a,\omega)$, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx$. В последнем неравенстве переходим к пределу при $b \to \omega - 0$ и получаем справедливость заключения свойства.▶

Замечание 17.5. Не все свойства интегралов Римана автоматически переносятся на несобственные интегралы.

Например, если $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$, то несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а несобственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ будет расходящимся, что не отвечает условию об интегрируемости произведения для интеграла Римана.

Пример 17.6. Вычислите $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

$$◀\ I = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \left[\begin{array}{l} x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \\ x+\frac{1}{2} = t,\ t_{\text{н}} = -\infty,\ t_{\text{в}} = \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{4}{3}\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{4}+t^2-t^2}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}dt = \frac{4}{3}\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} -$$

$$-\frac{4}{3}\left[\begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \frac{tdt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}, & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} \end{array}\right]_{-\infty}^{0{,}5} = \frac{4}{3}\lim_{b\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_b^{0{,}5} +$$

$$+\frac{2}{3}\lim_{b\to-\infty}\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\Bigg|_b^{0{,}5} - \frac{2}{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{b\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_b^{0{,}5} =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\lim_{b\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2b}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}\lim_{b\to-\infty}\left(\frac{0,5}{0,5^2+\frac{3}{4}} - \frac{b}{b^2+\frac{3}{4}}\right) =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4\pi 2}{3\cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{3}.\ ▶$$

17.4 Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Теорема 17.1. *Функция* $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$, *интегрируемая по Риману на любом отрезке* $[a, b] \subset [a, \omega)$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, *будет интегрируемой в несобственном смысле на промежутке* $[a, \omega)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $b \in [a, \omega)$, *что для любых* $b_1, b_2 \in (b, \omega)$ $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

$$◀ \int\limits_a^\omega f(x)dx = \lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b \to \omega - 0} F(b),$$

где $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Откуда видно, что теорема свелась к критерию Коши существования предела функции F в точке b. ▶

Замечание 17.6. Критерий Коши чаще используется в теоретических выкладках, а также при доказательстве расходимости несобственных интегралов, ведь согласно критерию Коши несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ (ω – особая точка) будет расходящимся, если существует $\varepsilon > 0$, что для любого $b \in [a, \omega)$ существуют такие $b_1, b_2 \in (b, \omega)$, что

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 17.7. Докажите расходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x)^\alpha} dx$ при $\alpha \leqslant 1$.

◀Возьмем любое $b \in [0, +\infty)$. Для нахождения указанных выше $\varepsilon > 0$ и $b_1, b_2 \in (b, \omega)$ оценим снизу $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} \frac{\cos^2 x}{(1+x)^\alpha} dx\right|$. Возьмем $b_1 = \pi n$, $b_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем:

$$\left|\int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\cos^2 x}{(1+x)^\alpha} dx\right| = \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\cos^2 x}{(1+x)^\alpha} dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\cos^2 x}{1+x} dx \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{\cos^2 x}{x} dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi n} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8\pi n} \int\limits_{\pi n}^{2\pi n} dx = \frac{1}{8\pi n}(2\pi n - \pi n) = \frac{1}{8}.$$

Значит, при $\alpha \leqslant 1$ данный интеграл расходится.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение несобственного интеграла.
2. Дайте определение сходящегося и расходящегося несобственного интеграла.
3. Сформулируйте основные свойства несобственных интегралов.
4. Сформулируйте критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

ЛЕКЦИЯ 18
Исследование сходимости несобственных интегралов

18.1 Несобственный интеграл от неотрицательных функций. Критерий сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций

Далее будем рассматривать несобственные интегралы вида $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ (ω – особая точка), где функция $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ принимает неотрицательные значения на промежутке $[a, \omega)$. Справедлив критерий.

Теорема 18.1. *Пусть функция $f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ принимает на промежутке $[a, \omega)$ неотрицательные значения и является интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$.*

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx \tag{18.1}$$

сходится тогда и только тогда, когда существует $M \in \mathbb{R}_+$, что для любого $b \in [a, \omega)$ $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M$, причем $\int\limits_a^\omega f(x)dx = \sup\limits_{a \leqslant b < \omega} \left\{ \int\limits_a^b f(x)dx \right\}$.

◀Рассмотрим функцию $\phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$, $b \in [a, \omega)$. Покажем, что функция ϕ неубывает на промежутке $[a, \omega)$. Берем любые $b_1, b_2 \in (a, \omega)$, $b_1 < b_2$. Оценим

$$\phi(b_2) - \phi(b_1) = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx \geqslant 0.$$

Если $\phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M$ – ограничена сверху, то (теорема о пределе монотонной функции [1, теорема 11.1]) существует

$$\lim_{b\to\omega-0} \phi(b) = \lim_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)dx = \sup_{a\leqslant b<\omega} \left\{ \int\limits_a^b f(x)dx \right\}.$$

Значит, несобственный интеграл (18.1) сходится.

Пусть теперь несобственный интеграл (18.1) сходится. Тогда существует

$$\lim_{b\to\omega-0} \phi(b) = \lim_{b\to\omega-0} \int\limits_a^b f(x)dx = I \in \mathbb{R}.$$

Значит, существует такое $\delta > 0$, что на интервале $(\omega - \delta, \omega)$ функция ϕ будет ограничена. Возьмем любое $b \in (\omega - \delta, \omega)$, зафиксируем, тогда существует $\int\limits_a^b f(x)dx$ как интеграл Римана, а поэтому на отрезке $[a, b]$ функция ϕ ограничена, так как

$$0 \leqslant \phi(x) \leqslant \phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, функция ϕ – ограничена на промежутке $[a, \omega)$. ▶

18.2 Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения)

Теорема 18.2. *Если функции* $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ *принимают неотрицательные значения на промежутке* $[a, \omega)$ *и интегрируемы по Риману на любом отрезке из этого промежутка, существуют* $C \in \mathbb{R}_+$ *и* $\delta > 0$*, что для любых* $x \in (\omega - \delta, \omega)$ $f(x) \leqslant C \cdot g(x)$*, то:*

1) *из сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ *следует сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$*;*

2) *из расходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *следует расходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^\omega g(x)dx$.

◀Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ сходится. Докажем, что сходится и интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$. По теореме 18.1 (необходимое условие),

$$\exists\ M > 0\ \ \forall\ x \in (\omega - \delta, \omega)\ \ \int\limits_{\omega-\delta}^{\omega} g(x)dx \leqslant M.$$

Однако (по условию теоремы) на $(\omega - \delta, \omega)$ $f(x) \leqslant Cg(x)$, а значит,

$$\int\limits_{\omega-\delta}^{\omega} f(x)dx \leqslant C \int\limits_{\omega-\delta}^{\omega} g(x)dx \leqslant C \cdot M = D.$$

Тогда (теорема 18.1, достаточное условие) несобственный интеграл $\int\limits_{\omega-\delta}^{\omega} f(x)dx$ сходится. Но $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ существует как интеграл Римана, поэтому несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ будет сходящимся.

