

Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь
Установа адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.С. Пушкіна»

Вучоныя запіскі

Брэсцкага ўніверсітэта

Зборнік навуковых прац

Выпуск 13

*Частка 2
Прыродазнаўчыя навукі*

Брэст • 2017

Заснаваны ў 2005 годзе

Галоўны рэдактар

А.М. Сендзер

Намеснікі галоўнага рэдактара:

С.А. Марзан (частка 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі)

А.Я. Будзько (частка 2. Прыродазнаўчыя навукі)

Рэдакцыйны савет:

В.Е. Гайдук, К.К. Красоўскі, Л.Г. Лысюк, Б.М. Ляпешка, З.П. Мельнікава, А.Ф. Равінскі

Міжнародны савет:

*А.А. Афонін (Расія), В.Р. Бязрогаў (Расія), Ф.Я. Васілюк (Расія), В.А. Главан (Молдова),
Марцін Грабэ (Германія), М.М. Громаў (Расія), В.В. Дзікусар (Расія), Андраш Золтан (Венгрыя),*

Антон Мірановіч (Польшча), В.А. Несцяроўскі (Украіна), Ежы Нікітаровіч (Польшча),

Станіслаў Рудальф (Польшча), Б.В. Саліхаў (Расія), В.Р. Самойленка (Украіна),

Фелікс Чыжэўскі (Польшча), Антоні Юўка (Польшча), Эдвард Ярмох (Польшча)

Рэдакцыйная калегія:

Г.І. Займіст (адказны рэдактар Часткі 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі),

Н.С. Ступень (адказны рэдактар Часткі 2. Прыродазнаўчыя навукі),

У.В. Амелькін, С.В. Арцёменка, М.А. Багдасараў, В.Ф. Байнёў, В.У. Будкевіч, А.М. Вабішчэвіч,

І.Я. Валітава, В.М. Ватыль, П.А. Вадап'янаў, А.М. Вігчанка, А.А. Волчак, Т.А. Гарупа,

А.М. Грыгаровіч, А.А. Гужалоўскі, А.Л. Гулевіч, Т.І. Доўнар, М.П. Жыгар,

Г.А. Зорын, В.І. Іўчанкаў, М.С. Кавалевіч, Т.А. Кавальчук, Ч.С. Кірвель, У.Л. Ключня, П.П. Крусць,

У.У. Лосеў, А.А. Лукашанец, М.І. Ляўчук, В.С. Манахаў, І. П. Мартынаў, А.А. Махнач,

А.В. Мацвееў, У.А. Плецохоў, Я.В. Радына, С.В. Рашэтнікаў, Д.Г. Ротман, В.Ф. Русецкі, А.А. Савіч,

У.С. Секяржыцкі, М.М. Сендзер, У.А. Сенькавец, Я.У. Скакун, А.С. Сляповіч,

В.А. Сцепановіч, В.І. Сянкевіч, Л.Р. Цігарэнка, М.М. Труш, А.В. Чычурын, І.А. Швед,

Я.К. Яловічава, Я.С. Яскевіч

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

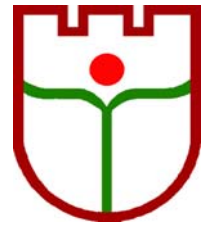
e-mail vesnik@brsu.brest.by

ISBN 978-985-555-757-0 (ч. 2)

ISBN 978-985-555-755-6

© УА «БрДУ імя А.С. Пушкіна», 2017

Вучоныя запіскі



Брэсцкага ўніверсітэта

ЗБОРНИК НАВУКОВЫХ ПРАЦ

2017 • Вып. 13 • Ч. 2

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

- Худяков А.П., Матысик О.В.** Матричные интерполяционные многочлены
в случае прямоугольных и сингулярных матриц 7

ФІЗІКА

- Плетюхов В.А.** Релятивистские волновые уравнения
с расширенным набором представлений группы Лоренца 14

ХІМІЯ

- Колбас Н.Ю.** Пираноантоцианы: химическая структура,
спектральная характеристика, особенности синтеза 94

БІЯЛОГІЯ

- Абрамова И.В., Гайдук В.Е.** Серая ворона (*CORVUSCORONAL.*, *PASSERIFORMES*)
как модель синантропизации и урбанизации птиц
(на примере юго-западной Беларуси)..... 108

- Зеркаль С.В., Шкуратова Н.В.** Флористический состав высших водных
и прибрежных растений бассейна р. Припять в черте г. Пинска 116

- Матусевич Н.М., Жигар М.П.** Отличительные особенности анатомического
строения коры однолетнего стебля двух видов квилахи (сем. *ROSACEAE JUSS.*) 123

НАВУКІ АБ ЗЬМЛІ

- Токарчук О.В., Токарчук С.М.** Геоэкологическая оценка
рекреационного потенциала водных объектов Брестской области..... 129

Ministry of education of Republic of Belarus
Educational establishment «Brest state university
named after A.S. Pushkin»

*Scientific
Proceeding
Of Brest University*

Collection of scientific works

Issue 13

*Part 2
Natural Sciences*

Brest • 2017

Founded 2005

Editor-in-chief

A.N. Sender

Editor-in-chief Deputies

S.A. Marzan (*part 1. The Humanities and Social Sciences*)

A.Ya. Budzko (*part 2. The Natural Sciences*)

Editorial council:

V.E. Gaiduk, K.K. Krasouski, L.G. Lysyuk, B.M. Lyapeshka, Z.P. Melnikava, A.F. Ravinski

International council:

A.A. Afonin (Russia), V.G. Byazrogau (Russia), F.Ya. Vasilyuk (Russia), V.A. Glavan (Moldova),
Martin Grabe (Germany), M.M. Gromau (Russia), V.V. Dzikusar (Russia), Andrash Zoltan (Hungary),
Anton Miranovich (Poland), V.A. Nestsyaruski (Ukraine), Ezhy Nikitarovich (Poland),
Stanislav Rudalf (Poland), B.V. Salikhau (Russia), V.G. Samoilenka (Ukraine),
Felix Chyzhewski (Poland), Antoni Yuvka (Poland), Edvard Yarmokh (Poland)

Editorial board:

G.I. Zaimist (*managerial editor part 1. The Humanities and Social Sciences*),

N.S. Stupen (*managerial editor part 2. The Natural Sciences*),

V.V. Amelkin, S.V. Artsyomenka, M.A. Bagdasarau, V.F. Bainyou, V.U. Budkevich, A.M. Vabishchevich,
I.Ya. Valitava, V.N. Vatyly, P.A. Vadapyanau, A.N. Vitchanka, A.A. Volchak, T.A. Garupa,
A.M. Grygarovich, A.A. Guzhalouski, A.L. Gulevich, T.I. Dounar, M.P. Zygar,
G.A. Zoryn, V.I. Iuchankau, M.S. Kavalevich, T.A. Kavalchuk, C.S. Kirvel, U.L. Klyunya, P.P. Krus,
V.V. Loseu, A.A. Lukashanets, M.I. Lyauchuk, V.S. Manakhau, Y.F. Martynau, A.A. Makhnach,
A.V. Matveev, U.A. Pletsyukhou, Y.V. Radyna, S.V. Rashetnikau, D.G. Rotman, V.F. Rusetski, A.A. Savich,
V.S. Sekyazhytski, N.N. Sender, V.A. Senkavets, E.V. Skakun, E.S. Slyapovich,
V.A. Stepanovich, V.I. Senkevich, L.R. Tsitarenka, N.N. Trush, A.V. Chychuryun, I.A. Shved,
Y.K. Yalovichava, Y.S. Yaskevich

Publishing house address:

224665, Brest, Bulvar Kosmonavtov, 21

tel.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

ISBN 978-985-555-757-0 (p. 2)

ISBN 978-985-555-755-6

© EE «BrSU named after A.S. Pushkin», 2017

Scientific Proceeding



of Brest University

COLLECTION OF SCIENTIFIC WORKS

2017 • Issue 13 • Part 2

INDEX

MATHEMATIS

- Khudyakov A.P., Matysik O.V.** Matrix Interpolation Polynomials in the Case of Rectangular and Singular Matrices 7

PHYSIS

- Pletyukhov V.A.** Relativistic Wave Equations with Extended Sets of the Lorentz Group Representations 14

CHEMISTRY

- Kolbas N.Y.** Anthocyanin Copigmentation Mechanisms 94

BIOLOGY

- Abramova I.V., Gaiduk V.E.** Gray Crow (*Corvus Corona* L., Passeriformes) as a Model of Synthropisation and Urbanization of Birds in Southwest of Belarus 108

- Zerkal S.V., Shkuratova N.V.** Floristic Composition of Higher Aquatic and Riparian Plants of the Basin of the Pripyat River within the City of Pinsk 116

- Matusevich N.M., Zigar M.P.** Distinctive Features of the Anatomical Structure of the Cortex of the Annual Stem of tTwo Species of Quillaja (Family Rosaceae juss.)..... 123

SCIENES ON EARTH

- Tokarchuk O.V., Tokarchuk S.M.** Geocological Assessment of the Recreational Potential of Water Bodies in the Brest Region 129
-
-



УДК 519.652+517.548.5

А.П. Худяков¹, О.В. Матысик²

¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

МАТРИЧНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В СЛУЧАЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

Работа посвящена построению и исследованию матричных интерполяционных многочленов для операторов, заданных на множестве квадратных и прямоугольных матриц. Получены интерполяционные формулы лагранжева типа по системам тригонометрических, экспоненциальных, а также рациональных матричных функций двух видов. В формулах не требуется существование обратных матриц, в их структуру входят псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза. Значения интерполируемого оператора могут быть на множестве как квадратных, так и прямоугольных матриц.

Введение

В структуру многих матричных интерполяционных многочленов входят обратные матрицы. Это накладывает некоторые ограничения на интерполяционные узлы, так как обратные матрицы не всегда существуют. В данной работе предлагается способ построения интерполяционных многочленов, в структуру которых вместо обратных матриц входят обобщенные псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза. Как известно [1], псевдообратная матрица Мура – Пенроуза существует и единственна для любой квадратной, а также прямоугольной матрицы.

В данной работе построены матричные интерполяционные формулы для функций матричного аргумента. В случае тригонометрического и экспоненциального интерполирования матричная функция задается на множестве квадратных матриц, но ее значения могут быть на множестве квадратных или прямоугольных матриц. При построении формул по системе матричных рациональных функций предполагается, что интерполируемый оператор может быть задан как на множестве квадратных матриц, так и на множестве прямоугольных матриц. Значения данного оператора также могут быть на множестве квадратных или прямоугольных матриц.

Формула тригонометрического интерполирования

Пусть S_{lr} и S_{rl} есть $l \times r$ - и $r \times l$ -матрицы ($r \geq l$) следующих структур:

$$S_{lr} = [I_l | O_{l,r-l}] \quad \text{и} \quad S_{rl} = \begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где I_l – единичная матрица размера l , а $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – нулевые матрицы указанных размеров. Очевидно, что $S_{lr}S_{rl} = I_l$. В работах [2; 3] для операторов, заданных на множестве прямоугольных матриц, построена и исследована формула алгебраического матричного интерполирования вида

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^n F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ I_{nk}(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \quad (2)$$



где $l_{nk}(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $S_{l_k r_k}$, $S_{r_k l_k}$ – матрицы вида (1), а N_k^+ , B_k^+ , C_k^+ , M_k^+ – псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза, соответственно, для матриц N_k , B_k , C_k , M_k , которые, как известно, всегда существуют и единственны [1] для любых матриц. Пусть r_k и l_k – ранги матриц $l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$, тогда для матричного многочлена (2), при условии, что $l_k \leq r_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), выполняются равенства

$$L_n(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, \dots, n).$$

На множествах квадратных матриц одна из известных формул матричного тригонометрического интерполирования вида

$$T_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} \Psi_k(A) \Psi_k^{-1}(A_k) F(A_k),$$

где

$$\Psi_k(A) = \sin \frac{A - A_0}{2} \dots \sin \frac{A - A_{k-1}}{2} \sin \frac{A - A_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{A - A_{2n}}{2},$$

существует, если матрицы $\sin \frac{A_v - A_k}{2}$ ($v \neq k$) обратимы. Построим на множестве квадратных матриц интерполяционные матричные многочлены, когда существование обратных матриц $\sin^{-1} \frac{A_v - A_k}{2}$ не требуется. Как и ранее, значения функции $F(A)$ могут быть на множестве прямоугольных матриц.

Пусть $\tilde{\Psi}_k(A) = \Psi_k(A) \Psi_k^+(A_k)$, где $\Psi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для матрицы $\Psi_k(A_k)$, а r_k и l_k – ранги матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ соответственно ($k = 0, 1, \dots, 2n$).

Теорема 1. Пусть $\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$). Тогда для матричного многочлена

$$T_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Psi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \quad (3)$$

при условии, что $l_k \leq r_k$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$), выполняются интерполяционные условия

$$T_n(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, \dots, 2n). \quad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{\Psi}_k(A_v) = \delta_{kv} \tilde{\Psi}_k(A_k) = \delta_{kv} B_v C_v$, где δ_{kv} – символ Кронекера. При $A = A_v$ из равенства (3) следует, что

$$T_n(A_v) = F(A_v) N_v^+ S_{l_v r_v} B_v^+ B_v C_v C_v^+ S_{r_v l_v} M_v^+ F(A_v).$$



Из скелетного разложения матрицы $\tilde{\Psi}_v(A_v)$ следует, что $B_v^+ B_v = C_v C_v^+ = I_{r_v}$. Так как $S_{l_v r_v} S_{r_v l_v} = I_{l_v}$, а $N_v^+ M_v^+ = F^+(A_v)$, то окончательно имеем $T_n(A_v) = F(A_v) F^+(A_v) F(A_v) = F(A_v)$. Теорема 1 доказана.

Для наглядности приведем линейный случай ($n = 1$) формулы (3). Для матрично-го многочлена

$$T_1(A) = \sum_{k=0}^2 F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Psi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0(A) &= \Psi_0(A) \Psi_0^+(A_0) = \sin \frac{A-A_1}{2} \sin \frac{A-A_2}{2} \left[\sin \frac{A_0-A_1}{2} \sin \frac{A_0-A_2}{2} \right]^+, \\ \tilde{\Psi}_1(A) &= \Psi_1(A) \Psi_1^+(A_1) = \sin \frac{A-A_0}{2} \sin \frac{A-A_2}{2} \left[\sin \frac{A_1-A_0}{2} \sin \frac{A_1-A_2}{2} \right]^+, \\ \tilde{\Psi}_2(A) &= \Psi_2(A) \Psi_2^+(A_2) = \sin \frac{A-A_0}{2} \sin \frac{A-A_1}{2} \left[\sin \frac{A_2-A_0}{2} \sin \frac{A_2-A_1}{2} \right]^+, \end{aligned}$$

$\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k = 0, 1, 2$), а матрицы $S_{l_k r_k}$ и $S_{r_k l_k}$ имеют структуру вида (1), при $l_k \leq r_k$ ($k = 0, 1, 2$), выполняются интерполяционные условия

$$T_n(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, 2).$$

Пример. Для матричной функции $F(A) = e^{\sin A} - e^{\sqrt{3}/2} I$, где I – единичная матрица второго порядка, и узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \frac{\pi}{48} \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -3 & 28 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{\pi}{12} \begin{bmatrix} 51 & 0 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

построим интерполяционный многочлен вида (5). Здесь $F(A)$ выбрана таким образом, чтобы выполнялись ограничения, накладываемые на ранги $l_k \leq r_k$ ($k = 0, 1, 2$). В узлах функция $F(A)$ принимает значения

$$\begin{aligned} F(A_0) &= \frac{\alpha_1 - 1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,344 & -1,377 \end{bmatrix}, \\ F(A_1) &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,0624 & 0,250 \end{bmatrix}, \\ F(A_2) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 & 4(\alpha_4 - \alpha_1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0,349 & 0 \\ 0,183 & -1,082 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1 = e^{\sqrt{3}/2}$, $\alpha_2 = e^{1/\sqrt{2}}$, $\alpha_3 = e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$, $\alpha_4 = e^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.



Матрицы $\sin \frac{A_0 - A_1}{2} = \frac{1}{4} \sin \frac{7\pi}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $F(A_0)$ и $F(A_1)$ не имеют обратных, поэтому будем строить их скелетные разложения и использовать аппарат псевдообратных матриц Мура – Пенроуза. В нашем случае

$$\tilde{\Psi}_0(A_0) = \tilde{\Psi}_1(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_2(A_2) = I.$$

Скелетные разложения данных матриц, а также значений $F(A_k)$ имеют, соответственно, вид $\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ ($k = 0, 1, 2$), где $C_j = B_j^T = M_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ при $j = 0, 1$, $B_2 = C_2 = M_2 = I$, матрицы N_0, N_1 совпадают со вторыми строками матриц $F(A_0)$ и $F(A_1)$, а $N_2 = F(A_2)$. При этом псевдообратные матрицы $B_k^+, \tilde{N}_k^+, M_k^+$ равны, соответственно, транспонированным матрицам $B_k^T, \tilde{N}_k^T, M_k^T$ ($k = 0, 1, 2$), а

$$N_0^+ = \frac{4}{17(\alpha_1 - 1)} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,171 \\ -0,683 \end{bmatrix}, \quad N_1^+ = \frac{4}{17(\alpha_1 - \alpha_3)} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0,942 \\ 3,768 \end{bmatrix},$$

$$N_2^+ = \frac{1}{4(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)} \begin{bmatrix} 4(\alpha_4 - \alpha_1) & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & 4(\alpha_2 - \alpha_1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -2,863 & 0 \\ -0,485 & -0,924 \end{bmatrix}.$$

Как видно, ранги матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ принимают значения

$$r_0 = r_1 = l_0 = l_1 = 1, \quad r_2 = l_2 = 2.$$

Тогда $S_{l_j r_j} = S_{r_j l_j} = S_{11} = 1$ при $j = 0, 1$, а $S_{l_2 r_2} = S_{r_2 l_2} = S_{22} = I$.

Таким образом, в нашем случае многочлен (5) имеет вид

$$T_1(A) = \sum_{k=0}^2 G_k \Psi_k(A) H_k, \quad (6)$$

где

$$G_0 = G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2 = I, \quad H_0 = \begin{bmatrix} -0,103 & 0,412 \\ 0,412 & -1,648 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0,037 & 0,148 \\ 0,148 & -0,593 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -20,504 & 0 \\ -4,5803 & -2,183 \end{bmatrix}.$$

В узлах A_0, A_1 и A_2 функции $\Psi_k(A)$ принимают значения

$$\Psi_0(A_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,197 & 0,787 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0992 & -0,397 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2(A_2) = \begin{bmatrix} 0,017 & 0 \\ -0,120 & 0,496 \end{bmatrix}, \quad \Psi_k(A_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \neq i, \quad k, i = 0, 1, 2).$$

Нетрудно проверить, что в данных узлах выполняются интерполяционные условия (4).



Нормы невязок в средних точках A_{01} , A_{02} и A_{12} ($A_{kj} = (A_k + A_j) / 2$ ($k = 0, 1; j = 1, 2$)) равны

$$\begin{aligned} \| F(A_{01}) - T_1(A_{01}) \|_2 &= 0,187, \quad \| F(A_{02}) - T_1(A_{02}) \|_2 = 0,082, \\ \| F(A_{12}) - T_1(A_{12}) \|_2 &= 0,123. \end{aligned}$$

Как видим, многочлен (6) достаточно хорошо приближает функцию $F(A)$.

Интерполяционный многочлен, построенный по системе матричных экспонент

Построим формулу, аналогичную (3), в которой в качестве базисных функций будут выбираться матричные экспоненты. В теории матричного интерполирования известна формула вида

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^n \Phi_k(A) \Phi_k^{-1}(A_k) F(A_k),$$

где $\Phi_k(A) = (e^A - e^{A_0}) \dots (e^A - e^{A_{k-1}}) (e^A - e^{A_{k+1}}) \dots (e^A - e^{A_n})$.

Пусть, как и ранее, S_{lr} и S_{rl} – прямоугольные матрицы, имеющие структуру вида (1). Положим $\tilde{\Phi}_k(A) = \Phi_k(A) \Phi_k^+(A_k)$, где $\Phi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для матрицы $\Phi_k(A_k)$, а r_k и l_k – ранги матриц $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) соответственно.

Теорема 2. Пусть $\tilde{\Phi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Тогда для матричного многочлена

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^n F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Phi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k),$$

при условии, что $l_k \leq r_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$), выполняются условия

$$L_n(A_v) = F(A_v) \quad (v = 0, 1, \dots, n).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Интерполирование по системам рациональных функций

Рассмотрим задачу квадратичного интерполирования на множестве X прямоугольных матриц размерности $m \times n$. Пусть Y – множество прямоугольных матриц размерности $p \times q$, $F: X \rightarrow Y$ – матричная функция. Введем матричные многочлены

$$\begin{aligned} Q_{10}(A) &= (A_0 + C_0)(A + C_0)^+(A_0 + C_1)(A + C_1)^+, \\ Q_{11}(A) &= (A_1 + C_0)(A + C_0)^+(A_1 + C_1)(A + C_1)^+, \\ l_{10}(A) &= (A - A_1)(A_0 - A_1)^+, \quad l_{11}(A) = (A - A_0)(A_1 - A_0)^+, \end{aligned}$$



где C_0, C_1 – заданные фиксированные матрицы из X . Пусть r_k и l_k – ранги матриц $Q_{1k}(A_k)l_{1k}(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k=0,1$) соответственно, а $Q_{1k}(A_k)l_{1k}(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения этих же матриц.

Теорема 3. Если $l_k \leq r_k$ ($k=0,1$), то матричный многочлен

$$L_1(A) = F(A_0)N_0^+ S_{l_0 r_0} B_0^+ Q_{10}(A)l_{10}(A)C_0^+ S_{r_0 l_0} M_0^+ F(A_0) + \\ + F(A_1)N_1^+ S_{l_1 r_1} B_1^+ Q_{11}(A)l_{11}(A)C_1^+ S_{r_1 l_1} M_1^+ F(A_1) \quad (7)$$

удовлетворяет условиям

$$L_n(A_v) = F(A_v) \quad (v=0,1).$$

Доказательство теоремы 3 основано на свойствах скелетных разложений матриц, входящих в структуру формулы (7). Построим аналогичную формулу для произвольного числа узлов. Введем матричные многочлены

$$Q_{nk}(A) = \prod_{i=0}^n (A_k + C_i)(A + C_i)^+, \quad l_{nk}(A) = \prod_{i=0, i \neq k}^n (A - A_i)(A_k - A_i)^+.$$

Здесь C_0, C_1, \dots, C_n – заданные постоянные матрицы из множества X . Пусть, как и ранее, r_k и l_k – ранги матриц $Q_{nk}(A_k)l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$ ($k=0,1, \dots, n$) соответственно, $Q_{nk}(A_k)l_{nk}(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения данных матриц.

Теорема 4. Матричный многочлен по системе рациональных функций

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^n F(A_k)N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ Q_{nk}(A)l_{nk}(A)C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k) \quad (8)$$

при условии, что $l_k \leq r_k$ ($k=0,1, \dots, n$), является интерполяционным многочленом лагранжева типа для оператора $F(A)$.

Доказательство теоремы 4, в основном, повторяет доказательство теоремы 1.

Приведем аналогичного типа интерполяционные формулы по системе матричных рациональных функций другого вида. В линейном случае интерполяционная формула имеет вид (7), где функции $Q_{10}(A)$ и $Q_{11}(A)$ задаются равенствами

$$Q_{1k}(A) = (A_k + C)(A + C)^+ \quad (k=0,1),$$

где C – заданная фиксированная матрица из X . В случае произвольного числа узлов соответствующий интерполяционный многочлен имеет вид (8), где функции $Q_{nk}(A)$ имеют вид

$$Q_{nk}(A) = \left[(A_k + C)(A + C)^+ \right]^n \quad (k=0,1, \dots, n).$$

Аналогичного типа формулы построены и исследованы в [4; 5].



Заклучение

В статье построены и исследованы матричные интерполяционные многочлены лагранжева типа для операторов, заданных на множестве квадратных и прямоугольных матриц. Получены интерполяционные формулы по системам тригонометрических, экспоненциальных и двух видов рациональных матричных функций. В их структуру входят псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза, поэтому существование обратных матриц не требуется. Доказаны теоремы о выполнении интерполяционных условий. Оператор может иметь значения на множестве квадратных и прямоугольных матриц. При построении интерполяционных формул использованы скелетные разложения входящих в структуру многочленов матриц, а также блочные матрицы специального вида. Построен иллюстрационный пример применения одной из интерполяционных формул. Полученные интерполяционные формулы могут быть использованы в качестве основы построения приближенных методов решения нелинейных операторных и матричных уравнений, встречающихся в квантовой механике, нелинейной динамике, спектроскопии и других областях науки и техники.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
2. Макаров, В. Л. Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Л. А. Янович. – Киев : Наук. думка, 2000. – 407 с.
3. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
4. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
5. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.10.20017

Khudyakov A.P., Matysik O.V. Matrix Interpolation Polynomials in the Case of Rectangular and Singular Matrices

The paper is devoted to the construction and investigation of matrix interpolation polynomials for operators defined on a set of square and rectangular matrices. Interpolation formulas of the Lagrange type are obtained with respect to systems of trigonometric, exponential, and rational matrix functions of two forms. The formulas do not require the existence of inverse matrices; their structure includes pseudoinverse Moore – Penrose matrices. The values of the interpolated operator can be either on a set of square or rectangular matrices.



Владимир Анестиевич Плетюхов, профессор кафедры общей и теоретической физики, отметил в 2017 г. 50-летие научной деятельности.

Владимир Анестиевич в 1967 г. поступил в аспирантуру Белорусского государственного университета по специальности «теоретическая и математическая физика». Научный руководитель – академик Ф.И. Федоров – предложил аспиранту тему кандидатской диссертации «К теории релятивистских волновых уравнений с кратными представлениями группы Лоренца», которая и определила направление

его научных исследований на все последующие годы. Диссертация была успешно защищена в 1975 г., а в 1992 г. Владимир Анестиевич защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В 1994 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В настоящее время Владимир Анестиевич Плетюхов – действительный член Международной Академии наук высшей школы, председатель Брестского областного отделения Белорусского физического общества. В 1996–1999 гг. он возглавлял Постоянную комиссию по образованию, науке и культуре Палаты представителей Национального собрания Республики Беларусь. В 1999–2002 гг. Владимир Анестиевич занимал должность ректора Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

За время научной деятельности В.А. Плетюхов опубликовал более 200 научных работ в отечественных и зарубежных изданиях. В 2015 г. вышла монография «Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы» (в соавторстве с В.М. Редьковым и В.И. Стражевым). Основные научные результаты относятся к области физики элементарных частиц, классической и квантовой теории поля. Некоторые наиболее интересные из них изложены в предлагаемой статье.

Редакционная коллегия журнала «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» и сборника научных работ «Вучоныя запіскі Брэсцкага ўніверсітэта» желает юбиляру физического, интеллектуального и творческого долголетия, новых достижений в научной и педагогической деятельности.



УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов

*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАСШИРЕННЫМ НАБОРОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Показано, что использование расширенных наборов неприводимых представлений группы Лоренца открывает новые возможности теории релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы элементарных частиц. Развиваемый в работе подход позволяет также применять методы теории релятивистских волновых уравнений в суперструнных и калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий.

1. Основные сведения из теории релятивистских волновых уравнений

Теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) является одним из самых устойчивых и разработанных в математическом отношении направлений в классической и квантовой теории поля. Она берет начало с уравнения Дирака. Постулативный базис данной теории разрабатывался Дираком [1], Фирцем и Паули [2; 3], Баба [4; 5], Хариш-Чандра [6; 7] и другими авторами. В систематизированном изложении основные положения теории РВУ можно найти, например, в работах [8; 9]. Приведем их в сжатом виде.

Релятивистское квантово-механическое описание свободных элементарных микрообъектов всегда может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В случае микрообъектов с ненулевой массой такая система представима в матрично-дифференциальной форме (здесь и везде далее мы используем метрику $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, поэтому нет необходимости различать ковариантные и контравариантные лоренцевские индексы. По повторяющимся индексам в соответствии с известным правилом Эйнштейна подразумевается суммирование).

$$(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\Psi(x) = 0, \quad (1.1)$$

где Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_{μ} – квадратные матрицы, m – скалярный параметр, связанный с массой. Для микрообъектов с нулевой массой имеем

$$(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu} + \Gamma_0)\Psi(x) = 0, \quad (1.2)$$

где Γ_0 – особенная матрица ($\det \Gamma_0 = 0$), которая может быть и нулевой. Именно эти формы записи ассоциируются с термином «релятивистские волновые уравнения». Отметим еще, что если в форме РВУ (1.2) матрица Γ_0 – неособенная, то форма (1.2) всегда может быть приведена к виду (1.1). Поэтому в дальнейшем в записи (1.2) мы будем подразумевать только особенную матрицу Γ_0 , если специально не будет оговорено иное.

Основным и безусловным требованием, предъявляемым к уравнениям (1.1), (1.2), является их инвариантность относительно преобразований собственной группы Лоренца. Отсюда следует, что, во-первых, функция Ψ преобразуется по некоторому представлению



T собственной группы Лоренца (далее будет показано, что представление T должно быть приводимым). Во-вторых, матрицы Γ_μ и Γ_0 должны удовлетворять условиям

$$T^{-1}\Gamma_\mu T = L_{\mu\nu}\Gamma_\nu, \quad (1.3)$$

$$T^{-1}\Gamma_0 T = \Gamma_0, \quad (1.4)$$

где $L_{\mu\nu}$ – матрица Лоренца. Применяя (1.3) к бесконечно малым преобразованиям Лоренца

$$T = 1 + \delta\omega_{[\mu\nu]}J^{[\mu\nu]}, \quad (1.5)$$

придем к соотношению

$$[J^{[\mu\nu]}, \Gamma_\alpha]_- = \delta_{\nu\alpha}\Gamma_\mu - \delta_{\mu\alpha}\Gamma_\nu. \quad (1.6)$$

Полагая в (1.6) $\mu = i$ и $\nu = \alpha = 4$, матрицы Γ_i ($i = 1, 2, 3$) можно выразить через Γ_4 и «бусты» $J^{[i4]}$ лоренцевских преобразований:

$$\Gamma_i = [J^{[i4]}, \Gamma_4]_-. \quad (1.7)$$

Таким образом, среди матриц Γ_μ матрица Γ_4 играет выделенную роль.

Теперь напомним, что всякое неприводимое конечномерное представление τ группы Лоренца может быть задано парой чисел l_1, l_2 , которые одновременно или порознь принимают целые (включая ноль) либо полуцелые положительные значения [10]. Представление τ , действующее в пространстве R^τ , порождает, вообще говоря, приводимое представление своей подгруппы – группы вращений. Другими словами, пространство R^τ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств R_s^τ , в каждом из которых представление группы вращений, индуцированное представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ группы Лоренца, неприводимо и задается целочисленным либо полуцелочисленным весом s . При этом в представлении τ присутствуют все веса от $|l_1 - l_2|$ до $l_1 + l_2$. Размерность пространства R^τ равна $(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)$.

В зависимости от значений (целочисленность или полуцелочисленность) чисел l_1, l_2 все неприводимые конечномерные представления группы Лоренца удобно разбить на четыре класса:

$$\begin{aligned} \text{класс } +1 : & \quad l_1, l_2 \text{ оба целые;} \\ \text{класс } -1 : & \quad l_1, l_2 \text{ оба полуцелые;} \\ \text{класс } +\varepsilon : & \quad l_1 \text{ целое, } l_2 \text{ полуцелое;} \\ \text{класс } -\varepsilon : & \quad l_1 \text{ полуцелое, } l_2 \text{ целое.} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Неприводимые представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$ называются зацепляющимися, если одновременно выполняются условия

$$l'_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}, \quad l'_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}, \quad (1.9)$$



причем знаки «+» и «-» могут не коррелировать между собой.