Далее, если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ – расходящийся, то и $\int\limits_{a}^{\omega} g(x)dx$ будет расходящимся, потому что в случае его сходимости был бы сходящимся и $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$.►

Теорема 18.3. *Если функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ принимают неотрицательные значения на промежутке $[a, \omega)$, причем для любого $x \in [a, \omega)$ $g(x) \neq 0$, а на каждом из отрезков $[a, b]$ указанного промежутка функции f и g интегрируемы и существует $\lim\limits_{x\to\omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, то несобственные интегралы $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{\omega} g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.*

◄ $\lim\limits_{x\to\omega-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0:$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ (\varepsilon < l)\ \ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x \in (\omega-\delta, \omega)\ \ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Из последнего неравенства и теоремы 18.2 следует справедливость заключений теоремы. Например, если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} g(x)dx$ расходится, то $g(x) < \frac{1}{l-\varepsilon} f(x)$ для любых $x \in (\omega-\delta, \omega)$. Значит (теорема 18.2), и несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ является расходящимся.►

Следствие 18.1. *Если выполняются условия теоремы 18.3, но $l=0$, то из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость и несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ – расходимость $\int\limits_a^\omega g(x)dx$.*

$$\blacktriangleleft \lim_{x\to\omega-0}\frac{f(x)}{g(x)}=0: \quad \forall\, \varepsilon>0 \ \exists\, \delta>0 \ \forall x\in(\omega-\delta,\omega) \quad -\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует неравенство $f(x)<\varepsilon\cdot g(x)$ для всех $x\in(\omega-\delta,\omega)$. Справедливость заключения теоремы следует из теоремы 18.2.$\blacktriangleright$

Замечание 18.1. Использование теорем 18.2 и 18.3 при исследовании несобственных интегралов на сходимость будет эффективным при наличии набора несобственных интегралов (эталонов с параметрами), сходимость (расходимость) которых известна. Например:

1) $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ сходятся при $\alpha<1$ и расходятся при $\alpha\geqslant 1$;

2) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha>0$ – сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

Пример 18.1. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

$$\blacktriangleleft \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}=I_1+I_2.$$

Интеграл I_1 – интеграл Римана от непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$, а значит, он сходится.

Для исследования сходимости несобственного интеграла I_2 используем теорему 18.3:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}}{\frac{1}{x^{1,5}}}=1>0,$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1,5}}$ сходится, значит, и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}dx$ сходится.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}}$ сходится.▶

Пример 18.2. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\ln x}$.

◀Очевидно, что $\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x}$ для любых $x\in[2,+\infty)$. Но несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x}$ $(\alpha=1)$ расходится, поэтому (теорема 18.2) будет расходиться и наш интеграл.▶

Пример 18.3. Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

◀Для $x\geqslant 1$ будет $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$, но

$$\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^{+\infty}=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$$

сходящийся, поэтому и данный интеграл сходящийся.▶

18.3 Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Определение 18.1. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится интеграл* $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$.

Теорема 18.4. *Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.*

◀Пусть $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ – несобственный интеграл (ω – особая точка), $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$ сходится, тогда (теорема 17.1, необходимое условие)

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ b \in [a, \omega)\ \ \forall\ b_1, b_2 \in (b, \omega)\ \ \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx < \varepsilon.$$

Но

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx,$$

а значит (теорема 17.1, достаточное условие), несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится.▶

Определение 18.2. *Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то он называется* ***условно сходящимся****.*

Пример 18.4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$◀ \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\begin{matrix} u = \frac{1}{x}, & du = -\frac{1}{x^2} dx, \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right] = - \left. \frac{\cos x}{x} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos b}{b} \right) - I = -I, \;\; I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Но несобственный интеграл I является абсолютно сходящимся $\left(\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \right)$, а значит, и сходящимся. Таким образом, данный интеграл сходящийся.

Далее исследуем на сходимость интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$, $b > \frac{\pi}{2}$, $b \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Переходя к пределу при $b \to +\infty$ в последнем неравенстве, получим:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – расходится, а интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}dx$ – сходится (доказательство проводится (как и выше) интегрированием по частям).

Значит, несобственный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ будет расходящимся.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ сходится условно.►

18.4 Признаки Дирихле и Абеля условной сходимости несобственных интегралов

Теорема 18.5 (признак Дирихле). *Если функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$, функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, \omega)$, а функция g монотонно стремится к нулю при $x \to \omega - 0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x) \cdot g(x)dx$ – сходится.*

◄Доказательство теоремы проводится с использованием второй теоремы о среднем значении для определенного интеграла (теорема 12.1) и критерия Коши сходимости несобственных интегралов (теорема 17.1).►

Теорема 18.6 (признак Абеля). *Если функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$, функция g монотонна и ограничена на $[a, \omega)$, а несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x) \cdot g(x)dx$.*

◄Доказательство теоремы 18.6 аналогично доказательству теоремы 18.5.►

Пример 18.5. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha \sin\frac{\pi}{1-x}dx, \ \ \alpha > -2.$$

$$\blacktriangleleft \ \left|(1-x)^\alpha \sin\frac{\pi}{1-x}\right| \leqslant (1-x)^\alpha.$$

В силу того, что несобственный интеграл $\int_0^1 (1-x)^\alpha dx$ является сходящимся при $\alpha > -1$, данный интеграл сходится абсолютно при $\alpha > -1$ (теорема 18.2).

Если $-2 < \alpha \leqslant -1$, то

$$\frac{\left|\sin\frac{\pi}{1-x}\right|}{(1-x)^{-\alpha}} \geqslant \frac{\sin^2\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^{-\alpha}} = \frac{1-\cos\frac{2\pi}{1-x}}{2(1-x)^{-\alpha}}.$$

Но интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{-\alpha}}$ при $-2 < \alpha \leqslant -1$ является расходящимся. Докажем, что интеграл

$$\int_0^1 \left(-\frac{\cos\frac{2\pi}{1-x}}{2(1-x)^{-\alpha}}\right)dx$$

сходится при $-2 < \alpha \leqslant -1$.

Представим подынтегральную функцию следующим образом:

$$-\frac{\cos\frac{2\pi}{1-x}}{2(1-x)^{-\alpha}} = \cos\frac{2\pi}{1-x}\cdot 2\pi\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{-1(1-x)^{2+\alpha}}{4\pi}.$$

Используем признак Дирихле.

Функция $f(x) = 2\pi\frac{1}{(1-x)^2}\cos\frac{2\pi}{1-x}$ имеет ограниченную на отрезке $[0,1)$ первообразную $F(x) = \sin\frac{2\pi}{1-x}$ $(F'(x) = f(x))$.

Функция $g(x) = \frac{-(1-x)^{2+\alpha}}{4\pi}$ монотонно стремится к нулю при $x \to 1-0$. Другие условия признака Дирихле также, очевидно, выполняются.

Значит, несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^{-\alpha}}dx$ при $-2 < \alpha \leqslant -1$ будет расходящимся, а поэтому (теорема 18.2) и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\left|\sin\frac{\pi}{1-x}\right|}{(1-x)^{-\alpha}}dx$ – расходящийся.