Наглядное графическое изображение зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца удобно осуществлять посредством так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся компоненты соединяются чертой. Очевидно, что зацепляться друг с другом могут только представления классов «+1» с «-1» и «+ε» с «-ε». Таким образом, существуют две несмешивающиеся между собой разновидности схем зацеплений. Наиболее полная их реализация имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & (0, 0) & & & & \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & (0, 1) & - & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & - & (1, 0) \\
 & & & & | & & & & \\
 (0, 2) & - & (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & - & (1, 1) & - & (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) & - & (2, 0) \\
 | & & | & & | & & | & & |
 \end{array} \quad (1.10)$$

в первом случае и

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & (0, \frac{1}{2}) & - & (\frac{1}{2}, 0) & & & & \\
 & & & & | & & | & & & & \\
 & & & & (0, \frac{3}{2}) & - & (\frac{1}{2}, 1) & - & (1, \frac{1}{2}) & - & (\frac{3}{2}, 0) \\
 & & & & | & & | & & | & & \\
 (0, \frac{5}{2}) & - & (\frac{1}{2}, 2) & - & (1, \frac{3}{2}) & - & (\frac{3}{2}, 1) & - & (2, \frac{1}{2}) & - & (\frac{5}{2}, 0) \\
 | & & | & & | & & | & & | & & |
 \end{array} \quad (1.11)$$

во втором.

Важно подчеркнуть, что в обозначенных схемах зацеплений каждая из неприводимых компонент может встречаться более одного раза. Тогда говорят об РВУ с кратными (повторяющимися) представлениями группы Лоренца. Очевидно, что любая схема зацеплений, которая относится к типу (1.10), содержит только целочисленные веса с неприводимых представлений группы вращений и, следовательно, соответствующее ей РВУ описывает микрообъекты с целым спином. Аналогично схемы зацеплений типа (1.11) служат для описания микрообъектов с полуцелым спином.

Рассмотрим сначала, какие ограничения на представление T , действующее в пространстве R волновой функции Ψ , накладывает требование инвариантности РВУ (1.1) относительно преобразований собственной группы Лоренца.

Предположим, что представление T состоит из одного неприводимого представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ собственной группы Лоренца. Тогда слагаемое $m\Psi$ в (1.1) преобразуется по представлению τ . Слагаемое же $\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi$ преобразуется по представлению, которое полностью или частично состоит из неприводимых компонент, содержащихся в прямом произведении представлений

$$\begin{aligned}
 (l_1, l_2) \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \\
 &= (l_1 + \frac{1}{2}, l_2 + \frac{1}{2}) \oplus (l_1 + \frac{1}{2}, l_2 - \frac{1}{2}) \oplus (l_1 - \frac{1}{2}, l_2 + \frac{1}{2}) \oplus (l_1 - \frac{1}{2}, l_2 - \frac{1}{2}). \quad (1.12)
 \end{aligned}$$



Но поскольку ни одно из неприводимых представлений, фигурирующих в разложении (1.12), не совпадает с представлением (l_1, l_2) , члены $\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi$ и $m\Psi$ в уравнении (1.1) не могут преобразовываться одинаково при преобразованиях Лоренца. Это означает, что РВУ (1.1) не может базироваться на единственном неприводимом представлении группы Лоренца. Подобным образом рассуждая, приходим к выводу, что представление T волновой функции Ψ не может состоять из незацепляющихся неприводимых компонент. Таким образом, представление T должно быть приводимым и состоять из зацепляющихся неприводимых представлений.

Например, наиболее известные простейшие РВУ – уравнение Дирака (спин $\frac{1}{2}$), уравнения Даффина – Кеммера (спины 0 и 1), уравнение Фирца – Паули (спин $\frac{3}{2}$) – базируются соответственно на схемах зацеплений

$$(0, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, 0), \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{c} (0, 0) \\ | \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array}, \quad (1.14)$$

$$(0, 1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (1, 0), \quad (1.15)$$

и

$$\begin{array}{cc} (0, \frac{1}{2}) & - & (\frac{1}{2}, 0) \\ | & & | \\ (\frac{1}{2}, 1) & - & (1, \frac{1}{2}) \end{array}. \quad (1.16)$$

Возможен также вариант, когда рассматриваемая схема зацеплений состоит из отдельных фрагментов, каждый из которых удовлетворяет выше сформулированным условиям, но которые не зацепляются друг с другом. В этом случае соответствующее РВУ будет распадающимся в смысле собственной группы Лоренца.

На РВУ (1.1) еще обычно накладывается требование инвариантности относительно операции пространственного отражения, совместно с которой чисто лоренцевские преобразования образуют полную группу Лоренца. Указанное требование приводит к тому, что в используемой схеме зацеплений наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ при $l_1 \neq l_2$ должно присутствовать также представление $\dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$ (его называют сопряженным к τ).

Принципиальным моментом в теории РВУ является положение, согласно которому единый физический микробиъект должен описываться уравнением, не распадающимся в смысле полной группы Лоренца.

Все сказанное выше в отношении РВУ (1.1) остается в силе и для РВУ (1.2), за исключением случая, когда $\Gamma_0 = 0$. РВУ с $\Gamma_0 = 0$ в нашей работе рассматриваться не будут. Поэтому, чтобы не загромождать изложение, на этом случае не останавливаемся. Интересующегося читателя можем отослать, например, к работам [8; 11].



Физический интерес представляют те РВУ, которые могут быть получены на основе вариационного принципа из лоренц-инвариантной функции Лагранжа (плотности лагранжиана). Для ее построения необходимо иметь инвариантные квадратичные комбинации (квадратичные формы), составленные из функций поля, их первых производных и матриц Γ_μ , Γ_0 . Проблема здесь заключается в том, что матрицы T конечномерных представлений группы Лоренца не являются унитарными. Вследствие этого обычная квадратичная форма

$$\Psi^\dagger \Psi = (\Psi^T)^* \Psi \quad (1.17)$$

не является лоренцевским инвариантом. Вместо квадратичной формы (1.17) приходится вводить так называемую билинейную форму

$$\bar{\Psi} \Psi = \Psi^\dagger \eta \Psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta, \quad (1.18)$$

где η – некоторая числовая матрица. Для релятивистской инвариантности формы (1.18) матрица η должна удовлетворять условию

$$T^\dagger \eta T = \eta. \quad (1.19)$$

Условие (1.19) можно представить в ином виде, если в качестве преобразования T использовать бесконечно малое преобразование (1.5). Подставляя (1.5) в (1.19) и ограничиваясь членами первого порядка малости по параметрам $\delta\omega_{[\mu\nu]}$, с учетом независимости этих параметров получим эквивалентные (1.19) условия

$$\eta J^{[ij]} = J^{[ij]} \eta, \quad (1.20)$$

$$\eta J^{[i4]} = -J^{[i4]} \eta. \quad (1.21)$$

Матрица η , фигурирующая в выражении (1.18) и удовлетворяющая условиям (1.20), (1.21), называется матрицей билинейной лоренц-инвариантной формы.

При выполнении условий (1.3), (1.4), (1.20), (1.21) лоренц-инвариантными являются также квадратичные комбинации

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi), \quad (\partial_\mu \bar{\Psi}) \Gamma_\mu \Psi, \quad \bar{\Psi} \Gamma_\mu (\partial_\mu \Psi). \quad (1.22)$$

Лагранжиан, приводящий к уравнению (1.1), может быть выбран, например, в виде

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} (\Gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi + \frac{1}{2} ((\partial_\mu \bar{\Psi}) \Gamma_\mu - m \bar{\Psi}) \Psi. \quad (1.23)$$

Варьируя в соответствии с принципом наименьшего действия функцию действия (функции Ψ и $\bar{\Psi}$ при этом считаются независимыми), приходим к уравнению (1.1) для функции Ψ и уравнению

$$-(\partial_\mu \bar{\Psi}) \Gamma_\mu + m \bar{\Psi} = 0 \quad (1.24)$$



для функции $\bar{\Psi}$. Динамические переменные получаются из лагранжиана (1.23) по общим формулам

$$E = - \int \bar{\Psi} \Gamma_4 \partial_4 \Psi d^3x, \quad P = -\frac{i}{c} \int \bar{\Psi} \Gamma_4 \partial_i \Psi d^3x, \quad (1.25)$$

вытекающим из теоремы Нетер.

Часто используется упрощенный вид лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi, \quad (1.26)$$

также позволяющий получить РВУ (1.1) и правильные выражения для динамических переменных. Уравнение (1.2) может быть получено из лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0)\Psi. \quad (1.27)$$

Из физических соображений очевидно, что билинейная форма (1.18) должна быть вещественной, то есть

$$(\Psi^\dagger \eta \Psi)^\dagger = \Psi^\dagger \eta^\dagger \Psi = \Psi^\dagger \eta \Psi,$$

откуда следует

$$\eta^\dagger = \eta. \quad (1.28)$$

Кроме того, в пространстве волновой функции Ψ базис можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\eta^2 = 1, \quad \text{или} \quad \eta^{-1} = \eta.$$

В сочетании с (1.28) это приводит к соотношениям

$$\eta = \eta^T = \eta^* = \eta^\dagger = \eta^{-1}. \quad (1.29)$$

Условия (1.28), (1.29) еще не определяют полностью матрицу η , поскольку они не учитывают того, что функция $\bar{\Psi}(x)$ является решением уравнения (1.24). Чтобы найти дополнительные ограничения, накладываемые благодаря этому на матрицу η , проведем над уравнением (1.1) операции эрмитовского сопряжения и умножения на η . В результате получим

$$(\partial_i \Psi^\dagger \Gamma_i^\dagger - \partial_4 \Psi^\dagger \Gamma_4^\dagger + \Psi^\dagger m) = 0. \quad (1.30)$$

Потребуем, чтобы от уравнения (1.30) можно было перейти к уравнению (1.24). Очевидно, что для этого должны выполняться перестановочные соотношения

$$\Gamma_i^\dagger \eta = -\eta \Gamma_i, \quad \Gamma_4^\dagger \eta = \eta \Gamma_4. \quad (1.31)$$



В случае РВУ (1.2) к соотношениям (1.31) надо добавить условие

$$\Gamma_0^\dagger \eta = \eta \Gamma_0, \quad (1.32)$$

которое совместно с (1.31) приводит к уравнению

$$-(\partial_\mu \bar{\Psi}) \Gamma_\mu + \bar{\Psi} \Gamma_0 = 0 \quad (1.33)$$

для функции $\bar{\Psi}$.

На выбор всевозможных РВУ накладывается также условие: среди состояний микрообъекта должны отсутствовать такие, которым соответствует нулевая энергия. Это условие существенно ограничивает возможный вид минимальных полиномов матриц Γ_μ .

Как показано в работе [12], минимальный полином матриц Γ_4 (а также Γ_μ) должен иметь структуру

$$\Gamma_4^n (\Gamma_4^2 - \lambda_1^2) (\Gamma_4^2 - \lambda_2^2) \dots = 0, \quad (1.34)$$

где все λ_i – вещественные и различные числа, n – целое положительное число либо ноль.

Условия дефинитности энергии и заряда для микрообъектов с одной массой могут быть представлены соответственно в виде неравенств [13]

$$(-1)^{n+1} [(\text{Sp}(\Gamma_4^{n+1} \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^n \eta))^2] > 0, \quad (1.35)$$

$$(-1)^n [(\text{Sp}(\Gamma_4^{n+1} \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^n \eta))^2] > 0. \quad (1.36)$$

При этом в соответствии с теоремой Паули полагается, что условие (1.35) должно иметь место в случае целого, а (1.36) – в случае полуцелого спина.

Наконец, что касается матрицы Γ_0 в уравнении (1.2), то при выборе соответствующего базиса в пространстве волновой функции она всегда может быть приведена к диагональному виду. При этом матрица Γ_0 состоит из независимых скалярных блоков a_τ , сопоставляемых неприводимым представлениям $\tau \in T$. Часть указанных блоков являются нулевыми. Из требования инвариантности РВУ (1.2) относительно преобразований полной группы Лоренца следует, что ненулевые блоки a_τ удовлетворяют равенству

$$a_\tau = a_{\dot{\tau}}. \quad (1.37)$$

В случае конечномерных РВУ к такому же равенству приводит и условие возможности лагранжевой формулировки РВУ (1.2).

При построении РВУ с заданным спектром массовых и спиновых состояний удобно использовать так называемый канонический базис, или базис Гельфанда – Яглома [8]. В этом базисе компоненты волновой функции ψ_{sk}^τ описывают «чистые» состояния, то есть состояния с определенным значением спина s и его проекции k ; верхний индекс указывает на принадлежность данного состояния к неприводимому представлению τ . В базисе Гельфанда – Яглома матрица Γ_4 имеет квазидиагональный вид

$$\Gamma_4 = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2s+1}, \quad (1.38)$$



где I_{2s+1} – единичная матрица размерности $2s + 1$; C^s – матричный блок, отвечающий спину s , в том смысле, что если матрица C^s имеет ненулевые корни (собственные значения), то частица обладает спином s . Возможные значения массы микрообъекта в случае РВУ (1.1) выражаются через ненулевые корни λ_i блока C^s по формуле

$$m_i^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_i^{(s)}|}. \quad (1.39)$$

Спиновый блок C^s строится следующим образом. Из схемы зацеплений, на которой базируется РВУ, выбираются все неприводимые компоненты $\tau \sim (l_1, l_2)$, удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \quad (1.40)$$

О таких представлениях говорят, что они формируют блок C^s . Затем эти компоненты для удобства нумеруются. Матрица C^s состоит из элементов $c_{\tau\tau'}^s$, в обозначении которых номера представлений τ, τ' играют роль матричных индексов. При этом незацепляющимся компонентам τ, τ' соответствуют нулевые элементы $c_{\tau\tau'}^s$. Отсюда следует, что в схеме зацеплений, предназначенной для описания спина s , должно содержаться, как минимум, два зацепляющихся неприводимых представления, которые удовлетворяют условию (1.40).

Требование релятивистской инвариантности РВУ (1.1), (1.2) накладывает следующие ограничения на элементы $c_{\tau\tau'}^s$:

$$\begin{aligned} c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s + l_+ + 2)(s - l_+ - 1)} \quad \text{если } l'_+ = l_+ + 1, \quad l'_- = l_-, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} \sqrt{(s + l_- + 1)(s - l_-)} \quad \text{если } l'_+ = l_+, \quad l'_- = l_- + 1, \\ c_{\tau\tau'}^s &= c_{\tau\tau'} (s + \frac{1}{2}) \quad \text{если } l'_+ = l_+, \quad l'_- = l_-, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где $l_+ = l_1 + l_2$, $l_- = |l_1 - l_2|$, $l'_+ = l'_1 + l'_2$, $l'_- = |l'_1 - l'_2|$; $c_{\tau\tau'}$ – произвольные комплексные числа в указанных случаях, а в остальных случаях – равные нулю.

Инвариантность РВУ относительно операции пространственного отражения, задаваемой матрицей P , налагает на числа $c_{\tau\tau'}$ ограничения

$$c_{\tau\tau'} = c_{\dot{\tau}\dot{\tau}'} \quad \text{если } \dot{\tau} \neq \tau, \dot{\tau}' \neq \tau'; \quad (1.42)$$

$$c_{\tau\tau'} = \pm c_{\dot{\tau}\dot{\tau}'} \quad \text{если } \dot{\tau} = \tau, \dot{\tau}' \neq \tau' \quad \text{или} \quad \dot{\tau} \neq \tau, \dot{\tau}' = \tau'. \quad (1.43)$$

Знак «+» в условии (1.43) (для определенности берем первый вариант) соответствует случаю, при котором оператор P действует в подпространствах R^τ и $R^{\tau'}$ одинаково, то есть

$$P\psi_{sk}^\tau = (-1)^{[s]}\psi_{sk}^\tau, \quad P\psi_{sk}^{\tau'} = (-1)^{[s]}\psi_{sk}^{\tau'}. \quad (1.44)$$

Если же оператор P действует в R^τ и $R^{\tau'}$ по-разному

$$P\psi_{sk}^\tau = (-1)^{[s]+1}\psi_{sk}^\tau, \quad P\psi_{sk}^{\tau'} = (-1)^{[s]}\psi_{sk}^{\tau'}, \quad (1.45)$$

то в условии (1.43) выбирается знак «-».



При $\tau = \dot{\tau}$, $\tau' = \dot{\tau}'$ имеем $c_{\tau\tau'} \neq 0$ тогда, когда оператор P действует одинаково в пространствах R^τ , $R^{\tau'}$; каких-либо других ограничений на числа $c_{\tau\tau'}$ в этом случае не накладывается.

Матрица η билинейной формы (1.17) в базисе Гельфанда – Яглома имеет структуру, аналогичную (1.38):

$$\eta = \bigoplus_s \eta^s \otimes I_{2s+1}. \quad (1.46)$$

Условия (1.20), (1.21), (1.29) приводят к тому, что отличными от нуля являются лишь элементы $\eta_{\tau\dot{\tau}}^s$, причем

$$\eta_{\tau\dot{\tau}}^s = \eta_{\dot{\tau}\tau}^s = -\eta_{\tau\dot{\tau}}^{s+1}. \quad (1.47)$$

Условие (1.31) приводит к соотношению

$$c_{\tau\tau'}^s \eta_{\tau'\dot{\tau}'}^s = (c_{\dot{\tau}'\tau'}^s)^* \eta_{\tau\dot{\tau}}^s. \quad (1.48)$$

После наложения на элементы матриц Γ_4 , Γ_0 , η связей (1.41)–(1.43), (1.47), (1.48) в выборе этих элементов остается, как правило, произвол, который может быть использован для удовлетворения условиям (1.34) и (1.35) (или (1.36)). Если это оказывается невозможным, значит, на основе рассматриваемой схемы зацеплений РВУ для описания микрообъекта с заданным спектром массовых и спиновых состояний построить нельзя.

Перечисленные положения теории РВУ были сформулированы в 20-х – 50-х годах прошлого столетия. Они соответствуют представлениям того времени об элементарных частицах как бесструктурных точечных микрообъектах с единственной внутренней степенью свободы (спином), допускающей пространственно-временную трактовку. Однако, по мере установления новых экспериментальных фактов (существование структуры у некоторых из частиц, наличие у них дополнительных (помимо спина) внутренних степеней свободы и др.) вышеуказанные представления претерпели существенные изменения. Изменилось и само понятие «элементарная частица». В отношении действительно (на сегодняшний день) бесструктурных микрообъектов прочно вошел в обиход термин «фундаментальная частица». Возникло представление о существовании принципиально новых физических объектов, объединяющих качества микрочастиц (полей) с ненулевой и нулевой массой (например, электрослабое поле), а также свойства безмассовых микрообъектов с различными значениями спиральности (поля, осуществляющие взаимодействие незамкнутых струн). Оставались нерешенными и «старые» проблемы теории РВУ. С одной стороны, ее постулативный базис представляется недостаточно полным, поскольку не ограничивает жестко спектр возможных элементарных (либо хотя бы фундаментальных) микрообъектов. С другой, использование в теории РВУ только симметрий пространственно-временного происхождения затрудняет описание дополнительных помимо спина (изоспиновых) внутренних степеней свободы. Вне поля зрения теории РВУ оставался и вопрос о происхождении массы.

Таким образом, теория РВУ столкнулась с вызовами, на которые она, казалось бы, не способна дать адекватные ответы. Поэтому интерес к ней в последние два–три десятилетия существенно снизился.



Одним из научных центров, где исследования по теории РВУ берут начало с работ проф. Ф. И. Федорова [11–14] и активно ведутся до настоящего времени, является белорусская школа теоретической физики. Нынешняя направленность этих исследований состоит в показе того, что при определенной «модернизации» постулативного базиса теории РВУ, но сохранении ее ключевых основ (о чем подробно будет говориться ниже), данная теория способна успешно интерпретировать многие достижения современной физики высоких энергий как теоретического, так и экспериментального характера.

Некоторые интересные, на наш взгляд, в этом отношении результаты, полученные за последние годы, излагаются в настоящей работе.

2. Релятивистские волновые уравнения для частиц с низшими спинами. Подход Гельфанда – Яглома

В дальнейшем мы будем часто применять подход Гельфанда – Яглома, суть которого в общих чертах была изложена в предыдущем разделе. Покажем, как им конкретно пользоваться, на примерах известных простейших РВУ для частиц с низшими спинами.

Рассмотрим сначала схему зацеплений (1.14), в которой неприводимое представление $(0, 0)$ соответствует скалярной функции ψ_0 , а представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ – векторной функции ψ_μ . Матрица Γ_4 РВУ (1.1), базирующегося на данном наборе неприводимых представлений группы Лоренца, в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где C^0 и C^1 – блоки, сопоставляемые спинам 0 и 1. Снабдив рассматриваемые представления номерами

$$(0, 0) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 2, \quad (2.2)$$

играющими роль матричных индексов, получим для матриц C^0, C^1 выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 \\ c_{21}^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = 0. \quad (2.3)$$

При этом, как нетрудно видеть, соотношения (1.41) – (1.43) никаких ограничений на числа c_{12}^0, c_{21}^0 не накладывают.

Элементы матрицы η лоренц-инвариантной билинейной формы

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \eta_{22}^1 \quad (2.4)$$

выберем следующим образом:

$$\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = -\eta_{22}^1 = 1. \quad (2.5)$$



При таком выборе условие (1.48) приводит к равенству

$$c_{21}^0 = (c_{12}^0)^*. \quad (2.6)$$

Полагая $c_{12}^0 = 1$, получим для матриц C^0 и Γ_4 окончательно выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Легко убедиться, что минимальное уравнение для матрицы Γ_4 имеет вид

$$\Gamma_4(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (2.8)$$

Вид остальных матриц Γ_i определяется по формуле (1.7).

Для дефинитности энергии должно в данном случае ($n = 1$) выполняться неравенство

$$(-1)^2 \left[(\text{Sp}(\Gamma_4^2 \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4 \eta))^2 \right] > 0, \quad (2.9)$$

справедливость которого легко проверяется.

Из (2.7), (2.8) следует, что состоянию со спином $s = 0$ в силу формулы (1.39) соответствует одно значение массы, а состояние со спином $s = 1$ отсутствует. В литературе такое уравнение называется обычно уравнением Даффина – Кеммера для скалярной частицы.

Тензорная формулировка этого уравнения имеет вид

$$\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0, \quad \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда нетрудно получить уравнение второго порядка для скалярной функции ψ_0

$$(\square - m^2)\psi_0 = 0, \quad (2.11)$$

означающее, что речь действительно идет об описании частицы с ненулевой массой и спином $s = 0$.

Для построения простейшего РВУ для частицы с ненулевой массой и спином $s = 1$ служит схема зацеплений (1.15), где представления $(0, 1)$, $(1, 0)$ в совокупности соответствуют антисимметричному тензору второго ранга $\psi_{[\mu\nu]}$. Матрица Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома в данном случае по-прежнему имеет блочную структуру (2.1), где с учетом нумерации $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim 1$, $(0, 1) \sim 2$, $(1, 0) \sim 3$ для спиновых блоков C^0 , C^1 имеют место выражения

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^1 & c_{13}^1 \\ c_{21}^1 & 0 & 0 \\ c_{31}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^0 = 0. \quad (2.12)$$



Соотношения (1.41) здесь, как и в случае спина $s = 0$, никаких ограничений на числа c_{ij}^1 не накладывают. Инвариантность относительно преобразований пространственных отражений (смотри условия (1.43)) дает

$$c_{12}^1 = \pm c_{13}^1, \quad c_{21}^1 = \pm c_{31}^1. \quad (2.13)$$

Возможность лагранжевой формулировки теории приводит к условию

$$c_{12}^1 = \frac{\eta_{11}^1}{\eta_{23}^1} (c_{31}^1)^*. \quad (2.14)$$

Ненулевые элементы матрицы билинейной инвариантной формы

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \eta_{11}^0, \\ \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{23}^1 \\ 0 & \eta_{32}^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

выберем следующим способом:

$$-\eta_{11}^0 = \eta_{11}^1 = \pm \eta_{23}^1 = \pm \eta_{32}^1 = 1. \quad (2.16)$$

Тогда из соотношения (2.14) с учетом (2.13) приходим к равенствам

$$c_{21}^1 = (c_{12}^1)^*, \quad c_{31}^1 = (c_{13}^1)^*. \quad (2.17)$$

Выбирая $c_{12}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, для блока C^1 получаем выражение

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где знаки «+» и «-» коррелируют между собой. Блок C^1 (2.18) имеет единственное с точностью до знака ненулевое собственное значение 1, то есть построенное РВУ описывает частицу с ненулевой массой и спином $s = 1$. Соотношения (2.8), (2.9) здесь также выполняются. В литературе данное РВУ называют уравнением Даффина – Кеммера для векторной частицы.

Приведем еще его тензорную формулировку:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \quad -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (2.19)$$

Из системы первого порядка (2.19) получается уравнение второго порядка (уравнение Прока)

$$(\square - m^2)\psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.20)$$



Простейшее уравнение для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ (уравнение Дирака) основывается на схеме зацеплений (1.13), соответствующей биспинору первого ранга. Матрица Γ_4 этого уравнения, представленного в стандартной форме (1.1), в базисе Гельфанда – Яглома запишется следующим образом:

$$\Gamma_4 = C^{1/2} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21}^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

(смысл нижних индексов здесь очевиден: $(0, \frac{1}{2}) \sim 1$, $(\frac{1}{2}, 0) \sim 2$). Применяя к элементам этой матрицы условия (1.41), (1.42), (1.48), будем иметь

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes I_2. \quad (2.22)$$

Остальные матрицы Γ_i имеют при этом вид

$$\Gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad (2.23)$$

где σ_i – матрицы Паули. Матрица билинейной формы совпадает с матрицей Γ_4 :

$$\eta = \Gamma_4. \quad (2.24)$$

Матрицы Дирака удовлетворяют алгебре

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

и минимальному уравнению

$$\Gamma_\mu^2 - 1 = 0 \quad (\text{где нет суммирования по } \mu). \quad (2.26)$$

В дальнейшем, следуя сложившейся традиции, матрицы Дирака будем обозначать через γ_μ .

Заметим, что с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

матрицу $\Gamma_4 = \gamma_4$ можно привести к виду

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes I_2, \quad (2.28)$$

не изменяя при этом вида выражений для матриц $\Gamma_i = \gamma_i$.

Условие положительной дефинитности заряда (1.36) имеет в рассматриваемом случае ($n = 0$) вид

$$(\text{Sp}(\gamma_4 \eta))^2 - (\text{Sp} \eta)^2 > 0. \quad (2.29)$$



Поскольку

$$\text{Sp } \eta = \text{Sp } \gamma_4 = 0, \quad \text{Sp}(\gamma_4 \eta) = 4,$$

условие (2.29) выполняется.

Необходимо указать на важное свойство, которое объединяет рассмотренные выше РВУ. Нетрудно видеть, что матрицы Γ_4 в уравнениях Даффина – Кеммера для скалярной и векторной частиц, как и в случае уравнения Дирака, приводимы к диагональному виду.

В работах [8; 9] показано, что из всех конечномерных уравнений с приводимой к диагональному виду матрицей Γ_4 только уравнения Даффина – Кеммера имеют положительно определенную энергию и только уравнение Дирака имеет положительно определенный заряд. Возможны, однако, уравнения с положительной энергией или зарядом, у которых Γ_4 неприводима к диагональному виду. Ниже мы рассмотрим примеры таких уравнений.

Самым простым и известным среди РВУ такого типа является уравнение Фирца – Паули для спина $s = \frac{3}{2}$. Дадим его формулировку в подходе Гельфанда – Яглома. С этой целью возьмем схему зацеплений (1.16) неприводимых представлений группы Лоренца и проанализируем ее с точки зрения возможности построения всевозможных теорий спина $s = \frac{3}{2}$.

Матрица Γ_4 уравнения (1.1), соответствующего набору представлений, содержащихся в (1.16), будет иметь в базисе Гельфанда – Яглома вид

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^{1/2} \otimes I_2 & 0 \\ 0 & C^{3/2} \otimes I_4 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{34}^{3/2} \\ c_{43}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & c_{13}^{1/2} & 0 \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & c_{24}^{1/2} \\ c_{31}^{1/2} & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} \\ 0 & c_{42}^{1/2} & c_{43}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

где использована нумерация $(0, \frac{1}{2}) \sim 1, (\frac{1}{2}, 0) \sim 2, (\frac{1}{2}, 1) \sim 3, (1, \frac{1}{2}) \sim 4$. Матрица η имеет аналогичную структуру

$$\eta = (\eta^{1/2} \otimes I_2) \oplus (\eta^{3/2} \otimes I_4),$$

причем отличными от нуля элементами ее блоков $\eta^{1/2}, \eta^{3/2}$ являются

$$\eta_{12}^{1/2} = \eta_{21}^{1/2}, \quad \eta_{34}^{1/2} = \eta_{43}^{1/2} = -\eta_{34}^{3/2} = -\eta_{43}^{3/2}.$$

Требование инвариантности теории относительно преобразований собственной группы Лоренца приводит в данном случае к соотношениям

$$c_{34}^{3/2} = 2c_{34}^{1/2}, \quad c_{43}^{3/2} = 2c_{43}^{1/2}. \quad (2.32)$$



Для P -инвариантности строящегося РВУ необходимо выполнение равенств (см. условия (1.42)–(1.45))

$$\begin{aligned}c_{12}^{1/2} &= c_{21}^{1/2}, & c_{34}^{1/2} &= c_{43}^{1/2}, \\c_{13}^{1/2} &= c_{24}^{1/2}, & c_{31}^{1/2} &= c_{42}^{1/2}, & c_{34}^{3/2} &= c_{43}^{3/2}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Наконец, возможность получения искомого РВУ из инвариантной функции Лагранжа в соответствии с (1.48) накладывает на элементы c_{ij}^s матрицы Γ_4 ограничения

$$c_{12}^{1/2}, c_{21}^{1/2}, c_{34}^{1/2}, c_{43}^{1/2} \in \mathbb{R}\tag{2.34}$$

и

$$\begin{aligned}c_{42}^{1/2} \eta_{21}^{1/2} &= (c_{13}^{1/2})^* \eta_{43}^{1/2}, \\c_{31}^{1/2} \eta_{12}^{1/2} &= (c_{24}^{1/2})^* \eta_{34}^{1/2}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Для удобства дальнейших рассуждений перепишем условия (2.35) следующим образом:

$$c_{42}^{1/2} = (c_{13}^{1/2})^* f, \quad c_{31}^{1/2} = (c_{24}^{1/2})^* f, \quad f = \frac{\eta_{34}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} = \frac{\eta_{43}^{1/2}}{\eta_{21}^{1/2}}.\tag{2.36}$$

Не уменьшая общности, параметр f можно выбрать равным $+1$ или -1 , что равносильно двум существенно различным способам задания матрицы η :

$$-\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{34}^{3/2} = 1,\tag{2.37}$$

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{34}^{3/2} = 1.\tag{2.38}$$

На первом этапе рассмотрим всевозможные РВУ для спина $s = \frac{3}{2}$, накладывая лишь ограничения (2.32), (2.34), (2.35), то есть включая в множество полученных таким образом РВУ как P -инвариантные, так и P -неинвариантные уравнения. Для спинового блока $C^{3/2}$ существует, с точностью до эквивалентности, единственный вариант выбора его элементов: $c_{34}^{3/2} = c_{43}^{3/2} = 1$. Отсюда согласно (2.32) имеем $c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2} = \frac{1}{2}$, и блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ принимают вид

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ fd^* & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & fc^* & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.39}$$

где для краткости введены обозначения

$$c_{12}^{1/2} = a, \quad c_{21}^{1/2} = b, \quad c_{13}^{1/2} = c, \quad c_{24}^{1/2} = d.$$



Чтобы на основе матриц (2.39) получить РВУ, описывающее чистый спин $s = \frac{3}{2}$, необходимо потребовать обращения в нуль всех корней характеристического уравнения для спинового блока $C^{1/2}$

$$\lambda^4 - \left(fc^*d + fcd^* + ab + \frac{1}{4} \right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}fa|d|^2 - \frac{1}{2}fb|c|^2 + |c|^2|d|^2 \right) = 0. \quad (2.40)$$

Корни этого уравнения будут равными нулю при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}fa|d|^2 - \frac{1}{2}fb|c|^2 + |c|^2|d|^2 &= 0, \\ fc^*d + fcd^* + ab + \frac{1}{4} &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Структура (2.39) спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 соответствует некоторому обобщенному РВУ, из которого при определенных способах выбора параметров a, b, c, d получаются формулировки тех или иных конкретных уравнений для частицы со спином $\frac{3}{2}$. Учитывая возможности (2.37) и (2.38) задания матрицы билинейной формы η , целесообразно ввести классы РВУ первого типа с матрицами

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ d^* & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & c^* & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } f = +1, \quad (2.42)$$

и РВУ второго типа с матрицами

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ -d^* & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -c^* & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для } f = -1. \quad (2.43)$$

В случае РВУ второго типа система (2.41) допускает решение

$$a = b = -\frac{1}{2}, \quad c = d = \frac{1}{2},$$

которое приводит к матрице Γ_4 с блоками

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Нетрудно убедиться, что при этом условия (2.33) также выполняются. Таким образом, получается P -инвариантное РВУ, которое представляет собой уравнение Фирца – Паули в формализме Гельфанда – Яглома.