Далее доказывается (аналогично, как и для интеграла $\int\limits_0^1 \left(-\frac{\cos\frac{2\pi}{1-x}}{2(1-x)^{-\alpha}}\right)dx$), что при $-2 < \alpha \leqslant -1$ несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2\frac{\pi}{1-x}}{(1-x)^{-\alpha}}dx$ сходится.

Таким образом, при $\alpha > -1$ интеграл сходится абсолютно, а при $-2 < \alpha \leqslant -1$ условно.▶

18.5 Главное значение несобственного интеграла

Определение 18.3. *Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Говорят, что функция f интегрируема по Коши, если существует предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$. Этот предел называется **главным значением несобственного интеграла** от функции f (в смысле Коши) и обозначается*

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Замечание 18.2. Если несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то функция f интегрируема и по Коши, а соответствующие пределы совпадают:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{0} f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{o}^{B} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

Но и при расходимости указанного несобственного интеграла он может сходиться по Коши. Например:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx - \text{ расходится, но } V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

Теорема 18.7. *Если нечетная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, то она интегрируема по Коши, и главное значение интеграла от нее равно нулю.*

$$◀ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\int\limits_{-A}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{A} f(x)dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{для интеграла } \int\limits_{-A}^{0} f(x)dx \text{ делаем замену переменной } x=-t,\\ dx=-dt,\ f(-t)=-f(t),\ t_{\text{н}}=A,\ t_{\text{в}}=0\end{array}\right] = \lim_{A\to+\infty}\left(-\int\limits_{A}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{A} f(x)dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{в первом интеграле делаем}\\ \text{замену переменной } t=x\end{array}\right] = \lim_{A\to+\infty}\left(-\int\limits_{0}^{A} f(x)dx + \int\limits_{0}^{A} f(x)dx\right) = 0. ▶$$

Теорема 18.8. *Четная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет интегрируемой по Коши тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$.*

◀Для доказательства теоремы используем равенство, справедливое для четных функций:

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)dx,$$

и переходим в последнем равенстве к пределу при $A \to +\infty$.▶

Замечание 18.3. Понятие интегрируемости по Коши вводится и для несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$, если особая точка $\omega \in (a, b)$.

Определение 18.4. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, кроме, может быть, точки $\omega \in (a, b)$, и интегрируема по Риману на любых отрезках из промежутков $[a, \omega)$ и $(\omega, b]$. Будем говорить, что функция f* ***интегрируема по Коши*** *на $[a, b]$, если существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right) = V.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \quad (\varepsilon > 0),$$

который называется ***главным значением интеграла в смысле Коши****.*

Пример 18.6. Вычислить $V.p.\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-4}$.

$$\blacktriangleleft\ V.p.\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4} + \int\limits_{2+\varepsilon}^{3}\frac{dx}{x^2-4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_0^{2-\varepsilon} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg|_{2+\varepsilon}^{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left|\frac{-\varepsilon}{4-\varepsilon}\right| + \ln\left|\frac{1}{5}\right| - \ln\left|\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon - \ln(4-\varepsilon) - \ln 5 - \ln\varepsilon + \ln(4+\varepsilon)) = -\frac{1}{4}\ln 5.\ \blacktriangleright$$

Замечание 18.4. Отметим, что несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^2-4}$ расходится.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте критерий сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.
2. Сформулируйте признак сравнения сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций в форме неравенств.
3. Сформулируйте признак сравнения сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций в предельной форме.
4. Дайте понятие абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла.
5. Сформулируйте признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.
6. Сформулируйте признак Абеля сходимости несобственных интегралов.
7. Дайте понятие главного значения несобственного интеграла.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

Несобственные интегралы первого рода

Задание 1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

◀По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^b\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx.$$

◀ $\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} x\sin x dx$. Применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = x$, $du = dx$, $dv = \sin x dx$, $v = -\cos x$. Получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} x\sin x dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} x\sin x dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-x\cos x\Big|_0^b + \int\limits_0^{b}\cos x dx\right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-b\cos b + \sin b\right].$$

Этот предел не существует, следовательно, интеграл расходится.▶

Задание 3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx$.

◀Положив $\operatorname{tg} x = t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, получим:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = -\frac{1}{3} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{1+t^3} \Bigg|_0^b \right] = \frac{1}{3}. ▶$$

Задание 4. Найти объем множества, ограниченного поверхностью, образованной вращением графика функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

вокруг оси абсцисс.

$$◀\ V = \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 dx = \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi^2 \text{ (куб. ед.). } ▶$$

Задание 5. Найти длину той части логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$, которая заключена внутри окружности $r = 1$ (задача Торричелли[1]).

◀Внутри окружности $r = 1$ лежат точки логарифмической спирали, соответствующие изменению полярного угла от $-\infty$ до 0; если $\varphi \to -\infty$, то при этом радиус-вектор r спирали будет неограниченно уменьшаться до нуля, и точки спирали будут неограниченно приближаться к полюсу.

Искомая длина выразится следующим несобственным интегралом:

$$l = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int\limits_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2a\varphi} + a^2 e^{2a\varphi}} d\varphi = \sqrt{1+a^2} \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{a} e^{a\varphi} \Big|_A^0 = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \text{ (ед. дл.). } ▶$$

---

[1] Эванджелиста Торричелли (1608–1647) – итальянский математик и физик.

Задание 6. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = +\infty$.

◀Искомая площадь поверхности вычисляется по формуле $S = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx$.

В нашем случае $S = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{1 + e^{-2x}}dx$.

Сделав подстановку $e^{-x} = t$, получим $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $-e^{-x}dx = dt$, откуда

$$S_x = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + t^2}dt = \pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \text{ (кв. ед.).} \blacktriangleright$$

Задание 7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = I$.

◀Функция $f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ непрерывна на $[0, +\infty)$, а значит, интегрируема на любом отрезке $[0, a]$ $(a > 0)$.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4 - x^2 + 1} = I_1 + I_2.$$

I_1 существует как интеграл Римана. Для исследования сходимости I_2 применим теорему сравнения 18.3: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ – сходящийся интеграл.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = 1,$$

значит, I – сходится.▶

Кафедра МАДУП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Приложение

Закрыть

Задание 8. Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственный интеграл:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx.$$

◀Исследуем интеграл на абсолютную сходимость:

$$I^* = \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\right| dx \geqslant \int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x+100} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx = \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

$$I_1 = \int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{x+100}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x+100}.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+100}$ сходится как интеграл Римана; $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{x+100}dx$ расходится, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x+100}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} = 1$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ – расходится. Значит, интеграл I_1 расходится.

$$I_2 = \int\limits_0^{100} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx + \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx.$$

Интеграл $\int\limits_0^{100} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$ сходится как интеграл Римана. Покажем, что $\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$ сходится. Применим признак Дирихле (теорема 18.5).

1. Функция $f(x) = \cos 2x$ непрерывна на $[100, +\infty)$, а значит, интегрируема на каждом конечном отрезке из этого промежутка.

Первообразная

$$F(b) = \int\limits_{100}^{b} f(x)dx = \int\limits_{100}^{b} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{100}^{b} = \frac{1}{2}(\sin 2b - \sin 200)$$

ограничена на $[100, +\infty)$:

$$|F(b)| = \frac{1}{2}|\sin 2b - \sin 200| < 1 \quad \forall\, b \in [100, +\infty).$$

2. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$, $g'(x) = \frac{100-x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} \leqslant 0$ на $[100, +\infty)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} = 0$. Значит, g монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Таким образом, $\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$ сходится по теореме 18.5.

Значит, I_2 – сходится. Тогда I^* – расходится, то есть I не является абсолютно сходящимся.

Исследуем интеграл на условную сходимость.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx = \int\limits_{0}^{100} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx + \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx.$$

$\int\limits_{0}^{100} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ – сходится как интеграл Римана. $\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ сходится по признаку Дирихле (доказательство аналогично приведенному выше).

Таким образом, интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ сходится условно.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить несобственные интегралы:

1.1 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$;

1.2 $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$;

1.3 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

1.4 $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

1.5 $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}dx$;

1.6 $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

1.7 $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;

1.8 $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

1.9 $\int\limits_0^\infty x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$.

2. Доказать, что следующие интегралы расходятся:

2.1 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2.2 $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$;

2.3 $\int\limits_1^\infty x\cos x dx$;

2.4 $\int\limits_0^\infty x^2\cos x dx$;

2.5 $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{x^2-1}$;

2.6 $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$;

2.7 $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{x^3+x+1}$;

2.8 $\int\limits_0^\infty x^{2\pi-1}e^{2x}dx$.

3. Исследовать следующие интегралы на сходимость:

3.1 $\int\limits_0^\infty \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}dx$;

3.2 $\int\limits_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$;

3.3 $\int\limits_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}dx$;

3.4 $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

4. Найти площадь области, заключенной между кривой $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, осью абсцисс и прямыми $x = \pm 1$.

5. Найти объем множества, ограниченного поверхностью, получаемой при вращении кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ вокруг оси абсцисс.

6. Найти площадь, содержащуюся между циссоидой $y = \frac{x^3}{2a-x}$ и ее асимптотой $x = 2a$.

7. Найти объем множества, ограниченного поверхностью, образованной вращением циссоиды $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ вокруг ее асимптоты $x = 2a$.

8. Найти объем множества, ограниченного поверхностью, получаемой при вращении кривой $y^2 = 2xe^{-2x}$ вокруг своей асимптоты.

9. Ответьте на вопросы теста.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

Несобственные интегралы второго рода

Задание 1. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

◀Преобразуем данный интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\int\limits_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}} dx + 2\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = 3I_1 + 2I_2.$$

Интеграл I_1 легко вычисляется при помощи формулы Ньютона – Лейбница (законность применения формулы Ньютона – Лейбница вытекает из непрерывности подынтегральной функции на промежутке интегрирования): $I_1 = \frac{3}{7}\, x^{\frac{7}{3}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{6}{7}$.

Интеграл I_2 является несобственным интегралом и его следует представить в виде суммы двух интегралов (ибо особая точка $x = 0$ лежит внутри промежутка интегрирования):

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \int\limits_{-1}^{0} x^{-\frac{2}{3}} dx + \int\limits_{0}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} \int\limits_{-1}^{\varepsilon_1} x^{-\frac{2}{3}} dx +$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_2}^{1} x^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to -0} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{-1}^{\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_{\varepsilon_2}^{1} = 3 + 3 = 6.$$

Итак, $I = 3I_1 + 2I_2 = 3 \cdot \frac{6}{7} + 2 \cdot 6 = 14\frac{4}{7}$. ▶

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

◀Подынтегральная функция не является ограниченной в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = I_1 + I_2.$$

Оба интеграла I_1 и I_2 несобственные.
По определению имеем:

$$I = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \left[\arcsin(2x-1)\Big|_{\varepsilon_1}^{\frac{1}{2}} \right] + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \left[\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_2} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to +0} [\arcsin 0 - \arcsin(2\varepsilon_1 - 1)] + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} [\arcsin(1 - 2\varepsilon_2) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \blacktriangleright$$

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

◀Первообразная подынтегральной функции $F(x) = \sqrt{x^2-1}$ непрерывна на отрезке $[1, 2]$. Поэтому здесь применима формула Ньютона – Лейбница:

$$I = \int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\Big|_1^2 = \sqrt{3}. \blacktriangleright$$

БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра МАДУП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Приложение
Закрыть

Задание 4. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$.

◀Преобразуем интеграл следующим образом:

$$I = \int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int\limits_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx - \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \underbrace{\int\limits_1^2 \sqrt{x-1}dx}_{I_1} - \underbrace{\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}}_{I_2}.$$

В интеграле I_1 подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[1, 2]$, поэтому его можно вычислять по формуле Ньютона – Лейбница:

$$I_1 = \int\limits_1^2 \sqrt{x-1}dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Интеграл I_2 несобственный, так как подынтегральная функция не является ограниченной в окрестности точки $x = 1$. По определению:

$$I_2 = \lim_{a\to 1+0} \int\limits_a^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{a\to 1+0} 2\sqrt{x-1}\Big|_a^2 = 2\left[\sqrt{2-1} - \lim_{a\to 1+0}\sqrt{a-1}\right] = 2.$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}. ▶$$

Задание 5. Исследуйте на сходимость несобственный интеграл $I=\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

◀Очевидно, что $x=1$ – особая точка (подынтегральная функция не является ограниченной в любой окрестности указанной точки).

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}+\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}=I_1+I_2.$$

$$I_1=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{b\to 1-0}\int\limits_0^b \frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{b\to 1-0}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2-1}{x-2+1}\right|\Bigg|_0^b=\frac{1}{2}\left(\lim_{b\to 1-0}\ln\left|\frac{b-3}{b-1}\right|-\ln 3\right)=+\infty.$$

Значит, интеграл I_1 расходится. Аналогично доказывается, что и интеграл I_2 также расходится. Согласно замечанию 17.4, интеграл I расходится.▶

Задание 6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

◀Используем подстановку:

$$\frac{1}{x}=t,\ x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{3x^2-2x-1}\Big|_{x=\frac{1}{t}}=\sqrt{3\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=\frac{\sqrt{-t^2-2t+3}}{t},\ t_{н}=1,\ t_{в}=\frac{1}{2},$$

$$I=\int\limits_1^{0,5}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{-t^2-2t+3}}{t}}=-\int\limits_1^{0,5}\frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}.$$

$$-t^2-2t+3=-\left(t^2+2t-3\right)=-\left(t^2+2t+1-4\right)=4-(t+1)^2.$$

$$I=-\int\limits_1^{0,5}\frac{d(t+1)}{\sqrt{4-(t+1)^2}}=\int\limits_{0,5}^1\frac{d(t+1)}{\sqrt{4-(t+1)^2}}=\lim_{b\to 1-0}\arcsin\frac{t+1}{2}\Bigg|_{0,5}^b=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$ ▶

Задание 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интеграл

$$\int\limits_{0}^{0,5} \frac{\cos^3(\ln x)}{x \ln x} dx. \tag{18.2}$$

◀Применим для исследования сходимости признак Дирихле (теорема 18.5).