Матрица Γ_4 (2.30), (2.43) уравнения Фирца – Паули удовлетворяет минимальному уравнению

$$\Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0 \quad (2.45)$$

и, следовательно, неприводима к диагональному виду. Условие дефинитности заряда (1.36) принимает в данном случае вид

$$(\text{Sp}(\Gamma_4^3\eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^2\eta))^2 > 0. \quad (2.46)$$

Учитывая явные выражения для блоков $\eta^{1/2}$, $\eta^{3/2}$ матрицы η

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

получаем

$$\text{Sp}(\Gamma_4^2\eta) = 0, \quad \text{Sp}(\Gamma_4^3\eta) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.48)$$

Таким образом, условие (2.46) выполняется.

В рамках РВУ первого типа построить P -инвариантное РВУ, допускающее лагранжеву формулировку, нельзя. Действительно, условия (2.33) означают (в случае $f = +1$), что $a = b$, $c = d$, и тогда из (2.41) имеем $2|c|^2 + a^2 + \frac{1}{4} = 0$. Но это соотношение не может быть выполнено, поскольку параметр $a = c_{12}^{1/2}$, согласно (2.34), является вещественным.

Если же требование (2.33) не накладывать, то у системы (2.41) при $f = -1$ имеются решения

$$a = b = c = -d = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad a = b = -c = d = \frac{1}{2},$$

которые приводят к спиновым блокам

$$C^{1/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

где знаки «+» и «-» соответствуют первому и второму решениям соответственно. Полученные указанным способом РВУ описывают частицу со спином $s = \frac{3}{2}$, допускают лагранжеву формулировку, но не являются инвариантными по отношению к операции пространственного отражения.

Анализ схемы зацеплений (1.16) в подходе Гельфанда – Яглома позволяет сделать одно важное заключение. В рамках РВУ первого типа, полагая

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = d = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2.50)$$



приходим к матрице Γ_4 , минимальный полином которой имеет вид (2.26). Такой выбор согласуется с условиями (2.32)–(2.35) и приводит к РВУ дираковского типа, описывающему переменный спин $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. В спин-тензорной форме оно имеет хорошо известный вид

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \psi_\nu^\beta = 0, \quad (2.51)$$

являясь исходным для получения уравнения Рариты – Швингера путем наложения условий

$$\gamma_\nu \psi_\nu^\beta = 0, \quad \partial_\nu \psi_\nu^\beta = 0. \quad (2.52)$$

Поскольку эти условия, вырезающие лишний спин $\frac{1}{2}$, P -инвариантны и не изменяют структуры (2.37) матрицы билинейной формы, то очевидно, что уравнение Рариты – Швингера относится к РВУ первого типа. Уравнение же Фирца – Паули относится ко второму типу. Таким образом, обычно встречающееся в литературе [15; 16] отождествление этих уравнений нуждается в критическом переосмыслении.

3. РВУ с расширенным набором представлений группы Лоренца и внутренняя структура микрообъектов

Характерной особенностью всех рассмотренных выше РВУ является то, что в них используется набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для построения теории данного спина. При этом, в соответствии с идеологией релятивистской квантовой механики, трактующей элементарные частицы как точечные бесструктурные объекты, такие РВУ учитывают только спиновые свойства частиц. Возможность описания иных внутренних свойств частиц в ортодоксальном варианте теории РВУ не предусматривается.

Отказ от требования минимальности используемых наборов представлений группы Лоренца открывает новые возможности метода теории РВУ с точки зрения пространственно-временного (геометризованного) описания внутренних свойств частиц. Получение нераспадающихся по группе Лоренца уравнений, способных отображать внутреннюю структуру частицы с заданным спином s , возможно либо за счет включения в схему зацеплений представлений с более высокими весами, либо за счет использования кратных представлений группы Лоренца. В настоящей главе мы покажем, как в рамках подхода теории РВУ с расширенными наборами представлений группы Лоренца может осуществляться описание внутренней электромагнитной структуры частиц с низшими спинами.

Впервые РВУ для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$, которое возникает за счет привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представления волновой функции, было предложено Петрашем [17]. Дадим сжатое изложение теории уравнения Петраша в подходе Гельфанда – Яглома. Для этого рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} (0, \frac{1}{2})' & \text{---} & (\frac{1}{2}, 0)' \\ | & & | \\ (\frac{1}{2}, 1) & \text{---} & (1, \frac{1}{2}) \\ | & & | \\ (0, \frac{1}{2}) & \text{---} & (\frac{1}{2}, 0) . \end{array} \quad (3.1)$$



Пронумеруем неприводимые представления, содержащиеся в (3.1):

$$\begin{aligned} (0, \frac{1}{2}) \sim 1, \quad (0, \frac{1}{2})' \sim 2, \quad (1, \frac{1}{2}) \sim 3, \\ (\frac{1}{2}, 0) \sim 4, \quad (\frac{1}{2}, 0)' \sim 5, \quad (\frac{1}{2}, 1) \sim 6. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тогда для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4

$$\Gamma_4 = (C^{1/2} \otimes I_2) \oplus (C^{3/2} \otimes I_4) \quad (3.3)$$

получим выражения

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14}^{1/2} & 0 & c_{16}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{25}^{1/2} & c_{26}^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} & c_{35}^{1/2} & c_{36}^{1/2} \\ c_{41}^{1/2} & 0 & c_{43}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{52}^{1/2} & c_{53}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{61}^{1/2} & c_{62}^{1/2} & c_{63}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{36}^{3/2} \\ c_{63}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Для исключения спина $\frac{3}{2}$ надо положить

$$c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2} = 0, \quad \text{или} \quad C^{3/2} = 0. \quad (3.5)$$

Отсюда в силу (1.41) следует

$$c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2} = 0. \quad (3.6)$$

Условие (1.42) P -инвариантности теории приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{14}^{1/2} = c_{14}^{1/2}, \quad c_{25}^{1/2} = c_{52}^{1/2}, \quad c_{16}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \\ c_{26}^{1/2} = c_{53}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{61}^{1/2}, \quad c_{35}^{1/2} = c_{62}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Возможность лагранжевой формулировки (формула (1.48)) дает

$$c_{14}^{1/2}, c_{25}^{1/2} \in \mathbb{R}; \quad c_{34}^{1/2} = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}} (c_{16}^{1/2})^*, \quad c_{35}^{1/2} = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}} (c_{26}^{1/2})^*. \quad (3.8)$$

С учетом ограничений (3.5)–(3.8) для спинового блока $C^{1/2}$ получится выражение

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$



где для упрощения записи использованы обозначения

$$c_1 = c_{14}^{1/2}, \quad c_2 = c_{25}^{1/2}, \quad c_3 = c_{16}^{1/2}, \quad c_4 = c_{26}^{1/2},$$
$$f_1 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}, \quad f_2 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}}. \quad (3.10)$$

Характеристическое уравнение для блока C имеет вид

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2)\lambda^2 + (c_1c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2)\lambda + f_1c_2|c_3|^2 + f_2c_1|c_4|^2 = 0. \quad (3.11)$$

Чтобы получить одно значение массы, надо наложить условия

$$c_1c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2 = 0, \quad (3.12)$$
$$f_1c_2|c_3|^2 + f_2c_1|c_4|^2 = 0.$$

При этом ненулевое собственное значение блока C , не уменьшая общности, можно выбрать равным единице:

$$\lambda = c_1 + c_2 = 1. \quad (3.13)$$

Такой выбор приводит к следующим минимальным полиномам для спинового блока $C^{1/2}$ и матрицы Γ_4

$$(C^{1/2})^2[(C^{1/2})^2 - 1] = 0, \quad \Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (3.14)$$

Остается наложить условие дефинитности заряда (1.36), которое в рассматриваемом случае ($C^{3/2} = 0, n = 2$) принимает вид

$$\text{Sp} ((C^{1/2})^3 \eta^{1/2}) \neq 0, \quad (3.15)$$

где

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ \eta' & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} \eta_{14}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{36}^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Отсюда с учетом выражения (3.9) получаем неравенство

$$\eta_{14}^{1/2}c_1^3 + \eta_{25}^{1/2}c_2^3 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{14}^{1/2})c_1|c_3|^2 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{25}^{1/2})c_2|c_4|^2 \neq 0. \quad (3.17)$$

Совместное выполнение условий (3.12), (3.13), (3.17) можно обеспечить, выбирая, например

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad c_4 = \frac{2}{3}, \quad (3.18)$$

$$\eta_{14}^{1/2} = -1, \quad \eta_{25}^{1/2} = 1, \quad \eta_{36}^{1/2} = 1. \quad (3.19)$$



При этом матрицы C и η' принимают вид

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Таким образом, мы получили 20–компонентное РВУ со схемой зацеплений (3.1), с недиагонализуемой матрицей Γ_4 , которое описывает частицу со спином $s = \frac{1}{2}$ и удовлетворяет необходимым физическим требованиям.

Теперь покажем, что на основе схемы зацеплений (3.1) можно построить также РВУ для частицы со спином $s = \frac{3}{2}$ [18]. Сохраняя прежнюю нумерацию неприводимых представлений, содержащихся в (3.1), опять приходим к общему виду (3.4) спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома.

Условия (1.41) релятивистской инвариантности приводят к ограничениям

$$c_{36}^{3/2} = 2c_{36}^{1/2}, \quad c_{63}^{3/2} = 2c_{63}^{1/2}. \quad (3.21)$$

Инвариантность РВУ относительно пространственных отражений помимо соотношений (3.7) дает

$$c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2}, \quad c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2}. \quad (3.22)$$

Возможность лагранжевой формулировки теории дополняет условия (3.8) ограничением

$$c_{36}^{1/2} \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Поскольку нас в данном случае интересует спин $\frac{3}{2}$, не уменьшая общности, можно положить

$$c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2} = 1. \quad (3.24)$$

При таком выборе условия (3.21)–(3.23) приводят к спиновым блокам $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ вида

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где использованы обозначения (3.10).

Характеристическое уравнение для матрицы C имеет вид

$$\lambda^3 - \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{2} \right) \lambda^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1 |c_3|^2 - f_2 |c_4|^2 \right) \lambda - \frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 = 0. \quad (3.27)$$



Для исключения состояний со спином $\frac{1}{2}$ надо потребовать, чтобы все собственные значения блока $C^{1/2}$ были равными нулю. Это требование приводит к условиям

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} &= 0, \\ \frac{c_1 + c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1 |c_3|^2 - f_2 |c_4|^2 &= 0, \\ -\frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

в которых числа f_1, f_2 могут независимо друг от друга принимать значения $+1$ или -1 .

Нетрудно видеть, что условия (3.28) совместны, причем здесь (как и для спина $\frac{1}{2}$) в выборе параметров $c_1, c_2, c_3, c_4, f_1, f_2$ существует достаточно широкий произвол. Но при этом во всех случаях минимальные уравнения для спиновых блоков $C^{1/2}$ (3.25), $C^{3/2}$ (3.26) и матрицы Γ_4 имеют один и тот же вид

$$(C^{1/2})^3 = 0, \quad (C^{3/2})^2 - 1 = 0, \quad (3.29)$$

$$\Gamma_4^3 (\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (3.30)$$

Поскольку в данной работе мы не ставим цель рассмотреть все имеющиеся возможности построения РВУ для спина $\frac{3}{2}$ на основе схемы зацеплений (3.1), то положим, например:

$$f_1 = -1, \quad f_2 = -1, \quad (3.31)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -1, \quad |c_3| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |c_4| = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3.32)$$

Такой выбор приводит к матрице билинейной формы с блоками

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

и спиновому блоку $C^{1/2}$ матрицы Γ_4

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$



Условие дефинитности заряда в соответствии с (3.30) ($n = 3$) принимает вид

$$(\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta))^2 < 0. \quad (3.35)$$

Используя полученные явные выражения для матриц Γ_4 и η , находим

$$\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta) = 0, \quad \text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta) = 8, \quad (3.36)$$

откуда следует, что неравенство (3.35) выполняется.

Для построения РВУ, описывающих микрообъекты со спинами $s = 0, 1$ и отличающихся от известных уравнений Даффина – Кеммера, рассмотрим набор неприводимых представлений группы Лоренца [19; 20]

$$(0, 0) \oplus 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0), \quad (3.37)$$

образующих схему зацеплений

$$\begin{array}{c} (0, 0) \\ | \\ (0, 1) \text{ — } 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ — } (1, 0), \end{array} \quad (3.38)$$

где векторное представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ имеет кратность, равную двум (в дальнейшем для различения этих представлений одно из них будем пометать штрихом).

Блочная структура матрицы Γ_4 РВУ, соответствующего схеме (3.37), в базисе Гельфанда – Яглома имеет вид (2.1). Пронумеровав содержащиеся в (3.37) неприводимые компоненты способом

$$(0, 0) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 3, \quad (0, 1) \sim 4, \quad (1, 0) \sim 5, \quad (3.39)$$

после применения условий релятивистской и P -инвариантности теории получим для блоков C^0, C^1 выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 & c_{13}^0 \\ c_{21}^0 & 0 & 0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{24}^1 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{34}^1 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Ненулевые элементы матрицы билинейной формы η , которая в базисе Гельфанда – Яглома имеет вид

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{22}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{45}^1 \\ 0 & 0 & \eta_{54}^1 & 0 \end{pmatrix},$$



выберем следующим образом:

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{22}^0 = \eta_{33}^0 = \eta_{22}^1 = -\eta_{33}^1 = -\eta_{45}^1 = -\eta_{54}^1 = 1. \quad (3.42)$$

Тогда условие (1.48) возможности лагранжевой формулировки строящегося РВУ приводит к соотношениям

$$c_{21}^0 = -(c_{12}^0)^*, \quad c_{31}^0 = (c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^1 = -(c_{24}^1)^*, \quad c_{43}^1 = (c_{34}^1)^*. \quad (3.43)$$

Остающийся произвол в выборе элементов матрицы Γ_4 можно использовать для получения РВУ с требуемым значением спина.

Так, полагая

$$c_{12}^0 = 0, \quad c_{13}^0 = c_{24}^1 = c_{34}^1 = 1, \quad (3.44)$$

придем к спиновым блокам

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Нетрудно убедиться в справедливости минимальных уравнений

$$(C^1)^3 = 0, \quad C^0[(C^0)^2 - 1] = 0, \quad (3.46)$$

$$\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \quad (3.47)$$

Из (3.46) вытекает, что состоянию со спином $s = 0$ соответствует одно значение массы, а все собственные значения блока C^1 равны нулю, то есть состояния со спином $s = 1$ отсутствуют. Таким образом, получаем РВУ для микрообъекта со спином $s = 0$ и одним значением массы.

Используя выражения (3.41), (3.42), (3.45) для матриц Γ_4 и η , нетрудно убедиться, что

$$\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta) = 0, \quad \text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta) = 2. \quad (3.48)$$

Отсюда вытекает справедливость условия дефинитности энергии, имеющего для данного РВУ вид неравенства (смотри (1.35), $n = 3$)

$$(-1)^4 \left[(\text{Sp}(\Gamma_4^4 \eta))^2 - (\text{Sp}(\Gamma_4^3 \eta))^2 \right] > 0. \quad (3.49)$$

Тензорная формулировка построенного РВУ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\psi'_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu - \partial_\mu \psi'_\nu + \partial_\nu \psi'_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (3.50)$$



где ψ_0 – скаляр, ψ_μ и ψ'_μ – 4-векторы, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга. Из (3.50) нетрудно получить уравнение второго порядка

$$(\square - m^2)\psi_0 = 0, \quad (3.51)$$

означающее, что система (3.50) действительно описывает микрочастицу с ненулевой массой и спином $s = 0$.

Для построения на основе схемы зацеплений (3.37) РВУ для микрочастицы со спином $s = 1$ выберем элементы матрицы (3.41) следующим образом:

$$\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = -\eta_{33}^0 = -\eta_{22}^1 = \eta_{33}^1 = \eta_{45}^1 = \eta_{54}^1 = 1. \quad (3.52)$$

Тогда в соответствии с условиями (1.48) будем иметь

$$c_{21}^0 = (c_{12}^0)^*, \quad c_{31}^0 = -(c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^1 = -(c_{24}^1)^*, \quad c_{43}^1 = (c_{34}^1)^*. \quad (3.53)$$

В рамках остающегося произвола в выборе элементов спиновых блоков C^0, C^1 (3.40) возьмем

$$\begin{aligned} c_{12}^0 = c_{13}^0 = c_{21}^0 = -c_{31}^0 = 1, \\ c_{24}^1 = c_{42}^1 = 0, \quad c_{34}^1 = c_{43}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

В результате получаем для матриц η^0, η^1, C^0, C^1 окончательные выражения

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Легко убедиться, что минимальные уравнения для спиновых блоков (3.56) матрицы Γ_4 имеют вид

$$(C^0)^3 = 0, \quad C^1[(C^1)^2 - 1] = 0, \quad (3.57)$$

то есть данное РВУ действительно описывает микрочастицу со спином $s = 1$.

Из (3.57) следует, что минимальное уравнение для матрицы Γ_4 совпадает с аналогичным по смыслу уравнением (3.47) для скалярной частицы. Поэтому и условие дефинитности энергии совпадает здесь с (3.49). Используя определения (3.55), (3.56), убеждаемся в справедливости условия (3.49) и в случае обсуждаемого РВУ для векторной частицы.



Тензорная формулировка полученного РВУ с расширенным набором представлений для частицы со спином 1 такова:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi_\mu + \partial_\mu \psi'_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\lambda \psi_{[\mu\lambda]} - \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ \partial_\mu \psi_0 + m\psi'_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi'_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Из системы (3.58) вытекают уравнения

$$(\square - m^2)(\psi_\mu + \psi'_\mu) = 0, \quad \partial_\mu(\psi_\mu + \psi'_\mu) = 0,\tag{3.59}$$

которые однозначно указывают на то, что данная система действительно описывает векторную частицу с ненулевой массой.

Иные варианты расширенных РВУ для частиц с низшими спинами предлагаются в работах [21] (спин $\frac{1}{2}$), [22] (спин 0), [23] (спин 1).

Вопрос о физической неэквивалентности РВУ с минимальным и расширенным наборами представлений группы Лоренца для конкретных уравнений впервые был рассмотрен в работах [24; 25] (спин $\frac{1}{2}$), [19; 20] (спины 0, 1), [26] (спин $\frac{3}{2}$). Общее исследование этого вопроса для частиц с произвольным спином s и одной массой, взаимодействующих с электромагнитным полем, проведено в работах [27; 28].

Суть и основные результаты проведенного в [27; 28] исследования заключаются в следующем.

Сначала рассматриваются минимальное и расширенное уравнения для свободных частиц

$$(\Gamma_\mu^{(0)} \partial_\mu + m)\Psi_0(x) = 0,\tag{3.60}$$

$$(\Gamma_\mu^{(1)} \partial_\mu + m)\Psi_1(x) = 0,\tag{3.61}$$

заданные в пространствах неприводимых представлений группы Лоренца T_0 и $T_1 = T_0 + T'$ соответственно. Далее находится вид операторов R и K , переводящих ψ_0 в ψ_1 и обратно:

$$R = (A, 0), \quad K = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},\tag{3.62}$$

$$R\Psi_1 = (A, 0) \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = A\Psi_1^0 = \Psi_0,\tag{3.63}$$

$$K\Psi_0 = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \Psi_0 = \begin{pmatrix} F\Psi_0 \\ G\Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = \Psi_1.\tag{3.64}$$

Здесь A, F – прямоугольные числовые матрицы, удовлетворяющие условию

$$AF = I,\tag{3.65}$$



матрица G в общем случае содержит операторы дифференцирования. При этом для операторов R и K будем иметь

$$R\Gamma_{\mu}^{(1)}K = \Gamma_{\mu}^{(0)} + B_{\mu}, \quad (3.66)$$

где матрицы B_{μ} удовлетворяют уравнению

$$B_{\mu}\partial_{\mu}\Psi_0(x) = 0. \quad (3.67)$$

Затем рассматриваются уравнения

$$(\Gamma_{\mu}^{(0)}\mathcal{D}_{\mu} + m)\Phi_0(x) = 0, \quad (3.68)$$

$$(\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu} + m)\Phi_1(x) = 0, \quad (3.69)$$

которые описывают частицы, взаимодействующие с электромагнитным полем $A_{\mu}(x)$, введенным минимальным образом:

$$\partial_{\mu} \rightarrow \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}. \quad (3.70)$$

Оператор R , осуществляющий переход от функции $\Phi_1(x)$ к $\Phi_0(x)$, имеет тот же вид, что и в случае свободной частицы. Для оператора K' , осуществляющего обратный переход в случае взаимодействующей частицы, получим

$$K' = \begin{pmatrix} F \\ G + G' \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

где добавка G' обусловлена подстановкой (3.70). Уравнение (3.68) при этом приводится к виду

$$(R\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu}K' + m)\Phi_0(x) = 0, \quad (3.72)$$

или

$$(\Gamma_{\mu}^{(0)}\mathcal{D}_{\mu} + Q + m)\Phi_0(x) = 0, \quad (3.73)$$

где

$$Q \sim R\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu}G' + B_{\mu}\mathcal{D}_{\mu}. \quad (3.74)$$

Таким образом, после приведения уравнения (3.69) к уравнению типа (3.68) относительно волновой функции с минимально необходимым числом компонент в последнем появляется дополнительное слагаемое Q (3.74). Для частиц со спинами $s = \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$, описываемых рассмотренными выше РВУ с расширенными наборами представлений, данное слагаемое принимает вид

$$Q \sim \frac{ie}{m}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})J^{[\mu\nu]} = \frac{ie}{m}F_{[\mu\nu]}J^{[\mu\nu]}, \quad (3.75)$$



где $J^{[\mu\nu]}$ – генераторы представлений группы Лоренца в пространствах представлений (1.13) и (1.16), соответственно. В нерелятивистском приближении оно описывает дополнительный (аномальный) магнитный момент и приводит в лагранжиане к члену взаимодействия типа Паули.

В случае рассмотренных выше расширенных РВУ для частиц с целыми низшими спинами дополнительное слагаемое Q имеет вид

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\mu\nu]} e^{00}, \quad (3.76)$$

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\rho\sigma]} e^{[\mu\nu],[\rho\sigma]}, \quad (3.77)$$

где e^{AB} – обобщенные символы Кронекера, определяемые по формулам [29]

$$(e^{AB})_{CD} = \delta_{AC} \delta_{BD}. \quad (3.78)$$

В случае частицы со спином $s = 0$ член Q (3.76) в нерелятивистском приближении описывает наведенные во внешнем электромагнитном поле дипольные электрическую и магнитную поляризуемости этой частицы. Для частицы со спином $s = 1$ аналогичный член (3.77) описывает ее статическую тензорную электрическую поляризуемость.

Очевидно, что дополнительное взаимодействие с внешним электромагнитным полем должно влиять на вид матричных элементов конкретных процессов рассеяния. Подробные расчеты некоторых таких процессов проделаны в работах [19–28]. Показано, что в первом порядке теории возмущений указанное взаимодействие не проявляется. Например, рассеяние на кулоновском центре происходит одинаковым образом как в случае РВУ с минимальным, так и расширенным набором представлений группы Лоренца. Расчет сечений типичного процесса второго порядка – комптоновского рассеяния света на частицах, описываемых РВУ с расширенными наборами представлений – приводит во всех случаях к матричным элементам вида

$$M_1 = M_0 + M'. \quad (3.79)$$

Здесь M_0 – матричный элемент, отвечающий частице, которая описывается РВУ с минимальным набором представлений; M' – добавка, обусловленная наличием у частицы внутренней электромагнитной структуры. Явные выражения для этих добавок можно найти в вышеуказанных работах.

Таким образом, простое расширение используемого набора представлений, в том числе за счет включения в него повторяющихся неприводимых компонент, позволяет отразить внутреннюю структуру частиц в рамках обычного пространственно-временного описания методами теории РВУ. Очевидно, что в принципиальном отношении такой подход обладает преимуществом по сравнению с распространенным феноменологическим подходом, при котором дополнительные члены, описывающие специфические структурные эффекты, вводятся в лагранжиан вручную.

В заключение отметим немаловажное обстоятельство: все рассмотренные в данном параграфе «расширенные» РВУ для низших спинов свободны от трудностей, имеющих место при введении электромагнитного взаимодействия минимальным образом



в теориях высших спинов. Они являются перенормируемыми и не содержат непричинных решений, несмотря на недиагнализируемый характер матрицы Γ_4 (см. в этой связи, например, [22; 30]).

4. РВУ для киральной частицы со спином 1

В предыдущем параграфе было показано, что РВУ с расширенным наборами неприводимых представлений группы Лоренца (включая кратные) позволяют учитывать внутреннюю структуру элементарных частиц в рамках не распадающихся в релятивистски-инвариантном смысле уравнений. Вместе с тем использование кратных представлений в теории РВУ позволяет осуществлять также пространственно-временное описание дополнительных (помимо спина) внутренних степеней свободы частиц. Во избежание недопонимания отметим, что под пространственно-временным описанием в данном контексте понимается использование РВУ, не распадающихся в смысле полной группы Лоренца. Иными словами, речь идет об описании внутренних свойств элементарных частиц без включения в рассмотрение полевых индексов нелоренцевского происхождения.

Продемонстрируем сказанное на примере киральности – степени свободы, которая связана с двукратным вырождением состояний, сопряженных относительно операции пространственной инверсии. Понятие киральности в настоящее время широко используется в адронной физике, в которой оно появляется при пренебрежении массами легких u - и d -кварков. Уже существует ряд экспериментов при низких энергиях, результаты которых свидетельствуют в пользу существования взаимодействий, переносимых киральными частицами со спином 1. Подробный обзор по всем этим вопросам можно найти в [31].

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$\begin{array}{ccc}
 & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' & \\
 (0, 1) & \begin{array}{c} / \\ \backslash \end{array} & (1, 0) \\
 & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &
 \end{array} \quad (4.1)$$

которая содержит двукратное представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (как и в (3.38), штрих здесь введен для различения одинаковых компонент). Матрица Γ_4 РВУ, отвечающего схеме (4.1), имеет в базисе Гельфанда – Яглома квазидиагональную форму (2.1). Введем, как обычно, нумерацию представлений

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim 1, \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \sim 2, \quad (0, 1) \sim 3, \quad (1, 0) \sim 4. \quad (4.2)$$

Поскольку компоненты 1 и 2, формирующие спиновый блок C^0 , не зацепляются, получаем

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

то есть спин $s = 0$ здесь отсутствует.



Для блока C^1 имеем следующее общее выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{14}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & c_{24}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ c_{41}^1 & c_{42}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Требование инвариантности строящегося РВУ относительно преобразований собственной группы Лоренца в данном случае на элементы c_{ij}^1 никаких ограничений не накладывает. Инвариантность относительно операции P -инверсии приводит к условиям

$$c_{14}^1 = \pm c_{13}^1, \quad c_{41}^1 = \pm c_{31}^1, \quad c_{24}^1 = \pm c_{23}^1, \quad c_{42}^1 = \pm c_{32}^1. \quad (4.5)$$

При этом в соответствии с формулами (1.43)–(1.45) знак «+» («–») здесь берется тогда, когда оба представления $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ в схеме (4.1) являются истинно векторными (псевдовекторными). В указанных случаях получаем для спинового блока C^1 выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & \pm c_{13}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & \pm c_{23}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ \pm c_{31}^1 & \pm c_{32}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где одновременно берутся верхние либо нижние знаки.

Характеристическое уравнение блока C^1 имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{23}^1 c_{32}^1) = 0. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что этот блок имеет единственное с точностью до знака ненулевое собственное значение

$$\lambda = \pm \sqrt{2(c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{23}^1 c_{32}^1)}. \quad (4.8)$$

Другими словами, состояние со спином 1 не содержит дополнительных внутренних степеней свободы. Очевидно, что полученное таким образом РВУ сводится к уравнению Дирака – Кэлера для векторной частицы.

Иначе обстоит дело, когда одно из векторных представлений в схеме (4.1) – векторное, а второе – псевдовекторное. В этом случае требование P -инвариантности теории приводит к условиям

$$c_{14}^1 = c_{13}^1, \quad c_{41}^1 = c_{31}^1, \quad c_{24}^1 = -c_{23}^1, \quad c_{42}^1 = -c_{32}^1 \quad (4.9)$$

и соответственно к спиновому блоку C^1

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{13}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & -c_{23}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ c_{31}^1 & -c_{32}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$



Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{23}^1 c_{32}^1) + 4c_{13}^1 c_{31}^1 c_{23}^1 c_{32}^1 = 0. \quad (4.11)$$

Решения уравнения (4.11) $\lambda_1 = \pm\sqrt{2c_{13}^1 c_{31}^1}$ и $\lambda_2 = \pm\sqrt{2c_{23}^1 c_{32}^1}$ означают, что речь может идти о частице со спином $s = 1$ и, вообще говоря, двумя значениями массы

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{2c_{13}^1 c_{31}^1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{2c_{23}^1 c_{32}^1}}. \quad (4.12)$$

Однако, если положить

$$c_{13}^1 c_{31}^1 = c_{23}^1 c_{32}^1, \quad (4.13)$$

мы приходим к РВУ для частицы с одной массой, но двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному квантовому числу.