Пусть $f(x) = \frac{\cos^3(\ln x)}{x}$. Покажем, что первообразная функции f ограничена на промежутке $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\left|\int\limits_{t}^{0,5} \frac{\cos^3(\ln x)}{x} dx\right| = \left|\int\limits_{t}^{0,5} \cos^2(\ln x) d\left(\sin(\ln x)\right)\right| = \left[\cos^2(\ln x) = 1 - \sin^2(\ln x)\right] =$$

$$= \left|\int\limits_{t}^{0,5} \left(1 - \sin^2(\ln x)\right) d \sin(\ln x)\right| = \left|\sin(\ln x)\Big|_{t}^{0,5} - \frac{1}{3}\sin^3(\ln x)\Big|_{t}^{0,5}\right| \leqslant 2\frac{2}{3}.$$

Пусть $g(x) = \frac{1}{\ln x}$. Покажем, что g монотонно стремится к нулю при $x \to +0$.

$$g'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} < 0 \text{ для } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad \lim_{x \to +0} g(x) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

Значит, по теореме 18.5 (признак Дирихле), интеграл (18.2) сходится.

Исследуем интеграл (18.2) на условную сходимость. Для этого исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_{0}^{0,5} \left|\frac{\cos^3(\ln x)}{x \ln x}\right| dx. \tag{18.3}$$

$$\left|\frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}\right| = \frac{|\cos(\ln x)|\cos^2(\ln x)}{-x\ln x} \geqslant \frac{\cos^2(\ln x)\cos^2(\ln x)}{-x\ln x} = -\frac{1}{x\ln x}\left(\frac{1+\cos(2\ln x)}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4x\ln x}\left(1+2\cos(2\ln x)+\frac{1+\cos(4\ln x)}{2}\right) = -\frac{3}{8x\ln x} - \frac{\cos(2\ln x)}{2x\ln x} - \frac{\cos(4\ln x)}{8x\ln x}.$$

Интеграл $-\int\limits_0^{0,5}\frac{3}{8x\ln x}dx$ расходится, $-\int\limits_0^{0,5}\frac{\cos(2\ln x)}{2x\ln x}dx$ сходится, $-\int\limits_0^{0,5}\frac{\cos(4\ln x)}{8x\ln x}dx$ сходится (покажите это самостоятельно), значит, интеграл 18.3 расходится, то есть интеграл (18.2) сходится условно.▶

Задание 8. Вычислить несобственный интеграл

$$I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

◀Интегрируя по частям (при $n \in \mathbb{N}$), имеем:

$$I_n = x(\ln x)^n\Big|_0^1 - n\int\limits_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx = -nI_{n-1},$$

так как $\lim\limits_{x\to+0} x(\ln x)^n = 0$. Это равенство легко получить, если применить n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} = -n\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x}} = \ldots = (-1)^{n+1}n!\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Заметив, что $I_0 = \int\limits_0^1 dx = 1$, получим $I_n = (-1)^n n!$. ▶

Задание 9. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ (интеграл Эйлера).

◄Сделав замену переменной $x = 2t$, получим:

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t \cdot \cos t)dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $t = \frac{\pi}{2} - y$, получим:

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)dt + 2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin y)dy = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)dt,$$

то есть $I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$, откуда $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. ►

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость:

1.1 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

1.2 $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;

1.3 $\int\limits_0^{-\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

1.4 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

1.5 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

1.6 $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

1.7 $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

1.8 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

1.9 $\int\limits_0^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

1.10 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$;

1.11 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$;

1.12 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$;

1.13 $\int\limits_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$;

1.14 $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p\ln^q x}$;

1.15 $\int\limits_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$.

2. Исследуйте интеграл на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при $m \in \mathbb{N}$ а) четном; б) нечетном.

3. Ответьте на вопросы теста.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1.
Вариант 2.
Вариант 3.
Вариант 4.
Вариант 5.
Вариант 6.
Вариант 7.
Вариант 8.
Вариант 9.
Вариант 10.
Вариант 11.
Вариант 12.
Вариант 13.
Вариант 14.
Вариант 15.

Итоговый тест по разделу «Определенные и несобственные интегралы»

Ответьте на вопросы теста.

Вопросы для подготовки к экзамену и зачету»

1. Понятие первообразной функции и ее основное свойство.
2. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных неопределенных интегралов (с доказательством всех формул таблицы).
4. Замена переменной в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Разложение рациональных дробей на элементарные.
7. Интегрирование элементарных рациональных дробей.
8. Интегрирование простейших иррациональных функций. Простейшие подстановки.
9. Интегрирование простейших иррациональных функций. Подстановки Эйлера.
10. Интегралы от дифференциальных биномов.
11. Интегрирование функций типа $R(\sin x, \cos x)$.
12. Интегрирование функций типа $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$.
13. Интегрирование функций типа $R(e^x)$.
14. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
15. Понятие определенного интеграла (интеграла Римана), его геометрический и механический смысл.
16. Необходимые условия интегрируемости функции на отрезке.
17. Нижние и верхние суммы Дарбу, их свойства.
18. Критерий интегрируемости функции на отрезке.
19. Об интегрируемости непрерывных на отрезке функций.
20. Об интегрируемости монотонных на отрезке функций.
21. Критерий Дарбу интегрируемости функции на отрезке.
22. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке.

23. Об интегрируемости на отрезке некоторых классов разрывных функций.
24. Основные свойства определенного интеграла, связанные с равенствами.
25. Основные свойства определенного интеграла, связанные с неравенствами.
26. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций.
27. Теоремы о среднем значении для определенного интеграла.
28. Интегральные неравенства Гельдера, Минковского, Коши – Буняковского.
29. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной у непрерывной на промежутке функции.
30. Формула Ньютона – Лейбница.
31. Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле.
32. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
33. Остаток формулы Тейлора в интегральной форме.
34. Понятие квадрируемости и площади плоской фигуры. Критерий квадрируемости плоских фигур.
35. Квадрируемость криволинейной трапеции.
36. Квадрируемость криволинейного сектора.
37. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной в параметрической форме.
38. Понятие кубируемости и объема тел. Критерий кубируемости тел.
39. Площадь поверхности вращения.
40. Спрямляемые кривые. Длина спрямляемой кривой.
41. Масса материальной кривой. Статичные моменты и центр тяжести материальной кривой. Первая теорема Паппа-Гульдина.
42. Масса материальной плоской фигуры. Статичные моменты и центр тяжести материальной плоской фигуры. Вторая теорема Паппа – Гульдина.

43. Понятие несобственного интеграла. Несобственные интегралы первого и второго рода.
44. Основные свойства несобственных интегралов.
45. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
46. Критерий сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.
47. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения).
48. Понятия абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов. Теорема о сходимости абсолютно сходящихся несобственных интегралов.
49. Признаки Дирихле и Абеля условной сходимости несобственных интегралов.
50. Главное значение несобственного интеграла.