Произвол, остающийся в выборе элементов c_{ij}^1 блока C^1 (4.10) после наложения на них условия (4.13), используем для получения лагранжевой формулировки интересующего нас РВУ. Для этого элементы η_{ij}^0, η_{ij}^1 матрицы билинейной формы η зададим следующим образом:

$$-\eta_{11}^0 = \eta_{22}^0 = \eta_{11}^1 = -\eta_{22}^1 = \eta_{34}^1 = \eta_{43}^1 = 1. \quad (4.14)$$

Тогда требование (1.48) релятивистской инвариантности лагранжиана теории приводит к равенствам

$$c_{31}^1 = (c_{13}^1)^*, \quad c_{32}^1 = -(c_{23}^1)^*. \quad (4.15)$$

Не уменьшая общности, все еще остающиеся произвольными элементы c_{13}^1, c_{23}^1 можно выбрать, например, так:

$$c_{13}^1 = c_{23}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.16)$$

(при этом собственные значения блока C^1 будут равными ± 1).

Таким образом, для ненулевого блока C^1 матрицы Γ_4 и блоков η^0, η^1 матрицы η находим окончательно вид

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$



Для выяснення сэнса двукратнага вырожджэння становяніх мікрааб'екта, апісываемага атрыманым РВУ, зручна выкарыстаць яго тэнзорную фармуліровку

$$\begin{aligned}\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu &= 0, \\ \partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + m\tilde{\psi}_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

дзе велічыны ψ_μ , $\tilde{\psi}_\mu$, $\psi_{[\mu\nu]}$ сопаставляюцца прадставленням $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$, $(0, 1) \oplus (1, 0)$ адпаведна,

$$\tilde{\psi}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\alpha\beta]},\tag{4.20}$$

і $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тэнзор Леви–Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$).

Осуществляя в системе (4.19) подстановки

$$\begin{aligned}\varphi_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\mu - i\tilde{\psi}_\mu), & \varphi_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{[\mu\nu]} - i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}), \\ \chi_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\mu + i\tilde{\psi}_\mu), & \chi_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{[\mu\nu]} + i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}),\end{aligned}\tag{4.21}$$

преобразуем ее к прямой сумме двух семикомпонентных подсистем:

$$\begin{aligned}\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + m\varphi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\beta + m\varphi_{[\mu\nu]} &= 0\end{aligned}\tag{4.22}$$

и

$$\begin{aligned}\partial_\nu \chi_{[\mu\nu]} + m\chi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \chi_\beta + m\chi_{[\mu\nu]} &= 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Подсистемы (4.22), (4.23) инвариантны в смысле преобразований собственной группы Лоренца. Однако при операции пространственного отражения они переходят друг в друга. Так что по отношению к преобразованиям полной группы Лоренца система (4.22), (4.23), а значит и система (4.19), является нераспадающейся. Кроме того, заметим, что подсистемам (4.22), (4.23) по отдельности нельзя сопоставить удовлетворяющий стандартным требованиям лагранжиан. Корректная лагранжева формулировка возможна только для системы (4.22), (4.23), рассматриваемой в целом.

Итак, двукратно вырожденные состояния векторной частицы, описываемой построенным РВУ, связаны между собой операцией P -инверсии. Следовательно, дополнительное квантовое число, о котором идет речь, различает указанные P -сопряженные состояния и может трактоваться как киральность по аналогии с понятием киральности для безмассовых частиц.

Здесь важно отметить следующее. Как известно, для построения теории безмассовых частиц с киральностью S достаточно использования только представлений $(0, S)$ и $(S, 0)$, причем понятия киральности и спиральности (проекция спина на направление



импульса) в этом случае, по существу, совпадают. В случае частиц с ненулевой массой это уже не так: во-первых, понятия киральности и спиральности для них не совпадают; во-вторых, теория таких частиц, как ясно из вышеизложенного, с необходимостью базируется на наборе *зацепляющихся* неприводимых представлений группы Лоренца, включая кратные компоненты. Возможный физический смысл киральности применительно к обладающим массой виртуальным частицам будет обсужден в главе 7.

5. Тензорные РВУ дираковского типа и геометризованное описание внутренних степеней свободы фундаментальных частиц

Поскольку существование дополнительных внутренних квантовых чисел у фундаментальных частиц является в настоящее время твердо установленным фактом, возникает вопрос о возможности применения теории РВУ к описанию степеней свободы, связанных с внутренними, в том числе калибровочными, симметриями. Традиционные калибровочные теории фундаментальных частиц и их взаимодействий базируются, как правило, на уравнении Дирака, волновая функция которого снабжается свободным нелоренцевским индексом, играющим роль внутренней переменной. С точки зрения теории РВУ, такой подход означает фактически использование распадающихся по группе Лоренца уравнений. На этой основе строятся известные модели электрослабых и сильных взаимодействий, стандартная $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ модель.

Однако данный подход не в состоянии решить ряд проблем, в частности, он оказывается малоэффективным при включении в общую схему гравитационного взаимодействия. Решение этой и многих других проблем в настоящее время связывается, главным образом, с использованием групп симметрии, преобразования которых содержали бы на равных пространственно-временные и внутренние переменные. Иначе говоря, речь идет о возможности геометризованного введения внутренних степеней свободы.

Перечислим вкратце наиболее известные подходы в этом направлении:

– теории типа Калуцы – Клейна, в которых пространство–время имеет размерность, большую четырех, причем дополнительные измерения рассматриваются как равноправные с четырьмя наблюдаемыми. Компактификация «лишних» измерений приводит к выделению внутренних степеней свободы, сохраняя их геометрический статус;

– суперсимметрия–супергравитация, объединяющая частицы с разными спинами и статистикой в единые супермультиплеты. Одна из исходных посылок здесь заключается в том, что существует новая математическая структура – преобразования суперсимметрии, которые перемешивают бозонные и фермионные поля. В результате точно так же, как преобразования Лоренца обнаруживают связь между собственно пространством и временем, преобразования суперсимметрии связывают в одно целое пространство–время и внутренние степени свободы частиц;

– струнные и суперструнные модели, включающие в себя идеи Калуцы – Клейна и суперсимметрии, калибровочного подхода и теории относительности.

Однако можно предложить и иной способ геометризованного описания внутренних степеней свободы, основанный на применении расширенного (включая кратные) набора неприводимых представлений группы Лоренца в подходе теории РВУ. Естественной возможностью в этом плане является использование не распадающихся по полной



группе Лоренца уравнений, волновая функция которых обладает трансформационными свойствами прямого произведения (полного или усеченного) дираковских биспиноров, а матрицы Γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака. В дальнейшем такие РВУ будем называть диракоподобными, или уравнениями дираковского типа.

Наиболее известным РВУ указанного типа является уравнение Дирака – Кэлера (ДК), которое представляет собой максимально общее дифференциальное уравнение (систему уравнений) первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. С другой стороны, в соответствующем базисе (будем называть его фермионным) волновая функция уравнения ДК обладает лоренцевскими трансформационными свойствами прямого произведения дираковского биспинора на зарядово-сопряженный биспинор. В тензорной формулировке уравнение ДК может быть представлено в виде системы

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ \partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\psi}_0 &= 0, \\ \partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu &= 0, \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Здесь ψ_0 – скаляр, ψ_μ – вектор, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга, $\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – псевдовектор, дуально сопряженный антисимметричному тензору третьего ранга $\psi_{[\nu\alpha\beta]}$, и $\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, дуально сопряженный антисимметричному тензору четвертого ранга $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$.

Система (5.1) является не распадающейся в смысле полной группы Лоренца. Она может быть записана в стандартной для теории РВУ матрично-дифференциальной форме (1.1), где волновая функция Ψ представляет собой столбец с тензорными компонентами

$$\Psi = (\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]})^T,\tag{5.2}$$

а матрицы Γ_μ размерности 16×16 имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= \Gamma_\mu^{(+)} + \Gamma_\mu^{(-)}, \\ \Gamma_\mu^{(+)} &= e^{\tilde{0}\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}\tilde{0}} + e^{\lambda, [\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu], \lambda}, \\ \Gamma_\mu^{(-)} &= e^{0\mu} + e^{\mu 0} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta} (e^{\tilde{\lambda}, [\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta], \tilde{\lambda}}).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Используя известные правила перемножения обобщенных символов Кронекера [29], можно убедиться, что матрицы Γ_μ (5.3) удовлетворяют алгебре матриц Дирака

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.\tag{5.4}$$



Для установления группы внутренней симметрии поля ДК удобно от тензорного базиса (5.2) перейти к фермионному базису, в котором матрицы Γ_μ и матрица η лоренц-инвариантной билинейной формы имеют вид

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_4, \quad (5.5)$$

$$\eta = \gamma_4 \otimes \gamma_4. \quad (5.6)$$

Напомним, что под преобразованием внутренней симметрии РВУ (1.1) понимаются линейные преобразования волновой функции

$$\Psi'(x) = Q\Psi(x), \quad (5.7)$$

не затрагивающие пространственно-временных координат и оставляющие инвариантным уравнение (1.1) и его лагранжиан (1.26). Для этого матрицы Q должны удовлетворять условиям

$$[\Gamma_\mu, Q]_- = 0, \quad (5.8)$$

$$Q^+ \eta Q = \eta. \quad (5.9)$$

Применение условий (5.8), (5.9) к матрицам Γ_μ и η приводит к некомпактной 15-параметрической группе $SU(2, 2)$, генераторами которой могут служить эрмитовые матрицы

$$\Gamma'_\mu, \quad \Gamma'_5, \quad i\Gamma'_\mu \Gamma'_5, \quad i\Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]} = \frac{i}{2}(\Gamma'_\mu \Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu \Gamma'_\mu). \quad (5.10)$$

Здесь

$$\Gamma'_5 = \Gamma'_1 \Gamma'_2 \Gamma'_3 \Gamma'_4 \quad (5.11)$$

и

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu^{(+)} - \Gamma_\mu^{(-)} \quad (5.12)$$

второй набор матриц размерности 16×16 , удовлетворяющих, как и Γ_μ , алгебре матриц Дирака и коммутирующих с матрицами Γ_μ . В фермионном базисе эти матрицы имеют вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \quad (5.13)$$

Отличительной особенностью группы внутренней симметрии уравнения ДК является то, что ее генераторы (5.10) не коммутируют с лоренцевскими генераторами

$$J_{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu} \Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu} \Gamma'_{\nu]}) \quad (5.14)$$

представления волновой функции Ψ . При этом группа G алгебры полной инвариантности уравнения ДК является полупрямым произведением группы лоренцевских преобразований Λ и группы внутренней симметрии Q : $G = \Lambda \otimes Q$. С другой стороны, группу



G можно представить в виде прямого произведения $G = \Lambda' \otimes Q$, где Λ' – переопределенная группа Лоренца, по отношению к которой волновая функция Ψ характеризует уже не совокупность тензорных величин, а набор четырех дираковских полей с обычной, то есть коммутирующей с преобразованиями группы Лоренца, внутренней симметрией.

Приведенные соображения сохраняют силу для всех взаимодействий (в том числе калибровочных), не нарушающих внутреннюю симметрию свободного лагранжиана. Они означают принципиальную применимость уравнения ДК для описания частиц со спином $s = \frac{1}{2}$ и внутренними степенями свободы, имеющими, таким образом, геометрическое происхождение (более подробно по этому поводу см. [32]). Так, идея о том, что уравнение ДК может выступать, например, в качестве геометрической модели поколений кварков (или лептонов), впервые была выдвинута в работах [33; 34].

Теперь дадим матричную формулировку уравнения ДК в базисе Гельфанда – Яглома, которая нам понадобится в дальнейшем.

Возьмем в качестве исходного набор неприводимых представлений собственной группы Лоренца

$$\begin{array}{c} 2(0, 0) \\ | \\ (0, 1) \quad \text{---} \quad 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad (1, 0), \end{array} \quad (5.15)$$

содержащий двукратные компоненты компоненты $(0, 0)$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Матрица Γ_4 соответствующего РВУ в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид (2.1), где

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & c_{14}^0 \\ 0 & 0 & c_{23}^0 & c_{24}^0 \\ c_{31}^0 & c_{32}^0 & 0 & 0 \\ c_{41}^0 & c_{42}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{35}^1 & c_{36}^1 \\ 0 & 0 & c_{45}^1 & c_{46}^1 \\ c_{53}^1 & c_{54}^1 & 0 & 0 \\ c_{63}^1 & c_{64}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

и принята следующая нумерация содержащихся в наборе (5.15) неприводимых представлений:

$$(0, 0) \sim 1, \quad (0, 0)' \sim 2, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 3, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 4, \quad (0, 1) \sim 5, \quad (1, 0) \sim 6. \quad (5.17)$$

Здесь, как и ранее, штрих используется для различения кратных представлений.

Рассмотрим сначала спиновый блок C^1 . Условия релятивистской и P -инвариантности теории накладывают на элементы c_{ij}^1 в общем случае ограничения

$$c_{35}^1 = \pm c_{36}^1, \quad c_{45}^1 = \pm c_{46}^1, \quad c_{53}^1 = \pm c_{63}^1, \quad c_{54}^1 = \pm c_{64}^1. \quad (5.18)$$

При этом выбор знаков «+» или «−» в (5.18) зависит от определения оператора пространственного отражения, согласно формулам (1.44) или (1.45). Применительно к рассматриваемому случаю сказанное означает, что знак «+» («−») в (5.18) имеет место при истинно векторном (псевдовекторном) характере кратных представлений $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Удовлетворяющее всем необходимым физическим требованиям РВУ можно построить, если выбрать одно



из представлений $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ истинно векторным, а второе – псевдовекторным (в дальнейшем будем обозначать его $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$). Тогда соотношения (5.18) принимают вид

$$c_{35}^1 = c_{36}^1, \quad c_{45}^1 = -c_{46}^1, \quad c_{53}^1 = c_{63}^1, \quad c_{54}^1 = -c_{64}^1, \quad (5.19)$$

и для блока C^1 получается выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{35}^1 & c_{35}^1 \\ 0 & 0 & c_{45}^1 & -c_{45}^1 \\ c_{53}^1 & c_{54}^1 & 0 & 0 \\ c_{53}^1 & -c_{54}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Аналогичным образом, одно из представлений $(0, 0)$ в (5.15) выберем скалярным, а второе – псевдоскалярным (будем также помечать его штрихом). И поскольку в P -инвариантном РВУ векторное (псевдовекторное) представление не может зацепляться с псевдоскалярным (скалярным), то будут иметь место равенства

$$c_{14}^0 = c_{23}^0 = c_{41}^0 = c_{32}^0 = 0. \quad (5.21)$$

Блок C^0 (5.18) при этом преобразуется к виду

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{24}^0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{42}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

а представления (5.15) образуют схему зацеплений

$$(0, 0)' \quad \text{---} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)' \quad \begin{matrix} \diagup & & \diagdown \\ & (0, 1) & \\ \diagdown & & \diagup \\ & (1, 0) & \end{matrix} \quad \begin{matrix} \diagdown & & \diagup \\ & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \\ \diagup & & \diagdown \\ & (0, 0) & \end{matrix} \quad \text{---} \quad (0, 0). \quad (5.23)$$

Блоки η^0, η^1 матрицы билинейной инвариантной формы η (2.4), имеют в данном случае вид

$$\eta = \eta^0 \oplus (\eta^1 \otimes I_3),$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{44}^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{33}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{44}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{56}^1 \\ 0 & 0 & \eta_{65}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

причем согласно (1.47)

$$\eta_{33}^1 = -\eta_{33}^0, \quad \eta_{44}^1 = -\eta_{44}^0, \quad \eta_{65}^1 = \pm \eta_{56}^1. \quad (5.25)$$



Условия (1.48) совместно с равенствами (5.19) приводят к соотношениям

$$c_{31}^0 = \frac{\eta_{33}^0}{\eta_{11}^0} (c_{13}^0)^*, \quad c_{42}^0 = \frac{\eta_{44}^0}{\eta_{22}^0} (c_{24}^0)^*, \quad c_{53}^1 = \frac{\eta_{56}^1}{\eta_{33}^1} (c_{35}^1)^*, \quad c_{54}^1 = \frac{\eta_{56}^1}{\eta_{44}^1} (c_{45}^1)^*. \quad (5.26)$$

Выбирая теперь для остающихся произвольными элементов $c_{\tau\tau'}^s$ и $\eta_{\tau\tau'}^s$, например, значения

$$c_{13}^0 = c_{24}^0 = 1, \quad c_{35}^1 = c_{45}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.27)$$

$$\eta_{11}^0 = -\eta_{22}^0 = \eta_{33}^0 = -\eta_{44}^0 = -\eta_{56}^1 = -\eta_{65}^1 = 1, \quad (5.28)$$

получим РВУ со спиновыми блоками матриц Γ_4 и η вида

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Построенное таким образом с использованием базиса Гельфанда – Яглома РВУ удовлетворяет условиям инвариантности относительно преобразований полной группы Лоренца и возможности его получения из инвариантной функции Лагранжа. С формальной точки зрения оно описывает микрообъект с ненулевой массой и набором спинов 0, 1. Минимальные уравнения для спиновых блоков C^0 , C^1 и матрицы Γ_4 в целом имеют одинаковый вид

$$(C^0)^2 - 1 = 0, \quad (C^1)^2 - 1 = 0, \quad \Gamma_4^2 - 1 = 0, \quad (5.31)$$

из которого вытекает, что данное РВУ относится к уравнениям дираковского типа с алгеброй (5.4). Наличие повторяющихся корней ± 1 у блоков C^0 , C^1 означает наличие дополнительной (помимо спина) внутренней степени свободы.

Отметим, что выбор (5.27) элементов матрицы Γ_4 не является единственно возможным с точки зрения получения диракоподобного РВУ. В общем случае для удовлетворения характеристическим уравнениям (5.31) достаточно выполнения условий

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

Очевидно, что только за счет изменения знаков у чисел c_{13}^0 , c_{24}^0 , c_{35}^1 , c_{45}^1 можно реализовать 16 способов задания спиновых блоков C^0 , C^1 . Однако очевидно, что все такие (и иные) модификации связаны преобразованием подобия и, следовательно, физически эквивалентны.



Итак, на основе схемы зацеплений (5.23) может быть построено единственное (с точностью до преобразования подобия) РВУ дираковского типа, не распадающееся в смысле полной группы Лоренца и допускающее лагранжеву формулировку.

Приведенное алгебраическое и теоретико-групповое обоснование динамического соответствия (эквивалентности) классического уравнения ДК и $SU(2, 2)$ -инвариантной теории Дирака является еще недостаточным для геометризованного описания внутренних степеней свободы дираковских частиц посредством тензорных полей. Последовательная реализация возможности такого описания предполагает существование такого соответствия и на квантовом уровне, что равносильно возможности квантования поля ДК по статистике Ферми – Дирака.

Казалось бы, такое допущение противоречит известной теореме Паули о связи спина и статистики [34]. Однако, это не совсем так. Еще в работах [35; 36] на примере простейших уравнений для частиц с целым и полуцелым спином было показано, что при использовании индефинитной метрики в гильбертовом пространстве состояний, в принципе, допускается квантование по аномальной статистике (полуцелый спин – по статистике Бозе – Эйнштейна, целый – по статистике Ферми – Дирака). Но при этом в теории появляются неустранимые отрицательные вероятности.

Существенно иная ситуация возникает в случае полевых систем с дополнительными степенями свободы, соответствующими некомпактным группам внутренней симметрии. В таких теориях имеют место дополнительные законы сохранения (правила запрета), исключающие переходы, сопровождающиеся отрицательными вероятностями при квантовании с индефинитной метрикой. Рассмотрим подробно этот вопрос применительно к уравнению ДК [37; 38].

Сначала с помощью подстановки

$$\Psi(x) = \Psi(p)e^{ip_\mu x_\mu} \quad (5.33)$$

перейдем от матричной формы (1.1) уравнения ДК в координатном представлении к импульсному представлению

$$(\hat{p} + m)\Psi(p) = 0, \quad (5.34)$$

где

$$\hat{p} = ip_\mu \Gamma_\mu - \text{оператор 4-импульса.} \quad (5.35)$$

Как следует из (5.31), спиновые блоки C^0, C^1 содержат один с точностью до знака ненулевой корень ± 1 . Наличие же внутренней степени свободы выражается здесь в том, что в характеристических полиномах этих блоков указанный ненулевой корень имеет кратность, равную двум. Так что, наряду с обычными операторами импульса (5.35), квадрата спина

$$\hat{S}^2 = -[(J^{[12]})^2 + (J^{[23]})^2 + (J^{[31]})^2] \quad (5.36)$$

и проекции спина

$$\hat{S}_n = -i\varepsilon_{ijk}n_i J^{[jk]}, \quad (5.37)$$



где $J^{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]})$, этой степени свободы (назовем ее для определенности П-четностью) можно сопоставить некоторый оператор $\hat{\Pi}$, коммутирующий с указанными операторами и образующий вместе с ними полный набор переменных для поля ДК. Дополним это условие естественными требованиями диагонализруемости этого оператора и вещественности его собственных значений, а также по аналогии с операторами \hat{S}^2 , \hat{S}_n свойством

$$\hat{\Pi}\eta = \eta\hat{\Pi}^+. \quad (5.38)$$

Нетрудно убедиться, что релятивистски-инвариантное определение оператора П-четности, удовлетворяющее сформулированным условиям, имеет вид

$$\hat{\Pi} = \frac{p_\mu \Gamma'_\mu}{im}; \quad (5.39)$$

в частности, в системе покоя

$$\hat{\Pi}_0 = \Gamma'_4. \quad (5.40)$$

Собственные значения оператора $\hat{\Pi}$ будем обозначать через λ_i , $i = 1, 2$. В системе покоя $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

При вторичном квантовании существенную роль играет знакоповедение плотности энергии (и заряда) классической полевой системы. Наличие спектра спинов и П-четности приводит к тому, что знаки указанных величин могут зависеть не только от знака массы (под которым понимается знак собственных значений матрицы Γ_4 , различающий положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения (5.34)), но и от квантовых чисел i и s . Другими словами, и энергия и заряд в таких теориях являются, вообще говоря, индефинитными. Данное обстоятельство удобно отразить, вводя в рассмотрение переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значения которой, вычисленные в системе покоя, характеризуют знак плотности энергии в состоянии $\psi_{is}^{(\pm)}$. Расчет величин $g_{is}^{(\pm)}$ для уравнения ДК дает [39]:

$$g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1, \quad g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1. \quad (5.41)$$

Теперь приступаем непосредственно к квантованию. Операторные волновые функции Ψ , $\bar{\Psi}$ представим в виде разложений

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[a_{is}(p) \psi_{is}^{(+)}(p) e^{ipx} + b_{is}^+(p) \psi_{is}^{(-)}(p) e^{-ipx} \right] d^3p, \quad (5.42)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[a_{is}^+(p) \bar{\psi}_{is}^{(+)}(p) e^{-ipx} + b_{is}(p) \bar{\psi}_{is}^{(-)}(p) e^{ipx} \right] d^3p. \quad (5.43)$$

Для операторов рождения и уничтожения постулируем перестановочные соотношения

$$[a_{is}(p), a_{i's'}^+(p')]_+ = g_{is}^{(+)} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p - p'), \quad (5.44)$$

$$[b_{is}(p), b_{i's'}^+(p')]_+ = -g_{is}^{(-)} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p - p') \quad (5.45)$$



(по индексам i и s суммирования здесь нет; все остальные антикоммутизаторы равны нулю), которые соответствуют квантованию поля ДК по статистике Ферми – Дирака. Приводящие к правильным собственным значениям операторы числа частиц и античастиц определим при этом следующим образом:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is}^{(+)} a_{is}^{\dagger} a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is}^{(-)} b_{is}^{\dagger} b_{is}. \quad (5.46)$$

Подставляем разложения (5.42), (5.43) в выражения для операторов энергии и заряда

$$E = \int \{(\partial_4 \bar{\Psi}) \Gamma_4 \Psi - \bar{\Psi} \Gamma_4 \partial_4 \Psi\} d^3x, \quad (5.47)$$

$$Q = e \int \bar{\Psi} \Gamma_4 \Psi d^3x. \quad (5.48)$$

Учитывая соотношения (5.44)–(5.46) и нормировку по заряду

$$\bar{\Psi} \Gamma_4 \Psi = \pm 1, \quad (5.49)$$

получим в конечном счете для операторов E и Q выражения

$$E = \sum_i \sum_s \left(N_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)} \right), \quad (5.50)$$

$$Q = e \sum_i \sum_s \left(N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)} \right), \quad (5.51)$$

где $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию.

Формулы (5.50), (5.51) означают, что антикоммутиационные соотношения (5.44), (5.45) обеспечивают правильную корпускулярную картину поля. Кроме того, нетрудно показать, что они приводят к причинным перестановочным соотношениям для операторных волновых функций [40; 41].

Поскольку правые части некоторых из условий квантования (5.44), (5.45) содержат в правой части «неправильный» знак (минус), соответствующие векторы состояний должны иметь отрицательно определенную норму. Иными словами, квантовое описание поля ДК по статистике Ферми – Дирака предполагает использование пространства состояний H с индефинитной метрикой

$$H = H_+ \oplus H_-, \quad (5.52)$$

где H_+ и H_- – подпространства с положительной и отрицательной нормами векторов состояний соответственно. В рассматриваемом случае в подпространства H_+ и H_- попадают состояния

$$H_+ : \left(\prod_{N_1}^+ a_{1s} \right) \left(\prod_{N_2}^+ b_{2s} \right) \left(\prod_{N_3}^+ a_{2s} \right) \left(\prod_{N_4}^+ b_{1s} \right) |0\rangle; \quad (5.53)$$

$$H_- : \left(\prod_{N_5}^+ a_{1s} \right) \left(\prod_{N_6}^+ b_{2s} \right) \left(\prod_{N_7}^+ a_{2s} \right) \left(\prod_{N_8}^+ b_{1s} \right) |0\rangle. \quad (5.54)$$



Здесь N_1, N_2, N_5, N_6 – произвольные неотрицательные целые числа, $(N_3 + N_4)$ – четное и $(N_7 + N_8)$ – нечетное числа. Для одночастичных состояний разбиения (5.53), (5.54) принимают соответственно вид

$$H_+ : \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}, \quad H_- : \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \quad (5.55)$$

$$H_+ : \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \quad H_- : \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}. \quad (5.56)$$

При этом для корректной вероятностной интерпретации теории необходимо, чтобы в ней при включении взаимодействия отсутствовали переходы между состояниями H_+ и H_- . Покажем, что здесь такие переходы действительно запрещены.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(x)(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi(x) + \mathcal{L}_{int}, \quad (5.57)$$

где \mathcal{L}_{int} описывает взаимодействие, которое не нарушает внутренней симметрии, присущей свободному полю. Для электромагнитного взаимодействия, например:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\Psi}\Gamma_\mu A_\mu\Psi + \bar{\Psi}F_{\mu\nu}\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}\Psi. \quad (5.58)$$

Очевидно, что оператор $\hat{\Pi}$ (5.39) содержится среди преобразований группы внутренней симметрии лагранжиана (5.57), (5.58) (сравни (5.39) с генераторами (5.10) этой группы). Инвариантность указанного лагранжиана относительно преобразований

$$\Psi \rightarrow e^{i\hat{\Pi}\theta}\Psi \quad (5.59)$$

приводит к сохраняющемуся «заряду»

$$G \sim \int \bar{\Psi}(x)\Gamma_4\hat{\Pi}\Psi(x)d^3x. \quad (5.60)$$

Заряд G может быть преобразован к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s \lambda_i \left(N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)} \right) = \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)} \right), \quad (5.61)$$

где учтено, что $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Перепишем для удобства формулу (5.51) также в развернутом виде

$$Q \sim \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} + N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} - N_{2s}^{(-)} \right). \quad (5.62)$$

Сравнивая разбиения (5.55), (5.56) с формулами (5.61), (5.62), приходим к заключению, что одночастичным состояниям, относящимся к подпространствам H_+ и H_- , соответствуют следующие знаки зарядов Q и G :

$$H_+ : (1, 1), (-1, 1), \quad H_- : (1, -1), (-1, -1) \quad (5.63)$$



(первая цифра в скобках относится к электрическому заряду Q , вторая – к дополнительному заряду G).

Из (5.63) очевидно, что совместное выполнение законов сохранения для зарядов Q и G приводит к запрету физически неприемлемых переходов между состояниями из подпространств с положительной и отрицательной нормами векторов состояний.

Отметим, что если вместо непрерывных преобразований (5.59) рассмотреть дискретные преобразования

$$\Psi_+ \rightarrow \Psi_+, \quad \Psi_- \rightarrow -\Psi_-, \quad (5.64)$$

то они сводятся к следующему:

$$\begin{aligned} a_{1s}, a_{1s}^+ &\rightarrow a_{1s}, a_{1s}^+, & b_{1s}, b_{1s}^+ &\rightarrow b_{1s}, b_{1s}^+, \\ a_{2s}, a_{2s}^+ &\rightarrow -a_{2s}, -a_{2s}^+, & b_{2s}, b_{2s}^+ &\rightarrow -b_{2s}, -b_{2s}^+. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Такая операция носит в математической литературе название канонической, или J -симметрии. Она лежит в основе теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, которое называется еще гильбертовым пространством с J -метрикой, или пространством Крейна [42]. Как показано в [43], J -симметрия соответствует оператору суперотбора, запрещающему переходы из H_+ в H_- , что находится в согласии с установленным выше результатом. При локализации некомпактной группы внутренней симметрии, имеющей пространственно-временное происхождение, и рассмотрении соответствующей калибровочной теории дискретная J -симметрия также позволяет исключить переходы, характеризующиеся отрицательными вероятностями [44].

Таким образом, рассмотренная процедура квантования уравнения ДК по статистике Ферми – Дирака является корректной и с точки зрения вероятностной интерпретации теории. Данный факт в совокупности с другими (алгебраическими, групповыми) выше отмеченными свойствами этого уравнения указывает на то, что на его основе действительно существует принципиальная возможность геометризованного описания внутренних степеней свободы дираковских частиц.

Укажем еще, что в самом общем виде вопрос о возможности физически непротиворечивого квантования РВУ с некомпактными группами внутренней симметрии как по нормальной, так и аномальной статистике с использованием индефинитной метрики подробно рассмотрен в работах [39–41].

6. Алгебраические обобщения уравнения Дирака – Кэлера

Несмотря на ряд привлекательных черт уравнения ДК, вопрос о его способности служить, например, для пространственно-временного описания внутренних квантовых чисел известных фундаментальных частиц до сих пор остается открытым. С одной стороны, если иметь в виду только одно квантовое число – поколение кварков (или лептонов), то число компонент волновой функции в уравнении ДК (равное 16) является слишком большим, поскольку в настоящее время известно всего три поколения этих частиц. С другой, для геометризованного описания с единых позиций всех известных степеней свобо-



ды фундаментальных частиц 16-ти компонент волновой функции явно недостаточно. Поэтому последовательная реализация данного подхода в рамках 4-мерного пространства-времени предполагает использование РВУ с большим числом компонент волновой функции и аналогичными уравнению ДК свойствами.

Набор таких РВУ можно получить, если перейти к максимальному тензорному алгебраическому обобщению уравнения ДК в пространстве размерности $d = 4$, заключающемся в рассмотрении полей $\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}$ как общих элементов алгебры Клиффорда C_4 . Этот переход эквивалентен введению наряду с диракоподобным РВУ для функции Ψ (5.2) аналогичных уравнений для функций $\tilde{\Psi}$ и Ψ_A , где A – свободный лоренцевский индекс, принимающий по очереди значения $A = \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$ (здесь $\tilde{\mu}$ – псевдовекторный индекс; $\tilde{\Psi}$ характеризует тот же набор антисимметричных тензорных полей, что и Ψ , но с измененными трансформационными свойствами относительно операции пространственной инверсии).