Задания для подготовки к экзамену и зачету

1. Найдите неопределенные интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$;

1.2. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$;

1.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

1.4. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$;

1.5. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$;

1.6. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

1.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$;

1.8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$;

1.9. $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$;

1.10. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$;

1.11. $\int x\ln(4+x^4)dx$;

1.12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.13. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx$;

1.14. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$;

1.15. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$;

1.16. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.17. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$;

1.18. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.19. $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$;

1.20. $\int \frac{x\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

1.21. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$;

1.22. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$;

1.23. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$;

1.24. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$;

1.25. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

1.26. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$;

1.27. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.28. $\int \frac{x^4\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$;

1.29. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{(1+x^2)^3}dx$;

1.30. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1-x^2)^2}dx$;

1.31. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx;$

1.32. $\int x(1+x^2)\,\mathrm{arcctg}\, x dx;$

1.33. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx;$

1.34. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx;$

1.35. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx;$

1.36. $\int \frac{4x^3-5}{x(x^3-5)(x^4-5x+1)}dx;$

1.37. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}};$

1.38. $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}};$

1.39. $\int \frac{1+\cos 2x}{\cos x}dx;$

1.40. $\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x dx;$

1.41. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}dx;$

1.42. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx;$

1.43. $\int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx;$

1.44. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x};$

1.45. $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx;$

1.46. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}};$

1.47. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x};$

1.48. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)};$

1.49. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx;$

1.50. $\int e^{\arcsin x}dx;$

1.51. $\int \frac{\sin(x-1)}{\sin(x+1)}dx;$

1.52. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}};$

1.53. $\int (x^4-3x^2+2)(1-x)^{21}dx;$

1.54. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}\, x\cdot\cos 2x};$

1.55. $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx;$

1.56. $\int \frac{\ln\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}dx;$

1.57. $\int e^{3x}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx;$

1.58. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx;$

1.59. $\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^5-3x^2+x+5}dx;$

1.60. $\int x\sqrt[4]{x-2}dx;$

1.61. $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx;$

1.62. $\int \frac{x+1}{2^{x+1}}dx;$

1.63. $\int \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}dx;$

1.64. $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\sin x};$

1.65. $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}};$

1.66. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}.$

2. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на равные части и выбирая в качестве $\overline{x}_k$ левые концы этих частей.

3. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на равные части и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ правые концы этих частей.

4. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{4}$, и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ левые концы этих частей.

5. Оценить интеграл: $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$.

6. Доказать, что $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int\limits_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e$.

7. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ или $\int\limits_0^1 x \sin^2 x dx$.

8. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3)\sin x} dx < 2\pi + \frac{\pi^4}{2}$.

9. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интегралы:

9.1 $\int\limits_6^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 9.2 $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$; 9.3 $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x dx$; 9.4 $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

10. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ и $r = 2a\sin\varphi$.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках $(0, -3)$ и $(3, 0)$.

12. Найти площадь каждой из фигур, ограниченной окружностью

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$$

и параболой $y = x^2 + 6x + 10$.

13. Вычислить площадь, содержащуюся внутри петли

$$x = \frac{t^2}{1+t^2},\ y = \frac{t\,(1-t^2)}{1+t^2}.$$

14. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1.$$

15. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, рассмотрев горизонтальные сечения.

16. Найти объем, ограниченный двумя эллиптическими цилиндрами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

17. Вычислить объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.

18. Найти длину гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

19. Найти длину кривой $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

20. Найти длину кривой $y = \ln \sin x$ между точками, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$.

21. Вычислить длину эволюты эллипса

$$\begin{cases} x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, \\ y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, \end{cases} \quad \left(c^2 = a^2 - b^2\right), \;\; a \geqslant b.$$

22. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$ вокруг оси Ox между точками пересечения с осями координат.

23. Окружность $r = 2r \sin \varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

24. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси Ox.

25. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y = 1,5$, вокруг оси Oy.

26. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота H.

27. Вычислить кинетическую энергию шара массы m и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью около оси, проходящей через его центр.

28. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см. Плотность жидкости равна γ, и жидкость полностью заполняет цилиндр.

29. Вычислить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

30. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,. \end{cases}$

31. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной верхней половиной кардиоиды

$$r = a\,(1 + \cos\varphi)\,.$$

32. Найти координаты центра тяжести части логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$.

33. Найти центр тяжести части кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, содержащейся между точками, для которых $y = 1$ и $y = 2$.

34. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость:

34.1 $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$;

34.2 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

34.3 $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$;

34.4 $\int\limits_2^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$;

34.5 $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

34.6 $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

34.7 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

34.8 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Литература

1. Математический анализ : учеб. пособие : в 4 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2020. – Ч. 1: Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 475 с.

2. Кротов, В. Г. Лекции по математическому анализу: учеб. пособие / В. Г. Кротов — Минск: БГУ, 2016. — 372 с.

3. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1 : Основы математического анализа. – 440 с.

4. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1988. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 687 с.

5. Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.

6. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.

7. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 2002. – Кн. 1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 725 с.

8. Давыдов, Н. А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский ; под ред. Н. А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

9. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под общ. ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Т. 1. – 343 с.

10. Бохан, К. А. Курс математического анализа : в 2 т. / К. А. Бохан, И. А. Егорова, К.В. Лащенов. – М. : Просвещение, 1972. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 439 с.

11. Уваренков, И. М. Курс математического анализа : в 2 т. / И. М. Уваренков, М.З. Маллер. – М. : Просвещение, 1966. – Т. 1 : Курс математического анализа. – 639 с.

12. Дадаян, А. А. Математический анализ / А.А. Дадаян. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 428 с.

13. Герасимович, А. И. Математический анализ : в 2 ч. / А. И. Герасимович, И. А. Рысюк. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 287 с.

Приложения

1. Таблица неопределенных интегралов.
2. Варианты заданий для индивидуальной работы 1.
3. Варианты заданий для индивидуальной работы 2.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$

   $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,$

    $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 1

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{x^3+3x-1}{(x+4)^{50}}dx$;

1.2 $\int \frac{dx}{x^4+1}$;

1.3 $\int \frac{x^6+1}{(x^2+x+1)^2}dx$;

1.4 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

1.5 $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

1.6 $\int \cos 2x \cdot 2^{-x}dx$;

1.7 $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;

1.8 $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

1.9 $\int \frac{dx}{(\sin 2x+\cos 2x)^2}$;

1.10 $\int \frac{dx}{8\sin 3x-1}$;

1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$;

1.12 $\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}$;

1.13 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

1.14 $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$;

1.15 $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

1.16 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$;

1.17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$;

1.18 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

1.19 $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx$;

1.20 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

2. Для интеграла

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx,\ \ n=2,3,\ldots$$

докажите рекуррентную формулу:

$$I_n=\frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1}+2\cos a\cdot I_{n-1}-I_{n-2}.$$

Используя формулу, вычислите интеграл

$$\int\left(\frac{\sin\frac{x-1}{2}}{\sin\frac{x+1}{2}}\right)^3 dx.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 2

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int (x^2-5x+1)(2x+30)^{20}dx$;

1.2 $\int \frac{dx}{x^6+1}$;

1.3 $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^8 3x}$;

1.4 $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$;

1.5 $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$;

1.6 $\int \sin(\ln 2x)dx$;

1.7 $\int \frac{xdx}{(x+1)^{0,5}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$;

1.8 $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$;

1.9 $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x\cdot\cos 2x}$;

1.10 $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$;

1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$;

1.12 $\int \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$;

1.13 $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

1.14 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$;

1.15 $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

1.16 $\int x\sqrt{2-5x}dx$;

1.17 $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$;

1.18 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$;

1.19 $\int \sin x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)dx$;

1.20 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

2. Выведите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n=\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n},\ n\in\mathbb{N},\ n>2,\ a,b=\mathrm{const},\ a^2+b^2\neq 0.$$

Используя найденную формулу, вычислите интеграл

$$\int\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 3

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int (x^3 - 3x^2 + 1)(3x + 2)^{15} dx$;

1.2 $\int \frac{x dx}{x^8+1}$;

1.3 $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

1.4 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$;

1.5 $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}} dx$;

1.6 $\int e^{\sqrt{x}} dx$;

1.7 $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$;

1.8 $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$;

1.9 $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+\sin^4 x} dx$;

1.10 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$;

1.11 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx$;

1.12 $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

1.13 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$;

1.14 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$;

1.15 $\int x \sin\sqrt{x} dx$;

1.16 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

1.17 $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$;

1.18 $\int \frac{dx}{(x^2+8)^4}$;

1.19 $\int e^{2x} \sin^2 x dx$;

1.20 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

2. Выведите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad a \neq 0.$$

Используя найденную формулу, вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы 1

Вариант 4

1. Найдите интегралы:

1.1 $\int \frac{3x^2+4x+1}{(x-3)^{30}}dx$;

1.2 $\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$;

1.3 $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$;

1.4 $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$;

1.5 $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$;

1.6 $\int \cos(\ln 3x)dx$;

1.7 $\int \frac{dx}{(x^2+x-2)\sqrt{x^2+x+1}}$;

1.8 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$;

1.9 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}}$;

1.10 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$;

1.11 $\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{x^2+9}}$;

1.12 $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

1.13 $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$;

1.14 $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}dx$;

1.15 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$;

1.16 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}dx$;

1.17 $\int \frac{x^3 dx}{x^8+3}$;

1.18 $\int \frac{x^{10}dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

1.19 $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

1.20 $\int xe^x \sin^2 x dx$.

2. Выведите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} \quad (n\in\mathbb{N},\ n>1,\ |a|\neq|b|).$$

Используя найденную формулу, вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(3+2\cos x)^4}.$$

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 1

1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x} dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм (разбить отрезок $[a, b]$ на части точками, образующими геометрическую прогрессию).
2. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.
4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ и $r = 2a\sin\varphi$.
5. Вычислить объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.
6. Определить длину кривой $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y = 1,5$, вокруг оси Oy.
8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота H.
9. Найти центр тяжести кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, содержащейся между точками, для которых $y = 1$ и $y = 2$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 2

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^a xe^x dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Оценить интеграл $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.
4. Найти площадь, заключенную между линиями $r = 2 - \cos\varphi$ и $r = \cos\varphi$.
5. Найти объем, ограниченный двумя эллиптическими цилиндрами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.
6. Определить длину кривой $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси Ox.
8. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса R, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.
9. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса a, стягивающей угол 2α.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 3

1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм (положить $\overline{x}_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$, $i = 0, 1, \ldots, n$).
2. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}} dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$.
4. Вычислить площадь общей части кругов $r = a\cos\varphi$, $r = a\cos\varphi + a\sin\varphi$.
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = ax$, $x - z = 0$, $x + z = 0$, рассмотрев сечения, перпендикулярные оси Ox.
6. Определить длину кривой $9y^2 = x\,(x-3)^2$ между точками пересечения с осью Ox.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = \cos\frac{\pi x}{2a}$ вокруг оси Ox от $x_1 = -a$ до $x_2 = a$.
8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h.
9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами $ax = y^2$, $ay = x^2$ $(x > 0)$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{-\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 4

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Доказать, что $\frac{2}{5} < \int\limits_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.
4. Вычислить площадь, ограниченной кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $r = a$.
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, рассмотрев горизонтальные сечения.
6. Определить длину кривой $y = \ln\sin x$ между точками, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.
8. Вычислить кинетическую энергию шара массы m и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через его центр.
9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью Ox и параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 5

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x}$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Доказать, что $\frac{\pi}{6} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.
4. Показать, что площадь фигуры, ограниченной любыми двумя радиус-векторами гиперболической спирали $r\varphi = a$ и ее кривой, прямо пропорциональна разности этих радиусов.
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=1$.
6. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $x^2=(y+1)^3$ и $y=4$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy петли кривой $9x^2=y\,(3-y)$.
8. Шар лежит на дне бассейна глубиной H. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды, если его радиус равен R, а его плотность γ.
9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямой $y=\frac{2}{\pi}x$ и синусоидой $y=\sin x$ при $x>0$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 6

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{10} 2x dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Доказать, что $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int\limits_0^2 e^{x^2-x} dx < 2e$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_6^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.
4. Вычислить площадь петли кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$.
5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. Доказать, что этот объем равен объему тела, полученного при вращении той же фигуры вокруг оси абсцисс.
6. Вычислить длину кривой $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{2}t^3$ в пределах от 0 до $\sqrt{3}$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс петли кривой $9y^2 = x^2 - x^4$.
8. Электрический заряд E, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Определить работу A силы отталкивания F, если известно $F = \frac{Ee}{x^2}$ дин, где x см – расстояние между зарядами E и e.
9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и первой аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t)\,, \\ y = a\,(1 - \cos t)\,. \end{cases}$$
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Вариант 7

1. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b e^{kx}dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ или $\int\limits_0^1 xdx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.
4. Вычислить площадь, содержащуюся внутри петли $x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$.
5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.
6. Вычислить длину эволюты эллипса $\begin{cases} x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, \\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t, \end{cases}$ $\left(c^2 = a^2 - b^2\right)$, $a \geqslant b$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением части параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$.
8. Цилиндр с высотой H и радиусом R, наполненный газом под атмосферным давлением p_0, закрыт поршнем. Вычислить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние h внутрь цилиндра. *Указание. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом V и давлением p газа выражается формулой $pV = C = const$ (закон Бойля – Мариотта).*
9. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной верхней половиной кардиоиды $r = a\,(1+\cos\varphi)$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 8

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right)dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 x dx$ или $\int\limits_0^1 x\sin^2 x dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.
4. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x^4+y^4=ax^2$ (привести уравнение к параметрическому виду, положив $y=tx$).
5. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной частью эволюты эллипса $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=-\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, лежащей в первом квадрате, и осями координат.
6. Найти длину эпициклоиды $\begin{cases} x=a\left(2\cos t+\cos 2t\right), \\ y=a\left(2\sin t+\sin 2t\right). \end{cases}$
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ от $y=1$ до $y=e$.
8. Вычислить сопротивление при прохождении тока с одного основания усеченного конуса к другому, если радиусы оснований равны a и b, а высота усеченного конуса равна H.
9. Найти координаты центра тяжести сектора, ограниченного одним полувитком архимедовой спирали $r=a\varphi$ от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\pi$.
10. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Вариант 9