Прежде, чем переходить к указанным алгебраическим обобщениям уравнения ДК, обсудим более подробно вопрос о его замкнутости (нераспадении) в смысле полной группы Лоренца. С этой целью с помощью подстановок

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \psi_0 - i\tilde{\psi}_0, & \varphi_\mu &= \psi_\mu - i\tilde{\psi}_\mu, & \varphi_{[\mu\nu]} &= \psi_{[\mu\nu]} - i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}, \\ \dot{\varphi}_0 &= \dot{\psi}_0 + i\dot{\tilde{\psi}}_0, & \dot{\varphi}_\mu &= \dot{\psi}_\mu + i\dot{\tilde{\psi}}_\mu, & \dot{\varphi}_{[\mu\nu]} &= \dot{\psi}_{[\mu\nu]} + i\dot{\tilde{\psi}}_{[\mu\nu]}\end{aligned}\quad (6.1)$$

приведем систему (5.1) к виду

$$\begin{aligned}\partial_\mu \varphi_\mu + m\varphi_0 &= 0, \\ \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \varphi_0 + m\varphi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\beta + m\varphi_{[\mu\nu]} &= 0;\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu \dot{\varphi}_\mu + m\dot{\varphi}_0 &= 0, \\ \partial_\nu \dot{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \dot{\varphi}_0 + m\dot{\varphi}_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \dot{\varphi}_\nu + \partial_\nu \dot{\varphi}_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \dot{\varphi}_\beta + m\dot{\varphi}_{[\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\quad (6.3)$$

Очевидно, что система (6.2), (6.3) распадается на две инвариантные в смысле собственной группы Лоренца подсистемы (6.2) и (6.3). Однако так же очевидно, что при пространственном отражении эти подсистемы переходят друг в друга, то есть по отдельности каждая из них P -неинвариантна. Таким образом, действительно, по отношению к преобразованиям полной группы Лоренца система ДК является не распадающейся.

Теперь рассмотрим матричное уравнение

$$(\Gamma_\alpha \partial_\alpha + m)\Psi_{[\eta\xi]} = 0, \quad (6.4)$$

которое получается в результате навешивания на волновую функцию Ψ (5.2) уравнения ДК свободного бивекторного индекса. Данное уравнение можно представить в стандартной форме (1.1), где 96-компонентная волновая функция ψ преобразуется согласно представлению группы Лоренца

$$\left[(0, 0) \oplus 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0) \right] \otimes [(0, 1) \oplus (1, 0)]. \quad (6.5)$$



Неприводимые представления, содержащиеся в прямом произведении (6.5), формируют в общем случае схему зацеплений

$$\begin{array}{c}
 2(0, 0) \\
 | \\
 3(0, 1) \quad \text{---} \quad 4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad 3(1, 0).
 \end{array} \quad (6.6)$$

Как было показано, уравнение ДК представимо в виде прямой суммы двух диракоподобных 8-компонентных систем (6.2) и (6.3), которые, в свою очередь, можно записать в форме (1.1) с волновыми функциями

$$\Psi^{(8)} = (\varphi_0, \varphi_\mu, \varphi_{[\mu\nu]})^T, \quad \dot{\Psi}^{(8)} = (\dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_\mu, \dot{\varphi}_{[\mu\nu]})^T \quad (6.7)$$

(отметим, что тензоры $\varphi_{[\mu\nu]}$, $\dot{\varphi}_{[\mu\nu]}$, являясь здесь самодуальными, содержат по три независимые компоненты) и схемами зацеплений

$$(0, 0) \quad \text{---} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad (0, 1), \quad (6.8)$$

$$(0, 0) \quad \text{---} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad (1, 0). \quad (6.9)$$

Поэтому уравнение (6.4) распадается на составляющие

$$(\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu + m) \Psi_{(0,1)}^{(8)} = 0, \quad (6.10)$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu + m) \dot{\Psi}_{(0,1)}^{(8)} = 0, \quad (6.11)$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu + m) \Psi_{(1,0)}^{(8)} = 0, \quad (6.12)$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)} \partial_\mu + m) \dot{\Psi}_{(1,0)}^{(8)} = 0, \quad (6.13)$$

Уравнения (6.10) и (6.12) P -сопряжены по отношению друг к другу. Так же сопряжены уравнения (6.11) и (6.13). Поэтому, рассматривая (6.10), (6.12) и (6.11), (6.13) совместно, получим две инвариантные в смысле полной группы Лоренца системы, преобразующиеся по представлениям

$$\left\{ [(0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1)] \otimes (0, 1) \right\} \oplus \left\{ [(0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (1, 0)] \otimes (1, 0) \right\}, \quad (6.14)$$

$$\left\{ [(0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1)] \otimes (1, 0) \right\} \oplus \left\{ [(0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (1, 0)] \otimes (0, 1) \right\}. \quad (6.15)$$

Другими словами, схема зацеплений (6.6) при построении на ее основе диракоподобного РВУ распадается на фрагменты

$$\begin{array}{c}
 2(0, 0) \\
 | \\
 2(0, 1) \quad \text{---} \quad 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad 2(1, 0) \\
 | \qquad \qquad \qquad | \\
 (0, 2) \quad \text{---} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \qquad \qquad \qquad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{---} \quad (2, 0)
 \end{array} \quad (6.16)$$



и

$$\begin{array}{ccccc} (0, 1) & \text{---} & 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \text{---} & (1, 0) \\ | & & | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & \text{---} & 2(1, 1) & \text{---} & \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{array} \quad (6.17)$$

В свою очередь, из неприводимых компонент, входящих в (6.16), можно сформировать две самостоятельные схемы зацеплений: схему (5.15), соответствующую уравнению ДК, и схему

$$\begin{array}{ccccc} & & (0, 1) & & (1, 0) \\ & & | & \oplus & | \\ (0, 2) & \text{---} & \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & & \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{---} & (2, 0). \end{array} \quad (6.18)$$

Покажем, что схема зацеплений (6.18) действительно обеспечивает возможность построения удовлетворяющего всем необходимым физическим требованиям РВУ дираковского типа. Пронумеруем содержащиеся (6.18) неприводимые компоненты следующим образом:

$$\begin{array}{l} (0, 1) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \sim 2, \quad (0, 2) \sim 3, \\ (1, 0) \sim 4, \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 5, \quad (2, 0) \sim 6. \end{array} \quad (6.19)$$

Тогда в базисе Гельфанда – Яглома для матрицы Γ_4 получим выражение

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & C^2 \otimes I_5 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^1 & 0 & 0 \\ c_{21}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45}^1 \\ 0 & 0 & c_{54}^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & c_{23}^2 & 0 & 0 \\ c_{32}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{56}^2 \\ 0 & 0 & c_{65}^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Требование P -инвариантности теории в соответствии с условиями (1.43), (1.44) накладывает на элементы спиновых блоков C^1, C^2 ограничения

$$c_{12}^1 = c_{45}^1, \quad c_{21}^1 = c_{54}^1, \quad c_{23}^2 = c_{56}^2, \quad c_{32}^2 = c_{65}^2. \quad (6.22)$$

Возможность лагранжевой формулировки (см. (1.48)) приводит к соотношениям

$$c_{12}^1 \eta_{25}^1 = (c_{54}^1)^* \eta_{14}^1, \quad c_{23}^2 \eta_{36}^2 = (c_{65}^2)^* \eta_{25}^2. \quad (6.23)$$

Объединяя (6.22) и (6.23), получаем

$$c_{21}^1 = c_{54}^1 = fa^*, \quad c_{32}^2 = c_{65}^2 = gb^*, \quad (6.24)$$

где введены обозначения

$$f = \frac{\eta_{25}^1}{\eta_{14}^1}, \quad g = \frac{\eta_{36}^2}{\eta_{25}^2}, \quad a = c_{12}^1, \quad b = c_{23}^2. \quad (6.25)$$



Минимальное уравнение для матрицы Γ_4 будет иметь вид (5.31) при выполнении равенств

$$f|a|^2 = g|b|^2 = 1, \quad (6.26)$$

которым можно удовлетворить, полагая, например,

$$f = g = a = b = 1. \quad (6.27)$$

При этом спиновые блоки C^1, C^2 принимают одинаковый вид

$$C^1 = C^2 = I_2 \otimes \sigma_1. \quad (6.28)$$

Ненулевые элементы η_{ij}^s матрицы билинейной инвариантной формы η , имеющей в рассматриваемом случае в базе Гельфанда – Яглома структуру

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & \eta^2 \otimes I_5 \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

в соответствии с условиями (6.25), (6.27) могут быть выбраны следующим образом:

$$\eta_{14}^1 = \eta_{25}^1 = -\eta_{25}^2 = -\eta_{36}^2 = 1 \quad (6.30)$$

(напомним, что $\eta_{ij}^s = -\eta_{ij}^{s-1}$).

Полученное таким образом 32-компонентное РВУ является по построению уравнением дираковского типа, инвариантно относительно преобразований полной группы Лоренца, допускает лагранжеву формулировку и с точки зрения стандартной трактовки теории РВУ описывает микрообъект с набором спинов 1, 2, одним значением массы и удвоенным набором состояний, вырожденных по некоторому дополнительному квантовому числу. Это уравнение, как и уравнение ДК, не распадается в смысле полной группы Лоренца.

Теперь рассмотрим схему зацеплений (6.17). Если строить на ее основе РВУ дираковского типа, то она распадается в прямую сумму фрагментов [45]

$$\begin{array}{ccc} (0, 1) & \text{---} & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \oplus & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' & \text{---} & (1, 0) \\ | & & | & & | & & | \\ (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & \text{---} & (1, 1) & & (1, 1)' & \text{---} & (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), \end{array} \quad (6.31)$$

где кратные представления $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$, а также $(1, 1)$ и $(1, 1)'$ P -сопряжены друг другу.

Введем нумерацию содержащихся в схеме (6.31) неприводимых компонент

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &\sim 1, & (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) &\sim 2, & (1, 1) &\sim 3, & (0, 1) &\sim 4, \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' &\sim 5, & (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) &\sim 6, & (1, 1)' &\sim 7, & (1, 0) &\sim 8. \end{aligned}$$



Тогда для спиновых блоков C^s ($s = 0, 1, 2$) матрицы Γ_4

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \otimes I_5 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

получим общие выражения

$$\begin{aligned} C^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{57}^0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{75}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & C^1 &= \begin{pmatrix} (C^1)' & 0 \\ 0 & (C^1)'' \end{pmatrix}, \\ (C^1)' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{14}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & c_{24}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ c_{41}^1 & c_{42}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (C^1)'' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{57}^1 & c_{58}^1 \\ 0 & 0 & c_{67}^1 & c_{68}^1 \\ c_{75}^1 & c_{76}^1 & 0 & 0 \\ c_{85}^1 & c_{86}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C^2 &= \begin{pmatrix} 0 & c_{23}^2 & 0 & 0 \\ c_{32}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{67}^2 \\ 0 & 0 & c_{76}^2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Условия релятивистской (1.41) и P -инвариантности (1.42), (1.43) накладывают на элементы блоков (6.33) соответственно ограничения

$$\begin{aligned} c_{13}^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}c_{13}^0, & c_{31}^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}c_{31}^0, & c_{57}^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}c_{57}^0, & c_{75}^1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}c_{75}^0, \\ c_{23}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}}c_{23}^2, & c_{32}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}}c_{32}^2, & c_{67}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}}c_{67}^2, & c_{76}^1 &= \sqrt{\frac{1}{3}}c_{76}^2; \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} c_{14}^1 &= \pm c_{58}^1, & c_{23}^1 &= \pm c_{67}^1, & c_{23}^2 &= \pm c_{67}^2, & c_{24}^1 &= c_{68}^1, \\ c_{41}^1 &= \pm c_{85}^1, & c_{32}^1 &= \pm c_{76}^1, & c_{32}^2 &= \pm c_{76}^2, & c_{42}^1 &= c_{86}^1. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Условие (1.48) возможности получения РВУ со схемой зацеплений (6.17) из инвариантной функции Лагранжа приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{31}^s &= \frac{\eta_{33}^s}{\eta_{11}^s} (c_{13}^s)^*, & c_{75}^s &= \frac{\eta_{77}^s}{\eta_{55}^s} (c_{57}^s)^* & (s = 0, 1), \\ c_{76}^s &= \frac{\eta_{33}^s}{\eta_{26}^s} (c_{23}^s)^*, & c_{67}^s &= \frac{\eta_{26}^s}{\eta_{77}^s} (c_{32}^s)^* & (s = 1, 2), \\ c_{85}^1 &= \frac{\eta_{48}^1}{\eta_{55}^1} (c_{14}^1)^*, & c_{58}^1 &= \frac{\eta_{11}^1}{\eta_{48}^1} (c_{41}^1)^*, \\ c_{86}^1 &= \frac{\eta_{48}^1}{\eta_{26}^1} (c_{24}^1)^*, & c_{68}^1 &= \frac{\eta_{26}^1}{\eta_{48}^1} (c_{42}^1)^*. \end{aligned} \quad (6.36)$$



Минимальные уравнения

$$(C^0)^2 - 1 = 0, \quad (C^1)^2 - 1 = 0, \quad (C^2)^2 - 1 = 0, \quad (6.37)$$

приводящие к дираковской алгебре матриц Γ_μ , будут иметь место при выполнении равенств

$$\begin{aligned} c_{13}^0 c_{31}^0 &= c_{23}^2 c_{32}^2 = 1, \\ c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{14}^1 c_{41}^1 &= 1, \quad c_{23}^1 c_{32}^1 + c_{24}^1 c_{42}^1 = 1, \\ c_{13}^1 c_{32}^1 + c_{14}^1 c_{42}^1 &= 0, \quad c_{23}^1 c_{31}^1 + c_{24}^1 c_{41}^1 = 0, \\ c_{13}^1 c_{31}^1 + c_{23}^1 c_{32}^1 &= 1, \quad c_{14}^1 c_{41}^1 + c_{24}^1 c_{42}^1 = 1, \\ c_{14}^1 c_{31}^1 + c_{24}^1 c_{32}^1 &= 0, \quad c_{13}^1 c_{41}^1 + c_{23}^1 c_{42}^1 = 0, \end{aligned} \quad (6.38)$$

плюс аналогичные равенства, которые получаются из (6.38) при замене индексов $1 \rightarrow 5$, $2 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 7$, $4 \rightarrow 8$.

Условия (6.34)–(6.38) одновременно выполняются, если положить

$$\begin{aligned} c_{13}^0 &= c_{31}^0 = c_{57}^0 = c_{75}^0 = 1, \quad -c_{23}^2 = -c_{32}^2 = c_{67}^2 = c_{76}^2 = 1, \\ c_{13}^1 &= c_{31}^1 = c_{57}^1 = c_{75}^1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -c_{23}^1 = -c_{32}^1 = c_{67}^1 = c_{76}^1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \\ c_{14}^1 &= c_{41}^1 = -c_{58}^1 = -c_{85}^1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad c_{24}^1 = c_{42}^1 = c_{68}^1 = c_{86}^1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

и

$$\begin{aligned} \eta_{11}^0 &= \eta_{33}^0 = \eta_{55}^0 = \eta_{77}^0 = -\eta_{11}^1 = -\eta_{33}^1 = -\eta_{55}^1 = -\eta_{77}^1 \\ &= \eta_{26}^1 = \eta_{62}^1 = \eta_{48}^1 = \eta_{84}^1 = -\eta_{26}^2 = -\eta_{62}^2 = \eta_{33}^2 = \eta_{77}^2 = 1. \end{aligned} \quad (6.40)$$

В результате приходим к следующим выражениям для блоков C^s , η^s матриц Γ_4 и η :

$$\begin{aligned} C^0 &= \sigma_1 \otimes I_2, \quad C^1 = (C^1)' \oplus (C^1)'', \quad C^2 = -\sigma_3 \otimes \sigma_1, \\ (C^1)' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (C^1)'' &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (6.41)$$



$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.42)$$

РВУ с матрицами Γ_4 (6.32), (6.41) и η (6.42), базирующееся на схеме зацеплений (6.31), удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в главе 1 (кроме дефинитности энергии), и формально описывает микрообъект с набором спинов 0, 1, 2 и единственной ненулевой массой. При этом состояния с $s = 0, 2$ двукратно вырождены, а состояния с $s = 1$ вырождены четырехкратно.

Если, наконец, рассмотреть уравнение

$$(\Gamma_\alpha \partial_\alpha + m)\Psi_\mu = 0, \quad (6.43)$$

которое получается в результате навешивания на волновую функцию Ψ уравнения ДК свободного векторного индекса μ , то тут имеет место следующая ситуация. Волновая функция Ψ_μ преобразуется по представлению

$$\left[2(0, 0) \oplus 2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0) \right] \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (6.44)$$

соответствующему в общем случае схеме зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} & & 2(0, 0) & & \\ & & | & & \\ 2(0, 1) & \text{---} & 4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \text{---} & 2(1, 0) \\ & & | & & | \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) & \text{---} & 2(1, 1) & \text{---} & \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{array} \quad (6.45)$$

Как показано в [45], при построении на основе схемы (6.45) РВУ дираковского типа она распадается на две не зацепляющиеся между собой схемы (5.15) и (6.17). Следовательно, с интересующих нас позиций, уравнение (6.44) не дает ничего нового по сравнению с рассмотренными выше РВУ.

Таким образом, обсуждаемые алгебраические обобщения уравнения ДК приводят к двум новым матричным РВУ дираковского типа: 32-компонентному – со схемой зацеплений (6.18) и 48-компонентному – со схемой (6.31).



Тензорная формуліровка першаго из них имеет вид [46]

$$\begin{aligned} & \partial_\nu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} + m\varphi_{[\alpha\beta]} = 0, \\ & \frac{1}{2} \left(-\partial_\mu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \varphi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \varphi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \varphi_{\alpha[\mu\nu]} + \right. \\ & \quad \left. + i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi} \partial_\eta \varphi_{\xi[\alpha\beta]} + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi} \partial_\eta \varphi_{\xi[\mu\nu]} \right) + m\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0, \\ & \partial_\nu \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2} \left(\partial_\beta \varphi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \varphi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \varphi_{[\nu\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \varphi_{[\nu\alpha]} \right) + \\ & \quad + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu} \partial_\eta \varphi_{[\nu\mu]} + m\varphi_{\mu[\alpha\beta]} = 0, \\ & \partial_\nu \chi_{\nu[\alpha\beta]} + m\chi_{[\alpha\beta]} = 0, \\ & \frac{1}{2} \left(-\partial_\mu \chi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \chi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \chi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \chi_{\alpha[\mu\nu]} - \right. \\ & \quad \left. - i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi} \partial_\eta \chi_{\xi[\alpha\beta]} - i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi} \partial_\eta \chi_{\xi[\mu\nu]} \right) + m\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0, \\ & \partial_\nu \chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2} \left(\partial_\beta \chi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \chi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \chi_{[\nu\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \chi_{[\nu\alpha]} \right) - \\ & \quad - i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu} \partial_\eta \chi_{[\nu\mu]} + m\chi_{\mu[\alpha\beta]} = 0. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Входящие сюда тензоры удовлетворяют условиям самодуальности

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\alpha\beta]} = i\varphi_{[\mu\nu]}, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta} \varphi_{\mu[\alpha\beta]} = i\varphi_{\mu[\eta\xi]}, \\ & \frac{1}{2} \varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta} \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = i\varphi_{([\mu\nu][\eta\xi])}, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \chi_{[\alpha\beta]} = -i\varphi_{[\mu\nu]}, \\ & \frac{1}{2} \varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta} \chi_{\mu[\alpha\beta]} = -i\chi_{\mu[\eta\xi]}, \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta} \chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = -i\chi_{([\mu\nu][\eta\xi])}. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Кроме того, величины $\varphi_{\mu[\alpha\beta]}$, $\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$, $\chi_{\mu[\alpha\beta]}$, $\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ подчиняются условиям

$$\begin{aligned} & \varphi_{\alpha[\alpha\beta]} = 0, \quad \varphi_{([\alpha\beta][\alpha\nu])} = 0, \\ & \chi_{\alpha[\alpha\beta]} = 0, \quad \chi_{([\alpha\beta][\alpha\nu])} = 0. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Иными словами, фигурирующие в системе (6.46) тензорные величины сопоставляются следующим неприводимым представлениям группы Лоренца:

$$\begin{aligned} & \varphi_{[\alpha\beta]} \sim (0, 1), \quad \varphi_{\mu[\alpha\beta]} \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} \sim (0, 2), \\ & \chi_{[\alpha\beta]} \sim (1, 0), \quad \chi_{\mu[\alpha\beta]} \sim \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} \sim (2, 0). \end{aligned} \tag{6.49}$$

48-компонентная тензорная система, соответствующая РВУ со схемой зацеплений (6.31), имеет вид [47]



$$\begin{aligned}
& \partial_\nu \varphi_{[\alpha\nu][\alpha\beta]} + \partial_\alpha \varphi_{[\alpha\beta]} + m\varphi_\beta = 0, \\
& \partial_\lambda \varphi_{\lambda[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \partial_\lambda \varphi_\rho) + m\varphi_{[\alpha\beta]} = 0, \\
& \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \partial_\mu \varphi_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha} \partial_\eta \varphi_{[\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\eta \varphi_{[\eta\alpha]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\alpha]} + \\
& + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\eta \varphi_{[\eta\rho]} + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\rho]}) + m\varphi_{\mu[\alpha\beta]} = 0, \\
& -\partial_\eta \varphi_{\nu[\eta\beta]} + \frac{1}{3}(2\partial_\nu \varphi_\beta + 2\partial_\beta \varphi_\nu - \delta_{\nu\beta} \partial_\rho \varphi_\rho) - i\varepsilon_{\rho\nu\eta\xi} \partial_\eta \varphi_{\xi[\rho\beta]} + m\varphi_{[\eta\nu][\eta\beta]} = 0, \\
& \partial_\nu \chi_{[\alpha\nu][\alpha\beta]} + \partial_\alpha \chi_{[\alpha\beta]} + m\chi_\beta = 0, \\
& \partial_\lambda \chi_{\lambda[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \chi_\beta - \partial_\beta \chi_\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \partial_\lambda \chi_\rho) + m\chi_{[\alpha\beta]} = 0, \\
& \partial_\nu \chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \partial_\mu \chi_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha} \partial_\eta \chi_{[\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\eta \chi_{[\eta\alpha]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\alpha]} + \\
& + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\eta \chi_{[\eta\rho]} + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\rho]}) + m\chi_{\mu[\alpha\beta]} = 0, \\
& -\partial_\eta \chi_{\nu[\eta\beta]} + \frac{1}{3}(2\partial_\nu \chi_\beta + 2\partial_\beta \chi_\nu - \delta_{\nu\beta} \partial_\rho \chi_\rho) + i\varepsilon_{\rho\nu\eta\xi} \partial_\eta \chi_{\xi[\rho\beta]} + m\chi_{[\eta\nu][\eta\beta]} = 0.
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Здесь тензорные величины сопоставляются представлениям

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta & \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \varphi_{[\alpha\beta]} & \sim (0, 1), & \varphi_{\mu[\alpha\beta]} & \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), & \varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & \sim (1, 1), \\
\chi_\beta & \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)', & \chi_{[\alpha\beta]} & \sim (1, 0), & \chi_{\mu[\alpha\beta]} & \sim \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), & \chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & \sim (1, 1)'.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

При этом тензоры $\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ и $\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ удовлетворяют условиям самодуальности

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & = i\varphi_{[\mu\nu][\eta\xi]}, & \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & = -i\varphi_{[\eta\xi][\alpha\beta]}, \\
\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & = -i\chi_{[\mu\nu][\eta\xi]}, & \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\mu\nu}\chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} & = i\chi_{[\eta\xi][\alpha\beta]}.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Рассматриваемым алгебраическим обобщениям уравнения ДК присущи группы внутренней симметрии $SU(4, 4)$ (32-компонентная система) и $SU(6, 6)$ (48-компонентная система). Как и в случае уравнения ДК, преобразования внутренней симметрии Q здесь не коммутируют с преобразованиями Лоренца Λ . Но при этом группу полной инвариантности G можно представить в виде прямого произведения $Q = \Lambda' \otimes G$, где Λ' – лоренцевские преобразования, которые характеризуют набор из восьми и двенадцати дираковских полей соответственно. Кроме того, обе системы допускают физически непротиворечивое квантование по статистике Ферми – Дирака. Процедура их квантования мы рассматривать не будем, поскольку она вполне аналогична рассмотренному в главе 5 квантованию уравнения ДК. Полное изложение этого вопроса можно найти в работах [48; 49].

Перечисленные свойства 32- и 48-компонентной тензорных систем по тем же соображениям, что и в случае уравнения ДК, предполагают возможность их использования для пространственно-временного описания внутренних степеней фермионов. Первая



из них может служить, например, в качестве кварковой модели с восемью ароматами, вторая – для геометризованного введения $SU(3)$ -калибровочного взаимодействия в решеточном пространстве [50].

Дальнейшее обобщение обсуждаемого геометризованного способа введения внутренних квантовых чисел возможно при отказе от ограничения, сформулированного в начале данного пункта и связанного с размерностью пространства состояний. Поясним сказанное.

Уравнение ДК может быть представлено в форме

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \Psi_\alpha^D = 0, \quad (6.53)$$

где Ψ^D – дираковский биспинор, α – свободный индекс, соответствующий зарядово-сопряженному биспинору $\bar{\Psi}^c = C(\Psi^D)^*$, C – матрица зарядового сопряжения. Запись (6.53) означает переход в базис (мы его назвали фермионным), в котором представление (5.15) трактуется как прямое произведение

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)]. \quad (6.54)$$

При отказе от вышеуказанного ограничения уравнение ДК допускает обобщения, которые заключаются в рассмотрении вместо (6.54) всевозможных произведений вида

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)], \quad (6.55)$$

при условии, что сумма $(j_1 + j_2)$ принимает полуцелые значения.

Остановимся на двух классах РВУ, наиболее перспективных с интересующей нас точки зрения и включающих рассмотренные 32- и 48-компонентную системы дираковско-го типа в качестве частных случаев.

Возьмем в (6.55) $j_1 = 0$ (либо $j_2 = 0$, что то же самое). Получим представление

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(0, j) \oplus (j, 0)] \quad (j = j_2). \quad (6.56)$$

При $j = \frac{1}{2}$ (6.56) совпадает с (6.54), а при $j = \frac{3}{2}$ приводит к схеме зацеплений (6.18) и соответственно к 32-компонентному РВУ с тензорной формулировкой (6.46). Случаи $j = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots$ дают схемы зацеплений

$$(0, 3) \text{ --- } \begin{array}{c} (0, 2) \\ | \\ (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \end{array} \oplus \begin{array}{c} (2, 0) \\ | \\ (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \text{ --- } (3, 0), \quad (6.57)$$

$$(0, 4) \text{ --- } \begin{array}{c} (0, 2) \\ | \\ (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \end{array} \oplus \begin{array}{c} (2, 0) \\ | \\ (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}) \end{array} \text{ --- } (4, 0) \quad (6.58)$$



и так далее. Методика построения на основе (6.57), (6.58) диракоподобных РВУ аналогична той, что применялась при исследовании схемы зацеплений (6.18). Несущественные с точки зрения процедуры различия заключаются в неодинаковости спиновой структуры получаемых уравнений. Если схема (6.18) приводит к матрице Γ_4 со спиновыми блоками C^1, C^2 , то в случае (6.57) получаем блоки C^2, C^3 , в случае (6.58) – C^3, C^4 и так далее. При сопоставлении этим РВУ дираковских частиц с внутренними степенями свободы соответствующее собирательное квантовое число принимает 8, 12, 16, ... значений.

Второй случай: $|j_1 - j_2| = \frac{1}{2}$. Возникающий при этом класс РВУ базируется на приводимых представлениях, которые являются прямыми произведениями вида

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})], \quad (6.59)$$

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(1, \frac{3}{2}) \oplus (\frac{3}{2}, 1)], \quad (6.60)$$

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(\frac{3}{2}, 2) \oplus (2, \frac{3}{2})] \quad (6.61)$$

и тому подобное. Произведению (6.59) соответствует схема зацеплений (6.17) (или (6.31)) и 48-компонентное РВУ дираковского типа, матричная и тензорная формулировки которых даны выше. Представлениям (6.60), (6.61) отвечают схемы зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) & \text{---} & 2(1, 1) & \text{---} & (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \\ | & & | & & | \\ (1, 2) & \text{---} & 2(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) & \text{---} & (2, 1), \end{array} \quad (6.62)$$

$$\begin{array}{ccccc} (1, 2) & \text{---} & 2(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) & \text{---} & (2, 1) \\ | & & | & & | \\ (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) & \text{---} & 2(2, 2) & \text{---} & (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), \end{array} \quad (6.63)$$

имеющие структуру, сходную с (6.17).

Возможность построения на основе схем зацеплений данного класса P -инвариантных РВУ дираковского типа вытекает из того, что каждой из них можно сопоставить уравнение Дирака для биспинора со свободным индексом, соответствующим представлению $[(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)]$. При этом схема (6.62) описывает спины 0, 1, 2, 3, схема (6.63) – спины 0, 1, 2, 3, 4 и так далее. При сопоставлении (в указанном выше смысле) данным уравнениям частиц со спином $\frac{1}{2}$ и внутренними степенями свободы собирательное внутреннее квантовое число принимает 12, 24, 40, ... значений. Очевидно, что рассмотренные обобщения уравнения ДК предоставляют весьма широкие возможности с точки зрения геометризованного описания внутренних (помимо спина) степеней свободы дираковских частиц.

7. Совместное описание безмассовых полей с различными спиральностями

Обсудим теперь, какие возможности открывает использование кратных представлений группы Лоренца в теории РВУ с точки зрения описания безмассовых полей.



Для начала проанализируем простейшую схему зацеплений (1.15) на предмет построения на ее основе различных безмассовых РВУ. Схеме (1.15) соответствует следующий наиболее общий вид релятивистски-инвариантной тензорной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a\psi_\mu = 0, \quad (7.1)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + b\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.2)$$

где a, b – произвольные постоянные коэффициенты. Существуют четыре принципиально различные возможности в выборе этих коэффициентов.

Первая, когда $a = b = m$, приводит к системе Даффина – Кеммера (см. (2.19)) для микрочастицы с ненулевой массой и спином $s = 1$. Этот случай нас сейчас не интересует. Вторая $a = b = 0$ приводит к не имеющим физического смысла независимым уравнениям

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \quad (7.3)$$

Выбирая в (7.1), (7.2) $a = 0, b = 1$, получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.4)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (7.5)$$

Если трактовать здесь компоненты вектора ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то уравнения (7.4), (7.5) представляют собой систему уравнений Максвелла (так называемая десятимерная формулировка), описывающую фотон – безмассовую частицу со спиральностью ± 1 . При этом первое из них является уравнением движения, а второе выступает как определение напряженности через потенциалы.

Наконец, возможен выбор $a = 1, b = 0$, который приводит к системе

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \quad (7.6)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \quad (7.7)$$

Если в данном случае по-прежнему трактовать ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то система (7.6), (7.7) становится неопределенной в том смысле, что напряженности не могут быть выражены через потенциалы. Ситуация, однако, существенно изменяется, если придерживаться иной интерпретации входящих в эту систему величин, а именно: считать потенциалом тензор $\psi_{[\mu\nu]}$, а напряженностью – вектор ψ_μ . Тогда система (7.6), (7.7) становится вполне определенной: уравнение (7.6) выступает как определение напряженности через потенциал, уравнение (7.7) – как уравнение движения.

Физический смысл системы (7.6), (7.7) вытекает из следующих соображений. Из уравнения (7.6) имеем

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0. \quad (7.8)$$

С учетом (7.8) из уравнения движения (7.7) легко получить уравнение второго порядка

$$\square \psi_\mu = 0, \quad (7.9)$$



которое указывает на отсутствие массы у микрообъекта, описываемого системой (7.6), (7.7).

Как известно, в теории безмассового векторного поля, базирующейся на уравнениях (7.4), (7.5), на потенциалах можно задать преобразования

$$\psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (7.10)$$

называемые градиентными, или калибровочными преобразованиями второго рода. Произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ позволяет исключить «лишние» состояния, оставляя лишь две (из четырех) поперечные составляющие. В свою очередь, уравнения (7.6)–(7.9) инвариантны относительно преобразований потенциалов

$$\psi_{[\mu\nu]} \rightarrow \psi'_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (7.11)$$

где калибровочные функции $\Lambda_\mu(x)$ ограничены условием

$$\square \Lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu = 0. \quad (7.12)$$

В работе Огиевецкого и Полубаринова [51] показано, что калибровочная инвариантность такого рода оставляет у тензор-потенциала только одну независимую компоненту, соответствующую состоянию с нулевой спиральностью.

Остановимся подробнее на указанной работе. Для этого вернемся к схеме зацеплений (1.15), в которой представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ будем считать псевдовекторным. В этом случае можно построить, во-первых, теорию псевдовекторной частицы с нулевой массой

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} = 0, \quad (7.13)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + \psi_{[\mu\nu]} = 0 \quad (7.14)$$

(так называемая электродинамика с псевдовекторным потенциалом). Вводя вместо псевдовектора $\tilde{\psi}_\mu$ сопряженный ему антисимметричный тензор третьего ранга $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$, вместо (7.13), (7.14) придем к системе

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} = 0, \quad (7.15)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\nu\alpha]} = 0, \quad (7.16)$$

в которой $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ выступает в роли потенциала.

Во-вторых, можно получить систему уравнений

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \quad (7.17)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0 \quad (7.18)$$

или эквивалентную ей систему

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (7.19)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (7.20)$$



Рассматривая здесь $\psi_{[\mu\nu]}$ как тензор-потенциал, а $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – как напряженность, мы приходим к теории Огиевецкого – Полубаринова для безмассовой частицы со спиральностью 0. Действительно, в работе [51] для тензор-потенциала $\psi_{[\mu\nu]}$ в качестве исходного постулируется уравнение второго порядка

$$\square\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\partial_\alpha\psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu\partial_\alpha\psi_{[\mu\alpha]} = 0. \quad (7.21)$$

Нетрудно убедиться, что оно коррелирует с системой первого порядка (7.19), (7.20). Кроме того, уравнение (7.21) инвариантно относительно калибровочных преобразований (7.11), (7.12), что позволяет наложить на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$ дополнительное условие

$$\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.22)$$

равносильное условию

$$\partial_\mu\partial_\alpha\psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu\partial_\alpha\psi_{[\mu\alpha]} = 0.$$

В результате уравнение (7.21) распадается на уравнения

$$\square\psi_{[\mu\nu]} = 0 \quad (7.23)$$

и (7.22).

Что касается системы (7.6), (7.7), то уравнение (7.22) можно получить из нее непосредственно. Таким образом, в обоих вариантах теории безмассовой частицы со спиральностью 0 (имеются в виду системы (7.6), (7.7) и (7.19), (7.20)) получаются одинаковые уравнения второго порядка для потенциалов. Различие же этих двух теорий заключается в том, что в системе (7.6), (7.7) напряженность является истинным вектором, а в системе (7.19), (7.20) – антисимметричным тензором третьего ранга, или, иначе говоря, псевдовектором. Кроме того, если для системы (7.6), (7.7) уравнение второго порядка (7.22) выступает как основное, а уравнение (7.23) – как дополнительное условие, то по отношению к системе (7.19), (7.20), наоборот, (7.23) является основным уравнением, а (7.22) – дополнительным условием. Однако эти различия не сказываются на числе степеней свободы, соответствующим обеим теориям.

В [51] безмассовая частица, описываемая системой (7.19), (7.20), была названа нотофом. Это название отражает дополнительность свойств фотона и нотофа как в смысле спиральности, так и в отношении лоренцевских трансформационных свойств потенциалов и напряженностей. Нотоф, описываемый системой (7.6), (7.7), естественно назвать дуальным нотофом.

Здесь будет кстати обсудить вопрос о так называемом «спиновом скачке» (spin jumping). В работах ряда авторов (см., напр., [52; 53]) частица, описываемая системой (7.6), (7.7), трактуется как скалярный безмассовый мезон. Отсюда делается вывод об изменении (скачке) спина при переходе от системы (2.19) к системе (7.6), (7.7). Однако анализ матричной формулировки (1.2) (или (1.1) в случае ненулевой массы) рассмотренных выше тензорных систем, базирующихся на схеме зацеплений (1.15), показывает, что их единственное существенное отличие состоит в виде матрицы Γ_0 . Для частицы



с ненулевой массой $\Gamma_0 = mI$. Для фотона и нотофа в тензорном базисе будем иметь соответственно

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & I_6 \end{pmatrix}, \quad (7.24)$$

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & 0_6 \end{pmatrix}. \quad (7.25)$$

При этом матрица Γ_0 (7.24) вырезает из волновой функции одну из трех проекций спина $s = 1$, оставляя для фотона две проекции ($s_z = \pm 1$), а матрица Γ_0 (7.25), вырезая две проекции, оставляет для нотофа лишь одну ($s_z = 0$). И поскольку спиновый блок C^0 во всех случаях остается равным нулю (смотри (2.12)), очевидно, что ненулевые степени и фотона и нотофа связаны со спиновым блоком C^1 . Так что, на самом деле, в данном случае имеет место переход степеней свободы (состояний) массивной векторной частицы с проекциями спина $s_z = \pm 1$ в степени свободы (состояния) фотона со спиральностью ± 1 , и точно также переход состояния массивной векторной частицы с проекцией спина $s_z = 0$ в соответствующее состояние нотофа со спиральностью 0. При обратном же переходе, например, от реальных фотона и нотофа к их виртуальным аналогам, обладающим массой, виртуальный фотон приобретает дополнительное состояние с нулевой проекцией спина, а виртуальный нотоф – дополнительные состояния с проекцией спина ± 1 . Другими словами, нотоф, как и фотон, переносит во взаимодействиях спин 1. Поэтому более точно, на наш взгляд, рассматривать нотоф как безмассовую *векторную* частицу со спиральностью равной 0, что соответствует и точке зрения авторов работы [51].

Обобщая проделанный выше анализ, можно сделать вывод, что теория РВУ первого порядка вида (1.2) позволяет описывать безмассовые частицы (поля) не только с максимальной для данного набора представлений группы Лоренца спиральностью $\pm s$, но и с промежуточными значениями спиральности, включая нулевую.

Первооткрыватели нотофа не смогли предложить для него каких-либо физических приложений. В 1974 году Кальб и Рамонд [52], по существу, переоткрыли нотоф, рассматривая вопрос о феноменологическом описании взаимодействия струн. Впоследствии за полевой системой, сопоставляемой уравнениям (7.19), (7.20), в литературе утвердилось название поля Кальба – Рамонда (см., напр., [53; 54]).

В [51] тензор $\psi_{[\mu\nu]}$ предлагается в качестве потенциала поля – переносчика взаимодействия замкнутых струн в пространстве размерности $d = 4$. Очевидно, что для описания взаимодействия открытых струн одного лишь поля Кальба – Рамонда (нотофа Огиевецкого – Полубаринова) недостаточно. Моделируя концы струны как точечные электрические заряды, необходимо ввести вектор-потенциал, соответствующий электромагнитному полю. И поскольку струна является единым физическим объектом, естественна постановка задачи о совместном описании фотона и нотофа на основе одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений первого порядка.

С этой целью рассмотрим схему зацеплений (4.1), в которой представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ сопоставляется истинному вектору, а представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ – псевдовектору, или антисимметричному тензору третьего ранга. Наиболее общая тензорная система уравнений первого порядка, соответствующая схеме (4.1) и удовлетворяющая стандартным физиче-



ским требованиям, имеет вид

$$\begin{aligned}\alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a \psi_\mu &= 0, \\ \beta \partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + b \tilde{\psi}_\mu &= 0, \\ \alpha^* (-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + \beta^* \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + c \psi_{[\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\tag{7.26}$$

где α, β, a, b, c – произвольные параметры. Систему (7.26) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a \psi_\mu &= 0, \\ \beta (\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}) + b \psi_{[\mu\nu\alpha]} &= 0, \\ \alpha^* (-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu) + \beta^* \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} + c \psi_{[\nu\alpha]} &= 0.\end{aligned}\tag{7.27}$$

Положим в (7.27)

$$\alpha = \beta = 1, \quad a = c = 0, \quad b = 1.\tag{7.28}$$

Получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0,\tag{7.29}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0,\tag{7.30}$$

$$-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu + \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0.\tag{7.31}$$

Примем следующую трактовку входящих в (7.29)–(7.31) величин: ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$ – потенциалы, $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженность. Тогда уравнение (7.30) является, по существу, определением напряженности через потенциалы. Уравнение (7.29) играет роль дополнительного условия на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$, которое изначально содержится в самой системе. Данное условие оставляет у потенциала только две независимые компоненты. Кроме того, система (7.29)–(7.31) инвариантна относительно калибровочных преобразований (7.11), (7.12). Имеющийся произвол в выборе калибровочной функции позволяет наложить условие, исключающее еще одну независимую степень свободы, связанную с тензор-потенциалом $\psi_{[\mu\nu]}$. При этом для $\psi_{[\mu\nu]}$ имеем уравнение второго порядка

$$\square \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu = 0,\tag{7.32}$$

которое описывает состояние некоторого безмассового поля со спиральностью 0.

Обратимся к потенциалу ψ_μ . Система (7.29)–(7.31) инвариантна также относительно калибровочных преобразований

$$\psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda,\tag{7.33}$$

где Λ – произвольная скалярная функция. Из уравнения (7.31) вытекает уравнение второго порядка

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0,\tag{7.34}$$



которое совместно с калибровочной инвариантностью (7.33) означает, что вектор-потенциал ψ_μ характеризует поперечную составляющую (спиральность ± 1) обсуждаемого безмассового поля. Тогда тензор

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu \equiv F_{[\mu\nu]} \quad (7.35)$$

естественно рассматривать как напряженность, непосредственно связанную с этой поперечной составляющей. Уравнение же (7.31), переписанное с учетом обозначения (7.35) в виде

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} - F_{[\nu\alpha]} = 0, \quad (7.36)$$

выступает, очевидно, в качестве уравнения движения в системе (7.29)–(7.31).

Таким образом, выбор (7.28) параметров в системе (7.27) приводит к не распадающейся по группе Лоренца теории, которая дает совместное описание безмассовых полей со спиральностями 0 и ± 1 , то есть поля Кальба – Рамонда (нотифа) и электромагнитного поля. Уравнение движения (7.36) указывает на неразрывную связь этих полей подобно тому, как связаны электрическая и магнитная составляющие в теории Максвелла. Точнее даже говорить не о совместном описании указанных полей, а о едином безмассовом поле с тремя возможными значениями спиральности 0, ± 1 .

Интерпретируя данное поле в качестве переносчика взаимодействия между открытыми струнами в пространстве размерности $d = 4$, можем ввести в систему (7.29)–(7.31) источники. При этом учтем, что в данном случае существует два типа источников: тензорный ток $j_{[\mu\nu]}$, который создается телом струны (body string), и векторный ток j_μ , создаваемый концами струны. Последние при этом рассматриваются как точечные электрические заряды противоположных знаков. Между токами j_μ и $j_{[\mu\nu]}$ существует связь

$$j_\nu = \partial_\mu j_{[\mu\nu]}, \quad (7.37)$$

из которой следует, что j_μ сохраняется ($\partial_\mu j_\mu = 0$), а $j_{[\mu\nu]}$, вообще говоря, не сохраняется ($\partial_\mu j_{[\mu\nu]} \neq 0$). Вводя ток $j_{[\mu\nu]}$ в уравнение движения (7.31), получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.38)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (7.39)$$

$$-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu + \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\nu\alpha]}. \quad (7.40)$$

описывающую единое поле открытой струны в присутствии источников.

В частных случаях, когда рассматривается взаимодействие замкнутых струн или электрически заряженных частиц, компоненты единого поля могут существовать и описываться по отдельности. Так, полагая в системе $j_\mu = 0$, получим согласно (7.37)

$$\partial_\mu j_{[\mu\nu]} = 0. \quad (7.41)$$

И система (7.38)–(7.40) трансформируется в уравнения (7.19), (7.20) (с членом $j_{[\nu\alpha]}$ в правой части) и дополнительное условие (7.22), описывающие поле Кальба – Рамонда с источником. В свою очередь, беря от уравнения (7.40) производную ∂_α и учитывая определения (7.35), (7.37), придем к уравнению

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = j_\mu. \quad (7.42)$$



Объединяя уравнение (7.42) с (7.35) и исключая из рассмотрения величины $\psi_{[\mu\nu]}$, $\dot{j}_{[\mu\nu]}$, относящиеся к телу струны, получим максвелловскую систему для электромагнитного поля с источником.

В матричном формализме система (7.29)–(7.31) соответствует РВУ типа (1.2) с особенной матрицей Γ_0 , имеющей в тензорном базисе вид

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & & \\ & I_4 & \\ & & 0_6 \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Выражения для спиновых блоков C^0 , C^1 матрицы Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома задаются соответственно формулами (4.3), (4.17). Отсюда следует, что безмассовое поле, описываемое этим РВУ, действительно переносит спин 1, причем собственное значение $\lambda = \pm 1$ спинового блока C^1 двукратно вырождено. В контексте вышесказанного такое вырождение соответствует совместному описанию электромагнитного поля (фотона) и поля Кальба – Рамонда (нотифа) как составляющих единого безмассового векторного поля с тремя возможными значениями спиральности $s = 0, +1, -1$. Нулевое значение массы при этом обеспечивает проективная матрица Γ_0 , которая устраняет «лишние» состояния, присущие массивному аналогу данного поля.

Таковым аналогом, как нетрудно видеть, является частица, которая обсуждалась в главе 4. Действительно, совершая в рассматриваемом безмассовом РВУ замену $\Gamma_0 \rightarrow mI$, мы приходим к полученному в указанном пункте РВУ для киральной частицы со спином $s = 1$ и ненулевой массой. Тензорная форма (4.19) этого РВУ может быть получена из системы (7.26) при выборе параметров $\alpha = \beta = 1$, $a = b = c = m$. Данное положение вещей проливает определенный свет на физический смысл квантового числа «киральность» для частиц с ненулевой массой, а именно: в том смысле, в каком виртуальному фотону или нотифу сопоставляется векторная частица, описываемая обычным уравнением Даффина – Кеммера, виртуальному объединенному полю фотона и нотифа сопоставляется векторная частица с ненулевой массой и дополнительной внутренней степенью свободы – киральностью. При обратном переходе $mI \rightarrow \Gamma_0$ проективная матрица Γ_0 «вырезает» лишние состояния, оставляя в сумме три степени свободы на фотон и нотиф.

Подводя итог данному пункту, можно сказать, что теория РВУ вида (1.2) позволяет описывать безмассовые поля не только с максимальной (для данного набора представлений группы Лоренца) спиральностью $\pm s$, но и поля с промежуточными значениями спиральности, а также осуществлять совместное описание полей с различными значениями спиральности от $+s$ до $-s$, включая промежуточные, в рамках не распадающегося по группе Лоренца РВУ. В последнем случае требуется расширенный (по сравнению с необходимым для описания спиральности $\pm s$) набор неприводимых представлений группы Лоренца в пространстве волновой функции Ψ .

Принципиально иным способом объединения безмассовых полей с различными спиральностями является механизм калибровочно-инвариантного смешивания, или $\hat{B} \wedge \hat{F}$ -теория [52; 53]. Этот способ приводит к появлению массы у объединенного поля и, в принципе, может претендовать на роль механизма генерации массы, альтернативного механизму Хиггса.



Рассмотрим вкратце суть $\hat{B} \wedge \hat{F}$ -теории, дадим ее матричную интерпретацию. Возьмем в качестве исходных безмассовые поля, описываемые системами уравнений (7.4), (7.5) и (7.17), (7.18). Первая из них описывает фотон – безмассовое векторное поле со спиральностью ± 1 , вторая – нотоф, или безмассовое поле со спиральностью 0. Перепишем систему (7.17), (7.18) в виде

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (7.44)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (7.45)$$

где для удобства использовано обозначение

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \varphi_{[\alpha\beta]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}. \quad (7.46)$$

Напомним, что величины ψ_μ и $\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$ выступают в этих системах в качестве потенциалов, а $\psi_{[\mu\nu]}$ и $\tilde{\varphi}_\mu$ – в качестве напряженностей указанных полей.

Далее в лагранжиан \mathcal{L}_0 системы (7.4), (7.5), (7.44), (7.45) (его вид не выписываем за ненадобностью) вводится дополнительный член

$$\mathcal{L}_{int} = m\psi_\mu \partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}, \quad (7.47)$$

который не нарушает инвариантность этой системы относительно калибровочных преобразований (7.33) и преобразований вида (7.11), (7.12) для потенциала $\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$. Данную процедуру называют калибровочно-инвариантным смешиванием или топологическим взаимодействием исходных безмассовых полей.

Варьирование суммарного лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ дает систему уравнений

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (7.48)$$

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.49)$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (7.50)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (7.51)$$

Вводя в рассмотрение величины

$$\tilde{G}_\mu = \psi_\mu - \frac{1}{m} \tilde{\varphi}_\mu, \quad G_{[\mu\nu]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} - \frac{1}{m} \psi_{[\mu\nu]}, \quad (7.52)$$

систему (7.48)–(7.51) можно в конечном счете привести к виду

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\tilde{\varphi}_\mu = 0, \quad (7.53)$$

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.54)$$

$$\partial_\nu G_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7.55)$$

$$-\partial_\mu \tilde{G}_\nu + \partial_\nu \tilde{G}_\mu = 0. \quad (7.56)$$

Система (7.53)–(7.56) распадается на лоренц-инвариантные подсистемы (7.53), (7.54) и (7.55), (7.56). Первая из них описывает векторную частицу с ненулевой массой.



Подсистема (7.55), (7.56) физического поля не описывает, поскольку ей соответствует нулевая плотность энергии. Ее присутствие в системе (7.53)–(7.56) связано с формальными соображениями сохранения калибровочной инвариантности теории на всех этапах.

На языке матричного формализма теории РВУ $\hat{B} \wedge \hat{F}$ -теория интерпретируется следующим образом. Исходную тензорную систему (7.4), (7.5), (7.44), (7.45) можно представить в форме (1.2), где при использовании базиса

$$\Psi = (\psi_\mu, \psi_{[\mu\nu]}, \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}, \tilde{\varphi}_\mu)^T \quad (7.57)$$

матрицы Γ_μ, Γ_0 имеют вид

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \Gamma_\mu^{DK} & \\ & \Gamma_\mu^{DK} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & & & \\ & I_6 & & \\ & & 0_6 & \\ & & & I_4 \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

(Γ_μ^{DK} – 10-мерные матрицы Даффина – Кеммера).

Введение в лагранжиан топологического члена (7.47) приводит к изменению вида матриц Γ_μ . Подстановки (7.52) эквивалентны некоторому унитарному преобразованию базиса (7.57), в результате чего матрицы Γ_μ принимают первоначальный вид (7.58). Матрица же Γ_0 при этом видоизменяется следующим образом:

$$\Gamma_0 \rightarrow \begin{pmatrix} mI_4 & & & \\ & mI_6 & & \\ & & 0_6 & \\ & & & 0_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI_{10} & \\ & 0_{10} \end{pmatrix}. \quad (7.59)$$

Таким образом, получается РВУ (1.2) с матрицами Γ_μ (7.58) и Γ_0 (7.59), которое представляет собой прямую сумму уравнения Даффина – Кеммера для спина 1 и безмассовый предел ($m \rightarrow 0$) этого уравнения. По сути, данный способ генерации массы с точки зрения теории РВУ сводится к перестановке нулевых и единичных блоков матрицы Γ_0 . При этом число степеней свободы полевой системы (равное трем) остается прежним, но имеет место их перераспределение: нотоф как бы передает свою степень свободы фотону, что автоматически приводит к появлению частицы с ненулевой массой и спином 1. Можно сказать, что происходит своего рода «аннигиляция» фотона и нотофа с образованием векторной частицы с ненулевой массой.

8. Массивные калибровочно-инвариантные поля в теории РВУ

Как отмечалось в предыдущем пункте, одно из отличий в описании бозонов с ненулевой и нулевой массой состоит в том, что в безмассовом случае часть компонент волновой функции Ψ являются ненаблюдаемыми (потенциалы), а часть – наблюдаемыми (напряженности). На потенциалах можно задать калибровочные преобразования (речь по-прежнему идет о преобразованиях второго рода) и наложить дополнительные условия, исключая «лишние» компоненты функции Ψ . При описании же частиц с ненулевой массой указанное разграничение компонент волновой функции явным образом не имеет



места. Поэтому понятие калибровочной инвариантности в вышеуказанном смысле применяется обычно по отношению к теориям безмассовых частиц (полей).

Вместе с тем, известны работы (см., напр., [55]), в которых в разных подходах обсуждаются так называемые массивные калибровочно-инвариантные теории. В связи с этим возникают вопросы: каков статус таких теорий в подходе, основанном на использовании матричной формы РВУ; по каким признакам различаются калибровочно-инвариантные РВУ для частиц с ненулевой и нулевой массой?

Рассмотрим набор неприводимых представлений группы Лоренца

$$(0, 0) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0), \quad (8.1)$$

образующих схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} & (0, 0) & \\ & | & \\ (0, 1) & - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - & (1, 0). \end{array} \quad (8.2)$$

Схеме (8.2) соответствует в общем случае тензорная система уравнений первого порядка

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + a \psi_0 = 0, \quad (8.3)$$

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b \psi_\mu = 0, \quad (8.4)$$

$$\beta(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + c \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8.5)$$

В случае, когда ни один из параметров в этой системе не равен нулю, она описывает микрообъект с набором спинов 0, 1 и двумя массами

$$m_1 = \frac{\sqrt{ab}}{|\alpha|}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{bc}}{|\beta|}, \quad (8.6)$$

причем масса m_1 относится к спину 0, а масса m_2 – к спину 1. Если наложить на параметры системы (8.3)–(8.5) условие

$$\frac{\sqrt{a}}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{b}}{|\beta|}, \quad (8.7)$$

получается РВУ для микрообъекта со спинами 0, 1 и одним значением массы $m = m_1 = m_2$. При $\alpha = 0$ рассматриваемая система переходит в уравнение типа Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 и массой $m = m_2$

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + b \psi_\mu = 0, \quad (8.8)$$

$$\beta(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + c \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8.9)$$

При $\beta = 0$ система (8.3)–(8.5) переходит в уравнение типа Даффина – Кеммера для частицы со спином 0 и массой $m = m_1$

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + a \psi_0 = 0, \quad (8.10)$$

$$\alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b \psi_\mu = 0. \quad (8.11)$$



Теперь перейдем к интересующим нас случаям. Положим в (8.3) $a = 0$. Получим систему

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (8.12)$$

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b\psi_\mu = 0, \quad (8.13)$$

$$\beta(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8.14)$$

Вводя обозначение

$$\varphi_\mu = \psi_\mu + \frac{\alpha^*}{b} \partial_\mu \psi_0, \quad (8.15)$$

систему (8.12)–(8.14) можно привести к виду

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + b\varphi_\mu = 0, \quad (8.16)$$

$$\beta(-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (8.17)$$

совпадающему с точностью до обозначений с системой (8.8), (8.9).

К аналогичному результату можно прийти иначе, используя соображения, связанные с калибровочной инвариантностью. Система (8.12)–(8.14) инвариантна относительно преобразований

$$\psi_0 \rightarrow \psi'_0 = \psi_0 - \frac{1}{\alpha^*} \Lambda, \quad \psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \frac{1}{b} \partial_\mu \Lambda, \quad (8.18)$$

где произвол в выборе калибровочной функции Λ ограничен условием

$$\square \Lambda = 0. \quad (8.19)$$

Но точно такое же уравнение нетрудно получить из системы (8.12)–(8.14) и для функции ψ_0 . Отсюда следует, что функция ψ_0 в системе (8.12)–(8.14) может рассматриваться как калибровочная. На нее можно наложить дополнительное условие $\psi_0 = 0$, приводящее систему (8.12)–(8.14) к системе Даффина – Кеммера (8.8), (8.9).

Данный вариант калибровочно-инвариантной теории впервые был предложен в работе [56] и известен в литературе как подход Штюкльберга к описанию частицы со спином 1 и ненулевой массой. Детальный анализ этого подхода и его преимуществ по сравнению с обычными подходами Даффина – Кеммера и Прока дан в [57].

Теперь положим в (8.3)–(8.5) $c = 0$. Получим систему уравнений

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + a\psi_0 = 0, \quad (8.20)$$

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b\psi_\mu = 0, \quad (8.21)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \quad (8.22)$$

Из (8.20)–(8.22) вытекает уравнение второго порядка

$$\square \psi_0 - \frac{ab}{|\alpha|^2} \psi_0 = 0, \quad (8.23)$$



которое означает, что эта система описывает частицу с ненулевой массой и спином $s = 0$. Система (8.20)–(8.22) инвариантна относительно преобразований

$$\psi_{[\mu\nu]} \rightarrow \psi'_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} - \frac{1}{\beta^*} \Lambda_{[\mu\nu]}, \quad \psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \frac{1}{b} \partial_\nu \Lambda_{[\mu\nu]}, \quad (8.24)$$

где произвол в выборе калибровочных функций $\Lambda_{[\mu\nu]}(x)$ ограничен условием

$$\partial_\alpha \partial_\nu \Lambda_{[\mu\nu]} - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_{[\alpha\nu]} = 0. \quad (8.25)$$

С другой стороны, как следует из уравнений (8.21), (8.22), аналогичному условию удовлетворяет тензор $\psi_{[\mu\nu]}$:

$$\partial_\alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} - \partial_\mu \partial_\nu \psi_{[\alpha\nu]} = 0. \quad (8.26)$$

Другими словами, произвол в выборе калибровочных функций $\Lambda_{[\mu\nu]}$ достаточен, чтобы на $\psi_{[\mu\nu]}$ наложить дополнительное условие

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8.27)$$

При этом исключаются состояния со спином 1, и система (8.20)–(8.22) приводится к виду (8.10), (8.11).

Данный вариант калибровочно-инвариантной теории является своего рода аналогом подхода Штюкльберга, но для описания частицы с ненулевой массой и спином $s = 0$. Впервые он был предложен нами в работе [58]. Опять-таки заметим, что систему (8.20)–(8.22) с помощью подстановки

$$\varphi_\mu = \psi_\mu + \frac{\beta^*}{b} \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} \quad (8.28)$$

можно преобразовать к виду

$$\alpha \partial_\mu \varphi_\mu + a \psi_0 = 0, \quad \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b \varphi_\mu = 0, \quad (8.29)$$

совпадающему с (8.10), (8.11) с точностью до обозначений.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в (8.3)–(8.5) $b = 0$. Получим систему

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + a \psi_0 = 0, \quad (8.30)$$

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 = 0, \quad (8.31)$$

$$\beta(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + c \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (8.32)$$

инвариантную относительно преобразования

$$\psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (8.33)$$



где калибровочная функция Λ удовлетворяет условию (8.19). Такое же условие (уравнение) вытекает из системы (8.30), (8.31) для скалярной функции ψ_0 . Это означает, что функция ψ_0 является фактически калибровочной функцией и ее, не уменьшая общности, можно выбрать равной нулю. В результате система (8.30)–(8.32) трансформируется к виду

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (8.34)$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (8.35)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8.36)$$

По своему содержанию система (8.34)–(8.36) совпадает с уравнениями Максвелла с той лишь несущественной разницей, что в теории Максвелла уравнение (8.34) выступает в качестве дополнительного условия, а в системе (8.34)–(8.36) – в качестве независимого уравнения. В обоих случаях речь идет о безмассовой частице со спиральностью ± 1 . Очевидно, что и эквивалентная (8.34)–(8.36) система (8.30)–(8.32) имеет тот же физический смысл.

Рассмотренные тензорные системы, будучи записанными в матричной форме (1.2), характеризуются одинаковым видом матриц Γ_μ . Различие состоит только в матрице Γ_0 . В базисе, в котором волновая функция Ψ имеет вид столбца

$$\Psi = (\psi_0, \psi_\mu, \psi_{[\mu\nu]})^T, \quad (8.37)$$

для Γ_0 имеют место выражения:

1) $a = 0$, система (8.12)–(8.14)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_4 & \\ & & I_6 \end{pmatrix}; \quad (8.38)$$

2) $c = 0$, система (8.20)–(8.22)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & I_4 & \\ & & 0_6 \end{pmatrix}; \quad (8.39)$$

3) $b = 0$, система (8.30)–(8.32)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0_4 & \\ & & I_6 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Сопоставляя выражения (8.37)–(8.40), нетрудно заметить, что характер поля (массивное или безмассовое), описываемого РВУ (1.2), при прочих равных условиях зависит от лоренцевской структуры члена $\Gamma_0 \Psi$. В том случае, когда этот член содержит набор лоренцевских ковариантов, минимально необходимый для построения уравнения вида (1.1) для частицы (поля) с ненулевой массой, возможно построение калибровочно-инвариантной теории массивного поля на основе РВУ вида (1.2). В противном случае



может идти речь только о теории безмассового поля. Так, система (8.12)–(8.14), представленная в форме (1.2), содержит член $\Gamma_0\Psi$, в котором присутствуют коварианты $\psi_\mu, \psi_{[\mu\nu]}$. На основе последних можно построить РВУ вида (1.1) для частицы с ненулевой массой – 10-компонентное уравнение Даффина – Кеммера (спин 1). Соответственно 11-компонентное калибровочно-инвариантное РВУ вида (1.2) с волновой функцией (8.37) и матрицей Γ_0 (8.38) также описывает векторную частицу с ненулевой массой. Калибровочно-инвариантным аналогом уравнения Даффина – Кеммера для спина 0 является система (8.20)–(8.22), или 11-компонентное матричное РВУ (1.2) с матрицей Γ_0 (8.39), в котором член $\Gamma_0\Psi$ содержит коварианты ψ_0, ψ_μ . В калибровочно-инвариантном РВУ с волновой функцией (8.37), которое сопоставляется тензорной системе (8.30)–(8.32), член $\Gamma_0\Psi$ содержит коварианты $\psi_0, \psi_{[\mu\nu]}$. На основе последних уравнение первого порядка для частицы с ненулевой массой, как это вытекает из базовых положений теории РВУ, построить нельзя. Поэтому РВУ с матрицей Γ_0 (8.40) может описывать только безмассовое поле, что и было установлено нами выше непосредственным образом.

9. Теория РВУ и электрослабое поле

В стандартной теории РВУ предусматривается лишь возможность отдельного описания микробъектов с ненулевой и нулевой массой. Однако в современной физике высоких энергий фигурируют поля, кванты которых (для данного поля) обладают как нулевой, так и ненулевой массой. Хорошо известным примером такого рода является электрослабое поле.

Если свободное электрослабое поле рассматривать как единый физический объект (а при достаточно высоких энергиях так оно и есть), то возникает вопрос, можно ли в рамках теории РВУ совместно описывать поля с ненулевой и нулевой массой (так называемые массивно-безмассовые поля). Напомним, что под совместным здесь по-прежнему понимается описание в рамках одной не распадающейся в релятивистски-инвариантном смысле системы уравнений.