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln x dx$, используя определение определенного интеграла как предела интегральных сумм.
2. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_1^2 \ln x dx$ или $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\, dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x dx$.
4. Вычислить площадь, ограниченную одной петлей кривой $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$
5. Найти объем тела, которое получается при вращения фигуры, ограниченной кардиоидой $r = \alpha(1+\cos\varphi)$, вокруг полярной оси.
6. Найти длину кривой $\begin{cases} x = e^t\,(\cos t + \sin t)\,, \\ y = e^t\,(\cos t + \sin t)\,, \end{cases}$ от точки $t_1 = 0$ до точки $t_2 = 1$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy кривой $y^2 + 4x = 2\ln y$ от $y = 1$ до $y = 2$.
8. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.
9. Найти координаты центра тяжести части логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$ от $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ до $\varphi_2 = \pi$.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 10

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1, 4]$ на равные части и выбирая в качестве $\overline{x}_k$ левые концы этих частей.
2. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_3^4 \ln x dx$ или $\int\limits_3^4 (\ln x)^2\, dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$.
4. Вычислить площадь, ограниченную одной ветвью трохоиды $\begin{cases} x = at - b\sin t, \\ y = a - b\cos t, \end{cases}$ $(0 < b \leqslant a)$ и касательной к ней в низших ее точках.
5. Вычислить объем, который образуется вращением круга $r = \alpha \sin\varphi$ вокруг полярной оси.
6. Найти длину эвольвенты окружности $\begin{cases} x = a\,(\cos t + t\sin t)\,, \\ y = a\,(\sin t - t\cos t)\,, \end{cases}$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ вокруг оси Ox от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.
8. Вычислить силу давления воды на треугольник, высота которого равна h см, а основание b см, если он погружен в воду таким образом, что основание его лежит на поверхности воды, а высота направлена вертикально вниз.
9. Пользуясь теоремой Паппа-Гульдина, найти центр тяжести полуокружности радиуса a.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 11

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1, 4]$ на равные части и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ правые концы этих частей.
2. Выяснить, не вычисляя интегралы, какой из интегралов больше: $\int\limits_0^{\pi} e^{-x}\cos^2 x dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)dx$.
4. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2$, касательной к ней в точке $(3, 5)$ и осью ординат.
5. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r = \alpha\cos^2\varphi$.
6. Найти длину гиперболической спирали $r^{\varphi} = 1$ от точки $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ вокруг оси Ox.
8. Вычислить силу давления жидкости на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h $(h \geqslant b)$. Плотность жидкости d.
9. Найти площадь поверхности, образованной вращением фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox, вокруг касательной к вершине циклоиды.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_1^{\infty} x\cos x dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$.

Вариант 12

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на равные части и выбирая в качестве $\overline{x}_k$ середины этих частей.
2. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что
$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\sqrt{x^3+1}dx \leqslant \frac{5}{3}.$$
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^\pi e^x \sin 2x dx$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+x-3$ и касательными к ней в точках $(0,-3)$ и $(3,0)$.
5. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг полярной оси фигуры, ограниченной кривой $r=\alpha\cos^3\varphi$.
6. Вычислить длину прямой линии $\frac{a}{r}=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$ в пределах от $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x=\frac{t^3}{3}$, $y=4-\frac{t^2}{2}$ вокруг оси Ox между точками пересечения с осями координат.
8. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой имеет 70 м в длину, нижнее 50 м, а высота 20 м.
9. Вычислить по теореме Паппа-Гульдина объем и боковую поверхность прямого конуса с высотой H и радиусом основания r.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_0^\infty x^2\cos x dx$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

Варианты заданий для индивидуальной работы 2

Вариант 13

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{4}$, и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ левые концы этих частей.
2. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}dx < \sqrt{1,2}$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими точкам, в которых функция имеет минимум.
5. Найти объем тела, полученного при вращении той же фигуры вокруг прямой $y = x$.
6. Вычислить длину части циссоиды Диоклеса $r = 2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ в пределах от φ_1 до φ_2.
7. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox петли кривой
$$x = t^2,\ y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right).$$
8. Верхний край шлюза, имеющего форму квадрата со стороной, равной 8 м, лежит на поверхности воды. Определить величину давления на каждую из частей шлюза, образуемого делением квадрата одной из его диагоналей.
9. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$.

Вариант 14

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{4}$, и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ правые концы этих частей.
2. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что $\int\limits_0^\pi x^2\sqrt{\sin x}dx < \frac{2\pi^5}{5}$.
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_0^\pi x^3 \sin x dx$.
4. Найти площадь каждой из фигур, ограниченной окружностью
$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$$
и параболой $y = x^2 + 6x + 10$.
5. Найти объем, получаемый при вращении вокруг оси абсцисс лепестка лемнискаты $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$.
6. Вычислить длину части параболы $\frac{a}{r} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ отсекаемой от параболы вертикальной прямой, проходящей через полюс.
7. Окружность $r = 2r \sin\varphi$ вращается вокруг полярной оси. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.
8. Вычислить силу давления жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см. Плотность жидкости равна γ и жидкость полностью заполняет цилиндр.
9. Найти момент инерции прямого параболического сегмента с основанием $2b$ и высотой h относительно его оси симметрии.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$.

Вариант 15

1. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3 dx$ по определению, разбивая отрезок $[1,4]$ на части точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, где $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{4}$, и выбирая в качестве точек $\overline{x}_k$ средние геометрические левых и правых концов частей.
2. С помощью неравенства Коши – Буняковского доказать, что
$$\int\limits_0^{\pi} \sqrt{(1+x^3)\sin x}\,dx < 2\pi + \frac{\pi^4}{2}.$$
3. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти интеграл $\int\limits_1^e (1-\ln x)^2\,dx$.
4. Вычислить площадь, ограниченную кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$.
5. Найти объем, получаемый при вращении фигуры, ограниченной кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$ вокруг прямой $y = -x$.
6. Найти длину кривой $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.
7. Вычислить площадь поверхности, полученной при вращения кривой $r^2 = a^2\cos\varphi$: а) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{2}$; б) вокруг оси $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
8. Вычислить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.
9. Найти момент инерции дуги окружности радиуса a, соответствующей центральному углу φ.
10. Доказать, что следующий интеграл расходится $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^3+x+1}$.
11. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$.

Предметный указатель

Указатель обозначений

$= [\ldots] =$

$(\tau, \overline{x})$

λ_τ

$\sigma_\tau\left(f, \overline{x}\right)$

$R\left([a, b]\right)$

S_τ

s_τ

$I^\star$

$I_\star$

$\omega_k(f)$

$||f||_p$

$C^1\left([a, b]\right)$

$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$