Остановимся подробно на этом вопросе. Снова обратимся к схеме зацеплений (4.1), где представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ является векторным, а $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ – псевдовекторным. Если в наиболее общей тензорной формулировке релятивистски-инвариантной системы первого порядка (7.27), соответствующей схеме (4.1), положить

$$a = 0, \quad b = c = m, \quad (9.1)$$

получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (9.2)$$

$$\beta(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}) + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.3)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \beta^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (9.4)$$



Из (9.2)–(9.4) нетрудно получить уравнения второго порядка

$$(\square - \frac{m^2}{|\beta|^2})\psi_{[\mu\alpha\nu]} = 0, \quad (9.5)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.6)$$

$$\square\psi_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\psi_\nu = 0. \quad (9.7)$$

Уравнения (9.5), (9.6) означают, что система (9.2)–(9.4) содержит описание псевдовекторной частицы с ненулевой массой. Уравнение же (9.7) указывает на то, что данная система описывает еще и безмассовое векторное поле с потенциалом ψ_μ . Последнее обстоятельство позволяет использовать калибровочное преобразование вида (7.10), относительно которого инвариантны и система (9.2)–(9.4) и уравнение (9.7). Эта инвариантность означает, что указанное безмассовое поле является полем максвелловского типа со спиральностью ± 1 .

Таким образом, не распадающаяся по группе Лоренца тензорная система (9.2)–(9.4) дает совместное описание псевдовекторной частицы с ненулевой массой и безмассового векторного поля электромагнитного типа.

Отметим также, что если в (7.27) выбрать

$$b = 0, \quad a = c = m, \quad (9.8)$$

то мы приходим к дуально симметричной теории по отношению к (9.2)–(9.4) системе в том смысле, что при выборе (9.8) система (7.27) приводит к совместному описанию массивной векторной частицы и безмассового поля максвелловского типа с псевдовекторным потенциалом.

Кроме того, как уже отмечалось в главе 4, на основе схемы (4.1) можно осуществить совместное описание микрообъекта с двумя различными ненулевыми массами. Для этого в (7.27) надо положить

$$a = b = c = m. \quad (9.9)$$

В результате получим систему первого порядка

$$\alpha\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \quad (9.10)$$

$$\beta(\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]}) + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.11)$$

$$\alpha^*(-\partial_\nu\psi_\alpha + \partial_\alpha\psi_\nu) + \beta^*\partial_\mu\psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\nu\alpha]} = 0. \quad (9.12)$$

Из (9.10)–(9.12) вытекают уравнения второго порядка (9.5), (9.6), а также уравнения

$$(\square - \frac{m^2}{|\alpha|^2})\psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu\psi_\mu = 0, \quad (9.13)$$

что и подтверждает вышесказанное.

Теперь рассмотрим возможность совместного описания векторных частиц (полей), сопоставляемых системам (9.2)–(9.4) и (9.10)–(9.12). Очевидно, что простое механическое



объединение этих систем не приведет к желаемому результату, поскольку полученная таким образом система уравнений распадается в релятивистски-инвариантном смысле и, следовательно, с точки зрения теории РВУ не может описывать единый физический объект. Соответствующая схема зацеплений также распадается на два самостоятельных независимых фрагмента вида (4.1).

Самый простой и естественный способ построения нераспадающейся системы уравнений, обеспечивающей совместное описание вышеуказанных векторных полей, заключается во введении в рассмотрение дополнительного скалярного представления $(0, 0)$. В результате можно получить, например, схему зацеплений

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 (0, 1) \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \quad \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 (1, 0)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 (0, 1) \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \quad \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 (1, 0)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (9.14)$$

Соответствующая схеме (9.14) система уравнений первого порядка имеет следующий наиболее общий вид:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (9.15)$$

$$\alpha(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}) + \beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.16)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \alpha^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (9.17)$$

$$\rho \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \gamma \partial_\mu \psi_0 + m \varphi_\mu = 0, \quad (9.18)$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \varphi_{[\alpha\mu]}) + \sigma \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m \varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.19)$$

$$\rho^*(-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu) + \delta^* \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m \varphi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (9.20)$$

$$\frac{1}{3!} \beta^* \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \gamma^* \partial_\mu \psi_\mu + \frac{1}{3!} \sigma^* \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \partial_\beta \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m \psi_0 = 0. \quad (9.21)$$

Найдем уравнения второго порядка, к которым приводит система (9.15)–(9.21).

Подействуем на (9.17) оператором ∂_ν . С учетом (9.15) получим

$$\square \psi_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0. \quad (9.22)$$

Используя калибровочное преобразование (7.10), уравнение (9.22) стандартным способом можно привести к виду

$$\square \psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu = 0. \quad (9.23)$$

Применение оператора ∂_ν к уравнению (9.20) дает

$$\rho^*(\square \varphi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \varphi_\nu) + m \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (9.24)$$



Из (9.18) выразим член $\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]}$

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} = -\frac{\gamma}{\rho} \partial_\mu \psi_0 - \frac{m}{\rho} \varphi_\mu. \quad (9.25)$$

Отсюда следует

$$\partial_\mu \varphi_\mu = -\frac{\gamma}{m} \square \psi_0. \quad (9.26)$$

Подставляя (9.25), (9.26) в (9.24), будем иметь

$$\square \varphi_\mu + \frac{\gamma}{m} \partial_\mu \square \psi_0 - \frac{m\gamma}{|\rho|^2} \partial_\mu \psi_0 - \frac{m^2}{|\rho|^2} \varphi_\mu = 0. \quad (9.27)$$

Если ввести в рассмотрение вектор

$$\Phi_\mu = \varphi_\mu + \frac{\gamma}{m} \partial_\mu \psi_0, \quad (9.28)$$

уравнение (9.27) принимает вид

$$\square \Phi_\mu - \frac{m^2}{|\rho|^2} \Phi_\mu = 0. \quad (9.29)$$

При это вектор Φ_μ с учетом (9.26) удовлетворяет условию

$$\partial_\mu \Phi_\mu = 0. \quad (9.30)$$

Теперь применим к уравнению (9.17) оператор $\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\sigma$:

$$\alpha^* \varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m \varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (9.31)$$

С помощью непосредственно проверяемого тождества

$$\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma} \partial_\sigma \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = \varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \square \psi_{[\mu\nu\alpha]} - \partial_\rho \partial_\beta \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \psi_{[\mu\nu\alpha]}$$

уравнение (9.31) приводится к виду

$$\alpha^* (\varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \square \psi_{[\mu\nu\alpha]} - \partial_\rho \partial_\beta \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \psi_{[\mu\nu\alpha]}) + m \varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha} \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (9.32)$$

Из уравнения (9.16) вытекает

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} = -\frac{\beta}{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 - \frac{m}{\alpha} \psi_{[\mu\nu\alpha]}. \quad (9.33)$$

Применяя к (9.16) оператор $\frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} \partial_\rho$, получим

$$\frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho} \partial_\rho \psi_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{\beta}{m} \square \psi_0. \quad (9.34)$$



Комбинация уравнений (9.32)–(9.34) дает

$$\square\psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\psi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\beta}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\square\psi_0 - \frac{\beta m}{|\alpha|^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0 = 0. \quad (9.35)$$

Посредством обозначения

$$\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\beta}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0 \quad (9.36)$$

приведем уравнение (9.35) к виду

$$\square\Psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (9.37)$$

Одновременно с (9.37) в соответствии с (9.34) имеем условие

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (9.38)$$

Аналогичным образом из системы (9.15)–(9.21) можно получить уравнение второго порядка

$$\square\Phi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\delta|^2}\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = 0 \quad (9.39)$$

с дополнительным условием

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (9.40)$$

где

$$\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\sigma}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0. \quad (9.41)$$

Найдем, наконец, уравнение второго порядка для скаляра ψ_0 . Для этого, применяя оператор $\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho$ к уравнению (9.19), будем иметь

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho\varphi_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{\sigma}{m}\square\psi_0. \quad (9.42)$$

Подставляя теперь (9.26), (9.34) и (9.42) в (9.21), получим

$$\square\psi_0 - \frac{m^2}{|\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2}\psi_0 = 0. \quad (9.43)$$

Уравнения (9.23), (9.29), (9.30), (9.37)–(9.40) и (9.43) показывают, что в не распадающейся по группе Лоренца системе первого порядка (9.15)–(9.21) содержится описание четырех частиц (полей) со спином 1, одна из которых имеет нулевую массу, а также скалярной частицы с ненулевой массой.



Тензорная система (9.15)–(9.21) может быть представлена в стандартной матричной форме РВУ (1.2) с особенной матрицей Γ_0 вида

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & mI_{25} \end{pmatrix}. \quad (9.44)$$

Дадим формулировку этого РВУ в базисе Гельфанда – Яглома.

Введем, как обычно, нумерацию неприводимых представлений, содержащихся в схеме зацеплений (9.14), например:

$$\begin{aligned} (0, 0) &\sim 1 (\psi_0), & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &\sim 2 (\psi_\mu), & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' &\sim 3 (\psi_{[\mu\nu\alpha]}), \\ (0, 1), (1, 0) &\sim 4, 5 (\psi_{[\mu\nu]}), & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &\sim 6 (\varphi_\mu), \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' &\sim 7 (\varphi_{[\mu\nu\alpha]}), & (0, 1), (1, 0) &\sim 8, 9 (\varphi_{[\mu\nu]}). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Тогда для спиновых блоков C^0, C^1 матрицы Γ_4 получим следующие общие выражения:

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^0 & c_{16}^0 & c_{17}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{61}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{71}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} (C^1)' & \\ & (C^1)'' \end{pmatrix}, \quad (9.46)$$

$$(C^1)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{25}^1 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{35}^1 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \\ c_{52}^1 & c_{53}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{68}^1 & c_{69}^1 \\ 0 & 0 & c_{78}^1 & c_{79}^1 \\ c_{86}^1 & c_{87}^1 & 0 & 0 \\ c_{96}^1 & c_{97}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

Условия инвариантности (1.41) рассматриваемого РВУ относительно преобразований собственной группы Лоренца никаких ограничений на элементы c_{ij}^0, c_{ij}^1 здесь не накладывает. Требование P -инвариантности теории применительно к электрослабому полю не является актуальным. Условие (1.48) возможности лагранжевой формулировки теории приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} c_{31}^0 &= f(c_{13}^0)^*, & c_{61}^0 &= g(c_{16}^0)^*, & c_{71}^0 &= h(c_{17}^0)^*, \\ c_{42}^1 &= p(c_{25}^1)^*, & c_{52}^1 &= p(c_{24}^1)^*, & c_{43}^1 &= q(c_{35}^1)^*, & c_{53}^1 &= q(c_{34}^1)^*, \\ c_{86}^1 &= r(c_{69}^1)^*, & c_{96}^1 &= r(c_{68}^1)^*, & c_{87}^1 &= s(c_{79}^1)^*, & c_{97}^1 &= s(c_{78}^1)^*, \end{aligned} \quad (9.48)$$

где

$$\begin{aligned} f &= \frac{\eta_{33}^0}{\eta_{11}^0}, & g &= \frac{\eta_{66}^0}{\eta_{11}^0}, & h &= \frac{\eta_{77}^0}{\eta_{11}^0}, \\ p &= \frac{\eta_{45}^1}{\eta_{22}^1}, & q &= \frac{\eta_{45}^1}{\eta_{33}^1}, & r &= \frac{\eta_{89}^1}{\eta_{66}^1}, & s &= \frac{\eta_{89}^1}{\eta_{77}^1}. \end{aligned} \quad (9.49)$$



Вводя также для удобства обозначения

$$\begin{aligned} c_{13}^0 &= \lambda_1, & c_{16}^0 &= \lambda_2, & c_{17}^0 &= \lambda_3, & c_{24}^1 &= \lambda_4, & c_{25}^1 &= \lambda_5, \\ c_{34}^1 &= \lambda_6, & c_{35}^1 &= \lambda_7, & c_{68}^1 &= \lambda_8, & c_{69}^1 &= \lambda_9, & c_{78}^1 &= \lambda_{10}, & c_{79}^1 &= \lambda_{11}, \end{aligned} \quad (9.50)$$

с учетом (9.48), (9.49) для блоков C^0 (9.46), $(C^1)'$, $(C^1)''$ (9.47) получим выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\lambda_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g\lambda_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h\lambda_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

$$(C^1)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ p\lambda_5^* & q\lambda_7^* & 0 & 0 \\ p\lambda_4^* & q\lambda_6^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_8 & \lambda_9 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} & \lambda_{11} \\ r\lambda_9^* & s\lambda_{11}^* & 0 & 0 \\ r\lambda_8^* & s\lambda_{10}^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

Характеристические уравнения для блоков (9.51), (9.52) имеют соответственно вид

$$\lambda^3(\lambda^2 - f|\lambda_1|^2 - g|\lambda_2|^2 - h|\lambda_3|^2) = 0, \quad (9.53)$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \lambda^2(p\lambda_4^*\lambda_5 + p\lambda_4\lambda_5^* + q\lambda_6^*\lambda_7 + q\lambda_6\lambda_7^*) + \\ + pq(\lambda_4\lambda_5^*\lambda_6^*\lambda_7 + \lambda_4^*\lambda_5\lambda_6\lambda_7^* - |\lambda_4|^2|\lambda_7|^2 - |\lambda_5|^2|\lambda_6|^2) = 0, \end{aligned} \quad (9.54)$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \lambda^2(r\lambda_8^*\lambda_9 + r\lambda_8\lambda_9^* + s\lambda_{10}^*\lambda_{11} + s\lambda_{10}\lambda_{11}^*) + \\ + rs(\lambda_8\lambda_9^*\lambda_{10}^*\lambda_{11} + \lambda_8^*\lambda_9\lambda_{10}\lambda_{11}^* - |\lambda_8|^2|\lambda_{11}|^2 - |\lambda_9|^2|\lambda_{10}|^2) = 0. \end{aligned} \quad (9.55)$$

РВУ, эквивалентное тензорной системе (9.15)–(9.21) получится, если положить

$$\begin{aligned} f|\lambda_1|^2 + g|\lambda_2|^2 + h|\lambda_3|^2 &= |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2, \\ p\lambda_4^*\lambda_5 + p\lambda_4\lambda_5^* + q\lambda_6^*\lambda_7 + q\lambda_6\lambda_7^* &= |\alpha|^2 + 1, \\ pq(\lambda_4\lambda_5^*\lambda_6^*\lambda_7 + \lambda_4^*\lambda_5\lambda_6\lambda_7^* - |\lambda_4|^2|\lambda_7|^2 - |\lambda_5|^2|\lambda_6|^2) &= |\alpha|^2, \\ r\lambda_8^*\lambda_9 + r\lambda_8\lambda_9^* + s\lambda_{10}^*\lambda_{11} + s\lambda_{10}\lambda_{11}^* &= |\rho|^2 + |\delta|^2, \\ rs(\lambda_8\lambda_9^*\lambda_{10}^*\lambda_{11} + \lambda_8^*\lambda_9\lambda_{10}\lambda_{11}^* - |\lambda_8|^2|\lambda_{11}|^2 - |\lambda_9|^2|\lambda_{10}|^2) &= |\rho|^2|\delta|^2. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Соотношениям (9.56) можно удовлетворить, выбрав, например:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \beta, & \lambda_2 &= \sqrt{2(|\gamma|^2 + |\sigma|^2)}, & \lambda_3 &= \sqrt{|\gamma|^2 + |\sigma|^2}, \\ \lambda_4 &= -\lambda_5 = \frac{i|\alpha|}{\sqrt{2}}, & \lambda_6 &= \lambda_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \lambda_8 &= -\lambda_9 = \frac{i|\rho|}{\sqrt{2}}, & \lambda_{10} &= \lambda_{11} = \frac{|\delta|}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (9.57)$$

$$f = g = -h = -p = q = -r = s = 1. \quad (9.58)$$

Равенства (9.58), в свою очередь, приводят к следующим значениям элементов $\eta_{\tau\tau'}^s$ матрицы лоренц-инвариантной билинейной формы η :

$$\eta_{11}^0 = \eta_{33}^0 = \eta_{66}^0 = -\eta_{77}^0 = \eta_{22}^1 = -\eta_{33}^1 = -\eta_{45}^1 = -\eta_{66}^1 = \eta_{77}^1 = \eta_{89}^1 = 1. \quad (9.59)$$



Спиновые блоки C^0 (9.51), $(C^1)'$, $(C^1)''$ (9.52) в соответствии с (9.57), (9.58) принимают вид

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \sqrt{2(|\gamma|^2 + |\sigma|^2)} & \sqrt{|\gamma|^2 + |\sigma|^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2(|\gamma|^2 + |\sigma|^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{|\gamma|^2 + |\sigma|^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.60)$$

$$(C^1)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i|\alpha| & -i|\alpha| \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -i|\alpha| & 1 & 0 & 0 \\ i|\alpha| & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.61)$$

$$(C^1)'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i|\rho| & -i|\rho| \\ 0 & 0 & |\delta| & |\delta| \\ -i|\rho| & |\delta| & 0 & 0 \\ i|\rho| & |\delta| & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид блоков η^0 , η^1 матрицы η вытекает из (9.59).

Спиновый блок C^0 (9.60) имеет один (с точностью до знака) ненулевой корень

$$\pm \sqrt{|\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2}, \quad (9.62)$$

который соответствует массе скалярного бозона

$$m^{(0)} = \frac{m}{\sqrt{|\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2}}. \quad (9.63)$$

Блок $(C^1)'$ имеет корни ± 1 , $\pm|\alpha|$. Первый из них в силу проективности матрицы Γ_0 (9.44) относится к безмассовому векторному полю максвелловского типа, второй – к векторной частице с массой

$$m_1^{(1)} = \frac{m}{|\alpha|}. \quad (9.64)$$

Корни $\pm|\delta|$, $\pm|\rho|$ блока $(C^1)''$ соответствуют массам

$$m_2^{(1)} = \frac{m}{|\delta|}, \quad m_3^{(1)} = \frac{m}{|\rho|} \quad (9.65)$$

двух других векторных частиц, описание которых также содержится в обсуждаемом РВУ и эквивалентной ему тензорной системе.

Итак, схема зацеплений (9.14) позволяет построить релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов – одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории с необходимостью возникает скалярная частица с ненулевой массой, которая собственно и обеспечивает единство компонент указанного векторного поля. Векторная составляющая последнего может интерпретироваться



«электрослабое» поле, а скалярное – как линейный аналог бозона Хиггса. Линейный характер уравнения (9.43), описывающего скалярную частицу, связан с тем, что вопрос о происхождении массы не затрагивается в теории РВУ, рамками которой мы ограничиваемся. Наличие или отсутствие массы является в данной теории заданным фактом, поэтому нет необходимости вводить в (9.43) нелинейные члены. Таким образом, предлагаемая нами модель, не вступая в противоречие с общепринятым хиггсовским механизмом генерации массы, позволяет указать на еще одну возможную причину появления скалярной составляющей в теории векторного электрослабого поля. Однако если вместо хиггсовского механизма рассматривать иной способ генерации массы Кальба – Рамонда, описанный в главе 7, то мы придем к альтернативной модели электрослабого взаимодействия, в которой скалярный бозон играет исключительно роль связующей компоненты для векторных составляющих электрослабого поля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1936. – Vol. 155. – P. 447–459.
2. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftfreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12, № 1. – S. 3–37.
3. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
4. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2-3. – P. 200–216.
5. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, № 3. – P. 451–462.
6. Harish-Chandra. On relativistic wave equations / Harish-Chandra // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 71, № 11. – P. 793–805.
7. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.
8. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, – вып. 8. – С. 703–733.
9. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, Я. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.
10. Наймарк, М. А. Линейные представления группы Лоренца / М. А. Наймарк. – М.: Физматгиз, 1958. – 376 с.
11. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
12. Федоров, Ф. И. О минимальных полиномах матриц релятивистских волновых уравнений / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 79, № 5. – С. 787–790.
13. Федоров, Ф. И. Проективные операторы в теории элементарных частиц / Ф. И. Федоров // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 35. – С. 495–498.
14. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. 1951. – № 12. – С. 156–173.



15. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // *Phys. Rev.* – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.
16. Новожилов, Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю. В. Новожилов. – М. : Наука, 1972. – 472 с.
17. Petras, M. A. Note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $\frac{3}{2}$ / M. Petras // *Czech. J. Phys.* – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
18. Фрадкин, Э. Е. О допустимых преобразования для частиц с высшими спинами / Э. Е. Фрадкин, С. В. Измайлов // *Докл. АН СССР.* – 1957. – Т. 114, № 2. – С. 277–280.
19. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // *Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1970. – № 2. – С. 79–85.
20. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // *Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1970. – № 3. – С. 84–92.
21. Capri, A. Z. Wave equations for spin- $\frac{1}{2}$ fields / A. Z. Capri, A. Shamaly // *Nuovo Cim. A.* – 1977. – Vol. 42, № 4. – P. 512–526.
22. Cox, W. Higher-rank representations for zero spin field theories / W. Cox // *J. Phys. A.* – 1982. – Vol. 15. – P. 627–635.
23. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A. Z. Capri // *Can. J. Phys.* – 1973. – Vol. 51, № 14. – P. 1467–1470.
24. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином $\frac{1}{2}$ / И. Улегла // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.
25. Formanek, J. On the Ulehla – Petras wave equation / J. Formanek // *Czech. J. Phys. B.* – 1961. – Vol. 11, № 8. – P. 545–553.
26. Гронский, В. К. Ковариантные методы расчета поляризационных эффектов для векторных частиц / В. К. Гронский // *Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1976. – № 5. – С. 75–84.
27. Богуш, А. А. Описание частицы в электромагнитном поле различными уравнениями / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Ф. И. Федоров // *Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1984. – № 3. – С. 27–34.
28. Кисель, В. В. Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений / В. В. Кисель. – Минск, 1983. – 40 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 319).
29. Богуш, А. А. Обобщенные символы Кронекера / А. А. Богуш, Ф. И. Федоров // *Докл. АН БССР.* – 1968. – № 1. – С. 21–24.
30. Khalil, M. A. K. Barnakle equivalence structure in relativistic wave equations / M. A. K. Khalil // *Prog. Theor. Phys.* – 1978. – Vol. 60, № 5. – P. 1559–1582.
31. Чижов, М. В. Теория и феноменология киральных частиц со спином единица / М. В. Чижов // *Физика элементар. частиц и атом. ядра.* – 2011. – Т. 42, вып. 1. – С. 169–350.
32. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
33. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dohtan, D. Horn // *Phys. Lett. B.* – 1982. – Vol. 117, № 6. – P. 413–417.
34. Bann, I. M. A generalization model, based on Kähler fermions / I. M. Bann, R. W. Tucker // *Phys. Lett. B.* – 1982. – Vol. 119, № 4–6. – P. 348–350.
35. Dirac, P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1942. – Vol. 180. – P. 1–40.



36. Pauli, W. On Dirac's new method of field quantization / W. Pauli // *Rev. Mod. Phys.* – 1943. – Vol. 15. – P. 175–207.
37. Сатиков, И. А. О квантовом описании поля Дирака – Кэлера / И. А. Сатиков, В. И. Стражев // *Теорет. и мат. физика.* – 1987. – Т. 73, № 1. – С. 16–25.
38. Березин, А. В. Уравнение Дирака – Кэлера и квантовая теория дираковского поля с $SU(2,2)$ -внутренней симметрией / А. В. Березин, И. А. Сатиков, В. И. Стражев. – Минск, 1998. – 35 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 528).
39. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, Ф. И. Федоров. – Минск, 1988. – 36 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 517).
40. Плетюхов, В. А. О вторичном квантовании в теории релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Докл. АН БССР.* – 1988. – Т. 32, № 7. – С. 602–605.
41. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Acta Phys. Pol. B.* – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.
42. Азисов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой / Т. Я. Азисов, И. С. Иохвидов. – М. : Наука, 1986. – 340 с.
43. Марголин, А. Э. О дискретной симметрии $SL(2, C)$ -калибровочного поля Янга – Миллса / А. Э. Марголин, В. И. Стражев // *Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук* – 1987. – № 4. – С. 103–107.
44. Марголин, А. Э. О калибровочной теории с группой некомпактной симметрии / А. Э. Марголин, В. И. Стражев // *Докл. АН БССР.* – 1989. – Т. 33, № 5. – С. 418–421.
45. Плетюхов, В. А. О возможных обобщениях уравнения Дирака – Кэлера / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Вест. АН СССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1987. – № 5. – С. 87–92.
46. Плетюхов, В. А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Ядер. физика.* – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.
47. Плетюхов, В. А. Тензорные поля и дираковские частицы с $SU(4,4)$ - и $SU(6,6)$ -симметриями / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Докл. АН БССР.* – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 328–331.
48. Плетюхов, В. А. Квантовая теория тензорного поля с $SU(4,4)$ -симметрией / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Вест. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1990. – № 4. – С. 88–95.
49. Плетюхов, В. А. Квантовая теория тензорного поля с $SU(6,6)$ -симметрией / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Acta Phys. Polonica. B.* – 1990. – Vol. 21, № 11. – P. 881–889.
50. Плетюхов, В. А. Геометризованная $SU(3)$ -калибровочная теория в решеточном пространстве / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // *Теорет. и мат. физика.* – 1991. – Т. 87, № 2. – С. 173–187.
51. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // *Ядер. физика.* – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
52. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // *Phys. Rev. D.* – 1974. – Vol. 9, № 8. – P. 2273–2284.
53. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // *Progr. Theor. Phys.* – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.



54. Dvoeglazov, V. V. Photon – notoph equations / V. V. Dvoeglazov // arXiv : physics/9804010v1 (Submitted on 7 Apr. 1998).
55. Harikumar, E. Duality and massive gauge invariant theories / E. Harikumar, M. Savikumar // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 57. – P. 3794–3804.
56. Stückelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungskräfte in der Electrodynamik und der Feldtheorie der Kernkräfte / E. C. G. Stückelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Bd. 11. – S. 225–236.
57. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Rueg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.
58. Плетюхов, В. А. Массивные калибровочные-инвариантные теории и безмассовые поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 80–88.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.03.2017

Pletyukhov V.A. Relativistic Wave Equations with Extended Sets of the Lorentz Group Representations

It is shown that using extended sets of the Lorentz group irreducible representations opens new possibilities for the theory of relativistic wave equations from the viewpoint of a spatio-temporal description of both an internal structure and isospin degrees of freedom of elementary particles. The developed approach also allows us to apply the methods of the theory of relativistic wave equations in both superstring and gauge models of the fundamental interactions.



УДК 547.97:577.13:577.342

Н.Ю. Колбас

канд. биол. наук, доц., зав. каф. химии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ПИРАНОАНТОЦИАНЫ: ХИМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА, ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА

Пираноантоцианы – новый класс растительных пигментов. В статье обобщены данные об их химической структуре, номенклатуре и классификации. Представлен анализ сведений о спектрофотометрических свойствах витизинов, пинотинов и портозинов. Рассматриваются механизмы синтеза пираноантоцианов в растительных объектах и продуктах их переработки. Приводятся данные об органолептических свойствах пираноантоцианов и влиянии на их рН раствора и наличия окислителей.

Пираноантоцианы – фенольные соединения растительного происхождения, относящиеся к классу флавоноидов (подкласс пиранофлавоноиды).

Первые сведения о пираноантоцианах были представлены в работе P.J. Cameira dos Santos с соавторами (1996). Новый класс пигментов был ими выделен из фильтратов красного вина [1]. Затем пираноантоцианы были идентифицированы в биохимическом составе *Allium cepa* L. (листовые чешуи луковиц фиолетовых сортов) [2], *Fragaria ananassa* Duch. (плоды) [3], *Vitis vinifera* L. (плоды) [1], *Ribes nigrum* L. (семена) [4] (рисунк 1), а также в составе виноматериалов, фруктовых и овощных соках. В настоящее время идентифицировано и описано более 75 этих соединений.

Химическая структура

По химической структуре пираноантоцианы – это полигидрокси- и полиметоксипроизводные катиона 2-фенил-пиранобензопирилума (2-фенил-пиранохромен-катиона) (таблица 1). В отличие от антоцианов пираноантоцианы имеют дополнительный сопряженный гетероцикл (кольцо *D*). При этом возможно наличие заместителей в самом кольце *D*, и ими чаще являются метил-радикал, остатки фенола, катехола, гваякола и сирингола [1–5].

Таким образом, пираноантоцианы являются производными шести основных антоцианов: дельфинидина, мальвидина, пеларгонидина, пеоноидина, петунидина и цианидина, что отражено в их номенклатуре (подписи к рисунку 1).

Пираноантоцианы чаще находятся в гликозидированном состоянии, но в отличие от антоцианов только в виде С-3-гликозидов. Углеводная составляющая представлена глюкозой [1–4; 6], реже рутинозой [6] и софорозой [7]. Кроме того, некоторые пираноантоцианы имеют ацильный компонент, который соединен с кислородом ОН-группы остатка глюкозы и образован остатками уксусной, малоновой кислот, а также гидроксикоричных кислот (*p*-кумаровой и кофейной) [1–4; 6]. Отметим, что гидрофильность органических кислот не может уменьшить способность самих пираноантоцианов растворяться в воде.

Некоторые пираноантоцианы (например, портозины) образуют димеры с другими флавоноидами (катехином, эпикатехином, этилкатехином и др.) [8; 12].

В основу классификации пираноантоцианов положен тип заместителя кольца *D* и особенности синтеза. В соответствии с этим выделяют 4 группы: витизины (тип *A*, тип *B* и оксовитизины), гидроксифенилпираноантоцианы (пинотины) [1; 4; 13; 14], портозины (или винилфлаванолпираноантоцианы) [8] и розацианины [5]. Особенности структуры витизинов и пинотинов представлены в таблице 1.



Таблица 1. – Структура витизинов и портозинов

Название	Аббревиатура	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄	[M ⁺] m/z	λ _{max} , нм	Источник	Литература	
										1
Витизины										
<i>Витизины А</i>										
карбоксипиранопеларгонидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrPg3G</i>	H	H	H	COOH	501	510	<i>Fragaria sp</i> (плоды)	[3]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrCn3G</i>	OH	H	H	COOH	517	506	Лук, вишневый сок	[2; 6; 10]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -рутинозид	<i>PyrCn3Rut</i>	OH	H	Остаток рамнозы	COOH	663	510	Вишневый сок	[10]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -глюкозил-рутинозид	<i>PyrCn3GRut</i>	OH	H	Остаток рутинозы	COOH	825	510	Вишневый сок	[10]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)	<i>PyrCn3acG</i>	OH	H	CH ₃ COO-	COOH	559	507	Вино	[11]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)	<i>PyrCn3cmG</i>	OH	H	*	COOH	661	507	Вино	[11]	
карбоксипираноцианидин 3- <i>O</i> -(6"-малонил-глюкозид)	<i>PyrCn3mlG</i>	OH	H	COOHCH ₂ C OO-	COOH	603	507	Лук	[2]	
карбоксипиранодельфинидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrDp3G</i>	OH	OH	H	COOH	533	507	Вино	[12]	



Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
карбокспипиранодельфинидин 3- <i>O</i> -(6''-ацетил-глюкозид)	<i>PyrDp3acG</i>	ОН	Н	CH ₃ COO-	COOH	575	509	Вино	[11]
карбокспипиранодельфинидин 3- <i>O</i> -(6''-кумароил-глюкозид)	<i>PyrDp3cmG</i>	ОН	ОН	*	COOH	679	511	Вино	[11]
карбокспипиранопеонидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrPn3G</i>	OCH ₃	Н	Н	COOH	531	509	Вино	[11; 12]
карбокспипиранопеонидин 3- <i>O</i> -(6''-ацетил-глюкозид)	<i>PyrPn3acG</i>	OCH ₃	Н	CH ₃ COO-	COOH	573	510	Вино	[11]
карбокспипиранопеонидин 3- <i>O</i> -(6''-кумароил-глюкозид)	<i>PyrPn3cmG</i>	OCH ₃	Н	*	COOH	677	511	Вино	[11]
карбокспипиранопетунидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrPt3G</i>	OCH ₃	ОН	Н	COOH	547	508	Вино	[11; 12]
карбокспипиранопетунидин 3- <i>O</i> -(6''-ацетил-глюкозид)	<i>PyrPt3acG</i>	OCH ₃	ОН	CH ₃ COO-	COOH	589	509	Вино	[11]
карбокспипиранопетунидин 3- <i>O</i> -(6''-кумароил-глюкозид)	<i>PyrPt3cmG</i>	OCH ₃	ОН	*	COOH	693	510	Вино	[11]
карбокспипираномальвидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PyrMv3G</i>	OCH ₃	OCH ₃	Н	COOH	561	514	Вино	[11; 17]
карбокспипираномальвидин 3- <i>O</i> -(6''-ацетил-глюкозид)	<i>PyrMv3acG</i>	OCH ₃	OCH ₃	CH ₃ COO-	COOH	603	516	Вино	[11; 12]
карбокспипираномальвидин 3- <i>O</i> -(6''-кумароил-глюкозид)	<i>PyrMv3cmG</i>	OCH ₃	OCH ₃	*	COOH	707	513	Вино	[11; 12]
<i>Витизины В</i>									
пираномальвидин 3- <i>O</i> -глюкозид	<i>PuMv3G</i>	OCH ₃	OCH ₃	Н	Н	517	490	Вино	[11]
пираномальвидин 3- <i>O</i> -(6''-ацетил-глюкозид)	<i>PuMv3acG</i>	OCH ₃	OCH ₃	CH ₃ COO-	Н	559	494	Вино	[11]
пираномальвидин 3- <i>O</i> -(6''-кумароил-глюкозид)	<i>PuMv3cmG</i>	OCH ₃	OCH ₃	*	Н	663	497	Вино	[11]
<i>Пинотины</i>									
Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилфенол	<i>Cn3G4vPh</i>	ОН	Н	Н	(а)	565	504	Апельсиновый сок	[13]



Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Дельфинидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилфенол	<i>Dp3G4vPh</i>	ОН	ОН	Н	(а)	581	504	Вино	[14]
Дельфинидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Dp3acG4vPh</i>	ОН	ОН	CH ₃ COO-	(а)	623	506	Вино	[14]
Дельфинидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Dp3cmG4vPh</i>	ОН	ОН	*	(а)	727	506	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилфенол	<i>Pn3G4vPh</i>	ОСН ₃	Н	Н	(а)	579	499	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Pn3acG4vPh</i>	ОСН ₃	Н	CH ₃ COO-	(а)	621	504	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Pn3cmG4vPh</i>	ОСН ₃	Н	*	(а)	725	505	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилфенол	<i>Pt3G4vPh</i>	ОСН ₃	ОН	Н	(а)	595	504	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Pt3acG4vPh</i>	ОСН ₃	ОН	CH ₃ COO-	(а)	636	506	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Pt3cmG4vPh</i>	ОСН ₃	ОН	*	(а)	741	507	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилфенол	<i>Mv3GvPh</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	Н	(а)	609	504	Вино	[1; 14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Mv3acGvPh</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	CH ₃ COO-	(а)	651	507	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Mv3cmGvPh</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	*	(а)	755	509	Вино	[1; 14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-кофеил-глюкозид)-4-винилфенол	<i>Mv3cafGvPh</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	**	(а)	771	532	Вино	[1; 14]
Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилкатехол	<i>Cn3G4vCt</i>	ОН	Н	Н	(б)	581	504	Апельсино- вый сок	[13]
Дельфинидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилкатехол	<i>Dp3G4vCt</i>	ОН	ОН	Н	(б)	597	510	Вино	[14]
Дельфинидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Dp3acG4vCt</i>	ОН	ОН	CH ₃ COO-	(б)	639	512	Вино	[14]



Продолжение таблицы 1

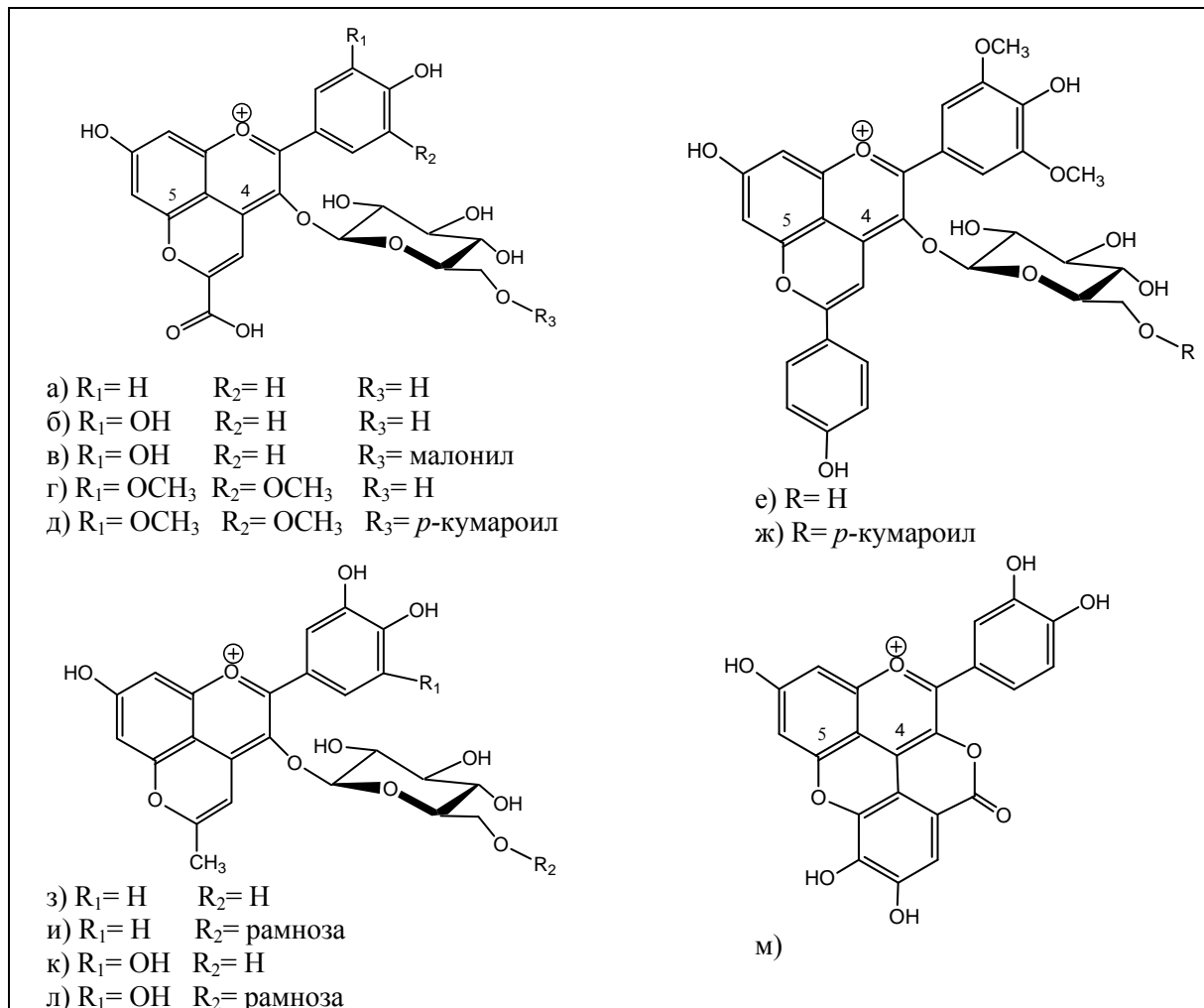
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Пеонидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Dp3cmG4vCt</i>	ОН	ОН	*	(б)	743	514	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилкатехол	<i>Pn3G4vCt</i>	ОСН ₃	Н	Н	(б)	595	504	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Pn3acG4vCt</i>	ОСН ₃	Н	СН ₃ СОО-	(б)	637	506	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Pn3cmG4vCt</i>	ОСН ₃	Н	*	(б)	741	508	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилкатехол	<i>Pt3G4vCt</i>	ОСН ₃	ОН	Н	(б)	611	510	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Pt3acG4vCt</i>	ОСН ₃	ОН	СН ₃ СОО-	(б)	653	512	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Pt3cmG4vCt</i>	ОСН ₃	ОН	*	(б)	757	516	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилкатехол	<i>Mv3GvCt</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	Н	(б)	625	512	Вино	[1; 14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Mv3acGvCt</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	СН ₃ СОО-	(б)	667	514	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-винилкатехол	<i>Mv3cmGvCt</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	*	(б)	771	514	Вино	[14]
Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилгваякол	<i>Cn3G4vGu</i>	ОН	Н	Н	(в)	595	520	Земляничный, апельсиновый и малиновый сок	[7; 13]
Цианидин 3- <i>O</i> -рутинозид-4-винилгваякол	<i>Cn3Rut4vGu</i>	ОН	Н	Остаток рамнозы	(в)	741	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Цианидин 3- <i>O</i> -софорозид-4-винилгваякол	<i>Cn3Soph4vGu</i>	ОН	Н	Остаток глюкозы	(в)	757	520	Земляничный и малиновый сок	[7]



Окончание таблицы 1

Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозилрутинозид-4-винилгваякол	<i>Cn3GRut4vGu</i>	ОН	Н	Остаток рутинозы	(в)	903	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Пеларгонидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилгваякол	<i>Pg3G4vGu</i>	Н	Н	Н	(в)	579	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Дельфинидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилгваякол	<i>Dp3G4vGu</i>	ОН	ОН	Н	(в)	611	502	Вино	[14]
Пеонидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилгваякол	<i>Pn3G4vGu</i>	ОСН ₃	Н	Н	(в)	609	499	Вино	[14]
Петунидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-гваякол	<i>Pt3G4vGu</i>	ОСН ₃	ОН	Н	(в)	625	502	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-гваякол	<i>Mv3GvGu</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	Н	(в)	639	504	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-ацетил-глюкозид)-4-гваякол	<i>Mv3acGvGu</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	Н	(в)	681	506	Вино	[14]
Мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)-4-гваякол	<i>Mv3cmGvGu</i>	ОСН ₃	ОСН ₃	Н	(в)	755	508	Вино	[14]
Пеларгонидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилсирингол	<i>Pg3G4vSyr</i>	Н	Н	Н	(г)	609	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозид-4-винилсирингол	<i>Cn3G4vSyr</i>	ОН	Н	Н	(г)	625	520		
Цианидин 3- <i>O</i> -рутинозид-4-винилсирингол	<i>Cn3Rut4vSyr</i>	ОН	Н	Остаток рамнозы	(г)	771	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Цианидин 3- <i>O</i> -софорозид-4-винилсирингол	<i>Cn3Soph4vSyr</i>	ОН	Н	Остаток глюкозы	(г)	787	520	Земляничный и малиновый сок	[7]
Цианидин 3- <i>O</i> -глюкозилрутинозид-4-винилсирингол	<i>Cn3GRut4vSyr</i>	ОН	Н	Остаток рутинозы	(г)	933	520	Земляничный и малиновый сок	[7]

Примечание: * – остаток *p*-кумаровой кислоты; ** – остаток кофейной кислоты; (а) – фенол; (б) – катехол; (в) – гваякол; (г) – сирингол



- а) карбоксипиранопеларгонидин 3-*O*-глюкозид плодов *Fragaria ananassa* Duch. [3], пигменты *Allium sepa* L.; б) карбоксипираноцианидин 3-*O*-глюкозид; в) карбоксипираноцианидин 3-*O*-(6''-малонил-глюкозид) [2], пигменты *Vitis vinifera* L.; г) карбоксипираномальвидин 3-*O*-глюкозид; д) карбоксипираномальвидин 3-*O*-(6''-кумароил-глюкозид); е) мальвидин 3-*O*-глюкозид-4-винилфенол; ж) мальвидин 3-*O*-(6''-кумароил-глюкозид)-4-винилфенол [1], пигменты семян *Ribes nigrum* L.; з) метилпираноцианидин 3-*O*-глюкозид; и) метилпираноцианидин 3-*O*-рутинозид; к) метилпиранодельфинидин 3-*O*-глюкозид; л) метилпиранодельфинидин 3-*O*-рутинозид [4]; м) розацианин *B* пигмент лепестков *Rosa hybrida* L. [5].

Рисунок 1. – Пираноантоцианы

При идентификации первого пираноантоциана методом ВЭЖХ-ESI-MS на спектре молекулярных масс выявлен фрагмент (m/z^+) 447,5 Da, который теоретически соответствует агликону, но при этом превышает m/z^+ известных антоцианидинов. Таким образом, было высказано предположение, что пигменты являются производными антоцианидинов с дополнительным участком [1]. Молекулярные массы молекулярных ионных фрагментов ($[M^+]$, m/z^+) некоторых пираноантоцианов представлены в таблице 1.

Портозины из-за особенностей своей структуры имеют довольно большую молекулярную массу их фрагментов [8; 12; 14]. На хроматограммах пики пираноантоцианов имеют большее время удерживания, чем антоцианы, и выходят позже [12; 15].



Спектральная характарыстыка

Максимумы паглынання вितिцинов А лежат в пределах от 506 до 516 нм, вितिцинов В – 490–497 нм, пинотинов – 499–520 нм (таблица 1), портозинов – 501–508 нм.

Пираноантоцианы имеют окраску от желтой и красно-оранжевой до синей, и она зависит от рН среды, строения исходного антоциана и кислоты [16]. Так, пеларгонидин 3-*O*-глюкозид и 5-карбоксихиранопеларгонидин 3-*O*-глюкозид плодов *Fragaria ananassa* при рН = 1,1 имеют желтую окраску, а при рН = 6,9 – красную; слабые различия для двух этих соединений отмечены лишь в цветовой контрастности [3]. При увеличении рН среды с 1,0 до 5,0 практически 80 % от исходного количества антоцианов меняют свою структуру и образуют бесцветное соединение – карбинол [17], что в свою очередь снижает интенсивность окраски. В то же время при изменении рН интенсивность окраски растворов карбоксихираноантоцианов почти не меняется. Вероятно, это связано с защитным действием нового пиранового кольца, которое блокирует нуклеофильную атаку молекул воды и затрудняет образование карбинола. Также пираноантоцианы проявляют высокую устойчивость к обесцвечивающему действию оксида серы (IV) [14].

У всех пираноантоцианов независимо от их природы при рН = 3,6 (соответствует рН вина и многих соков) коэффициент молярной экстинкции больше, чем у соответствующих антоцианов (таблица 2). Для мальвидин-3-*O*-глюкозида резкое снижение экстинкции наблюдается при рН = 3,6 по сравнению с рН = 1,0, что указывает на снижение интенсивности окраски раствора антоциана. Значение экстинкции вितिцина А при изменении рН практически не меняется.

Таблица 2. – Коэффициент молярной экстинкции (ϵ) мальвидин-3-*O*-глюкозида и его производных [17–19]

Вещество	Максимум поглощения (λ), нм	ϵ_1 (рН = 1,0)	ϵ_2 (рН = 3,6)
мальвидин-3- <i>O</i> -глюкозид	528	28000	3613
мальвидин 3- <i>O</i> -(6"-кумароил-глюкозид)	536	30200	3986
карбоксихираномальвидин-3- <i>O</i> -глюкозид (вितिцин А)	514	8987	8918
пираномальвидин-3- <i>O</i> -глюкозид-(+)катехин	506	14823	14855
пираномальвидин-3- <i>O</i> -глюкозид(-)эпикатехин	506	6083	8025
пираномальвидин-3- <i>O</i> -глюкозид-(+)дикатехин	514	4511	6845

Максимумы поглощения растворов карбоксихираноантоцианов также сдвинуты в более длинноволновую область (гипсохромный сдвиг) (таблица 1). Таким образом, их окраска более интенсивная и стабильная, чем у соответствующих антоцианов.

Спектрометрические свойства портозинов различны. Их растворы демонстрируют батохромный сдвиг и имеют более синюю окраску [20].

Особое место среди пираноантоцианов занимают оксовитицины, так как в своей структуре они имеют не пирановое кольцо, а пираноновое кольцо (рисунок 2), а значит, не содержат иона оксония (не образуют флавилюм катион), который характерен для структуры всех антоцианов и остальных пираноантоцианов.

В связи с особенностями строения оксовитицины не имеют максимума поглощения при 520 нм, но при этом имеют схожие спектры с выраженным максимумом поглощения в УФ-области при длине волны 370 нм и являются стабильными желтоватыми пигментами. Впервые эти пигменты были выявлены в химическом составе старого вина типа портвейн [21; 22].

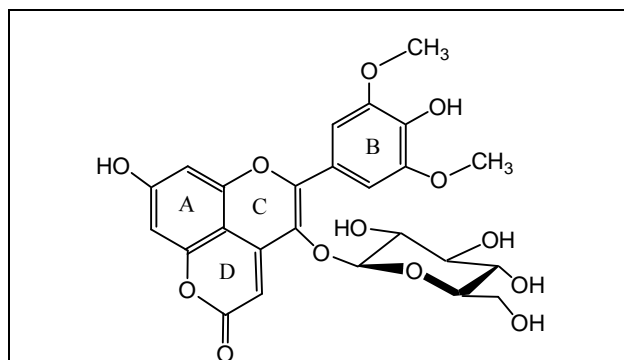
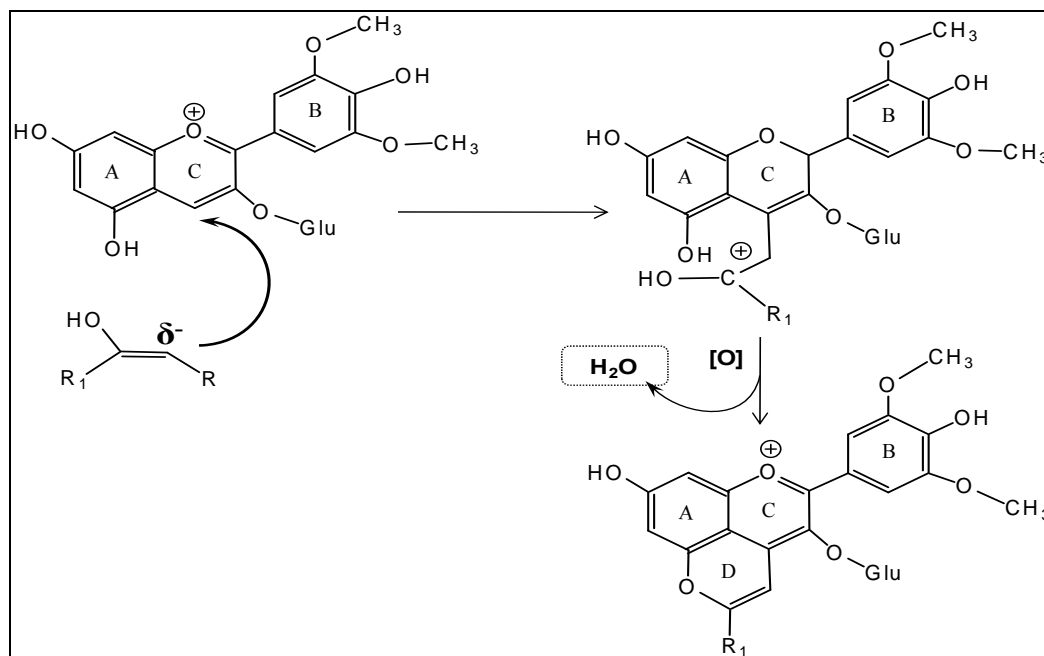


Рисунок 2. – Структура оксовитизина А
(пираномаальвидин 3-О-глюкозида) [21]

Синтез пираноантоцианов

Образование пираноантоцианов происходит при окислении ацилсодержащих антоцианов либо при окислении антоцианов в присутствии органических кислот, в частности, пировиноградной, гидроксикоричных кислот, а также в присутствии ацетальдегида. Механизм реакции образования витизиноидов включает 2 этапа. На первом этапе происходит связывание антоцианов с кислотами посредством связи С–С, которая образуется в положении С-4 антоциана. На втором этапе происходит моноциклизация в положении С-5 антоциана с последующим окислением. Таким образом, формируется дополнительный гетероцикл (цикл D) витизиноидов (рисунок 3) [4; 19]. Известно, что пировиноградная кислота в большом количестве образуется в процессе брожения.



При $R_1 = \text{H}$ – пираномаальвидин (витизин В), $R_1 = \text{COOH}$ – карбоксипираномаальвидин (витизин А), Glu – остаток глюкозы

Рисунок 3. – Механизм образования витизина [19]



Все витизины имеют антоциановое ядро, при этом новое пирановое кольцо по отношению к нему представляет собой карбоксильную группу. С этим связано второе название этого типа пигментов – 5-карбоксопираноантоцианы [6].

Отмечено, что другие метаболиты *Saccharomycetes* spp., такие как α -кетоглутаровая кислота, диацетил, ацетон могут выступать в качестве предшественников при образовании пираноантоцианов, в то время как другие кислоты-метаболиты, такие как лимонная, молочная и уксусная, не вступают в реакцию [23].

В своих экспериментах Н. Fulcrand с соавторами показали, что гидроксифенилпираноантоцианы (пинотины) являются результатом циклизации гликозидированного антоциана и винилфенола. Винилфенол, в свою очередь, является продуктом декарбоксилирования кумаровой кислоты и может быть образован из эфира коричной кислоты под действием фермента декарбоксилазы *Saccharomycetes* spp. [24]. Субстратная специфичность фермента выражается в декарбоксилировании также и феруловой кислоты, при этом он не действует на кофейную и синапиновую кислоты. В исследовании [25] доказана возможность протекания прямой реакции между гидроксикоричными кислотами и антоцианами, при наличии электронодонорного субзаместителя в ароматическом кольце гидроксикоричной кислоты, необходимого для стабилизации промежуточного иона карбения (рисунок 4). Кроме того, было установлено, что реакция между антоцианами и винилфенолами протекает очень быстро и завершается в течение нескольких часов.

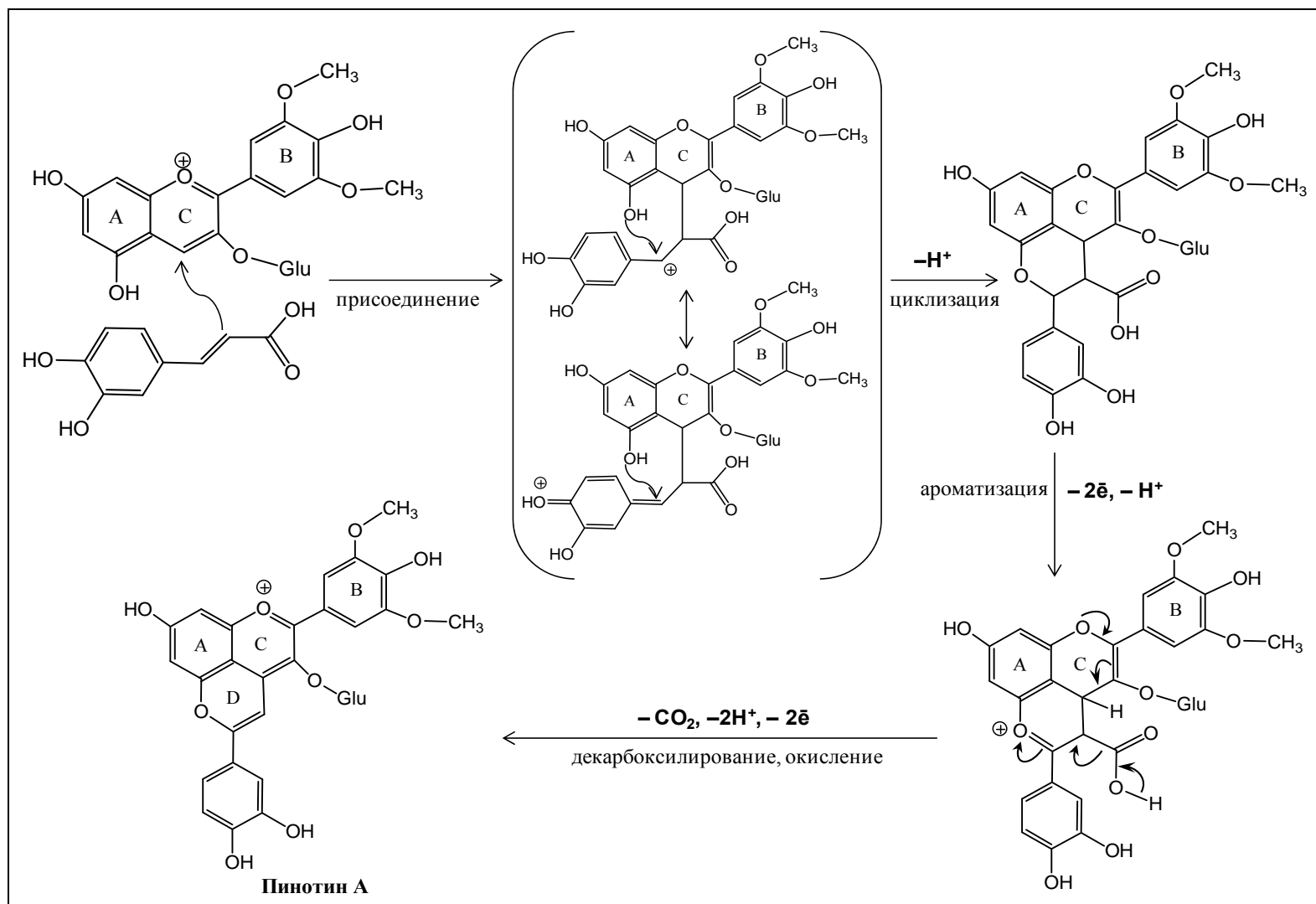
Еще одна группа пираноантоцианов – портозины, имеющие различные свойства. Впервые эти пигменты были выделены из портвейна. Они образуются в результате реакции между 5-карбоксопираноантоцианом и одним из винилфлаванолов (винилкатехина, винилэпикатехина и винилпроцианидина В2) [9]. Эта группа иллюстрирует разнообразие возможных реакций, в которых пираноантоцианы сами участвуют в образовании новых пигментов.

Пираноантоцианы могут быть образованы и в результате дициклизации: первое кольцо его скелета соответствует дополнительному кольцу пираноантоцианов, второе кольцо сформировано реакцией этерификации между гидроксогруппой С-3 флавилиумкатиона и карбоксильной группой галловой кислоты [5]. Несмотря на изменения в структуре, целостность флавилиум-катиона сохраняется, а полученные таким образом комплексы являются достаточно стабильными.

С учетом вышеописанных путей образования пираноантоцианов можно предположить, что структура новых пигментов будет идентифицирована в перспективе.

Во время хранения растительной продукции антоцианы в той или иной степени постоянно деградируют. В то время как количество пираноантоцианов увеличивается как во время хранения, так и в процессе первичной обработки растительной продукции. Это еще одно различие между антоцианами и пираноантоцианами. При этом некоторые авторы отмечают обратную корреляцию между концентрациями образованных пираноантоцианов и деградированных антоцианов [6].

Некоторые авторы считают, что именно пираноантоцианы определяют изменение насыщенности окраски от фиолетовой до оранжево-коричневой при старении красного вина, не учитывая других важных факторов, таких как копигментация [26] и образование полимерных пигментов. Другие авторы предполагают, что увеличение содержания пираноантоцианов во время хранения может служить биохимическим маркером в определении возраста красного вина [6]. Как было уже отмечено, при рН = 3,6 вклад антоцианов и пираноантоцианов в общую окраску раствора практически равнозначны. Таким образом, определяющим параметром в насыщенности окраски выступает концентрация пигментов. По данным М. Schwarz с соавторами (2003) [27], содержание пиг-



Glu – остаток глюкозы

Рисунок 4. – Механизм образования пинотина А [адаптировано по 7; 25]





ментов мальвидин-3-*O*-глюкозида, витизина А и пинотина А при винном рН составляет 0,14, 0,03, и 0,07 мг/мл соответственно. Из этих результатов можно сделать вывод о том, что именно пирантоантоцианы во многом определяют окраску красного вина. Тем не менее, принимая во внимание концентрацию антоцианов, пираноантоцианов и полимерных пигментов, общий вклад карбокси-пираноантоцианидинов в окраску стареющего красного вина незначителен и составляет менее 5 %. Органолептические свойства пираноантоцианов не только обуславливают окраску продукции, но горьковатый слегка вяжущий вкус [15; 18].

Таким образом, на процесс формирования пираноантоциана влияют три фактора: строение исходного антоциана; строение молекулы, участвующей в циклизации, и время хранения раствора (продукта).

Необходимо отметить, что витизины А производные мальвидина пока идентифицированы только в химическом составе вина [27; 28]. Кроме вина, виноматериалов пираноантоцианы входят в состав фруктовых и овощных соков. При анализе апельсинового сока, полученного из красномякотных сортов *Citrus sinensis* (L.) Osbeck, S. Hilbrand с соавторами (2004) идентифицировали гидроксифенилпираноцианидины [13], которые являются производными винилфенола, винилкатехола, винилгваякола. Необходимо отметить, что основными антоцианами исследованного сока являются 2 производных цианидина – цианидин 3-*O*-глюкозид и цианидин 3-*O*-(6"-малонилглюкозид), при этом в образовании пираноцианидина участвует лишь первый антоциан. Гидроксифенилпираноцианидины, имеющие сложную гликозидную составляющую, были выделены из морковного сока чернокорнеплодных сортов *Daucus carota* L. [29]. Имеются литературные данные по наличию 5-карбоксипираноантоцианов в ферментированных и неферментированных фруктовых соках. Так, в восстановленном вишневом соке выявлен аддукт цианидина и пировиноградной кислоты (карбоксипираноцианидин-3-*O*-гликозид). Это же соединение, а также 5-карбоксипиранопроизводные пеонидина (карбоксипиранопеонидин-3-*O*-гликозид и карбоксипиранопеонидин-3-*O*-рутинозид) были обнаружены в составе вишневого сока, подверженного ферментации [6]. О содержании пираноантоцианов в биохимическом составе растений упоминалось выше.

В настоящее время для большинства фенольных соединений доказана их положительная роль в профилактике и лечении многих заболеваний человека, таких как диабет, катаракта, различные формы рака, атеросклероз, глаукома, болезнь Альцгеймера, сердечнососудистые заболевания, миопия и др. При этом литературные данные о биологической активности пираноантоцианов, их влиянии на здоровье человека и животных нами не найдены.

В предыдущих обзорах [30] нами была проанализирована зависимость антиоксидантной активности антоцианов от их структуры. Установлено, что степень антиоксидантной активности зависит от количества ОН-групп в структуре молекулы. Учитывая, что при образовании пираноантоцианов из антоцианов количество ОН-групп в структуре не уменьшается, можно предположить наличие у этих соединений антиоксидантной способности. Несомненно, что предположение об антиоксидантной активности антоцианов требует экспериментального подтверждения.

Таким образом, пираноантоцианины являются производными антоцианов и составляют новый тип пигментов. Установлено, что пираноантоцианы имеют сложную химическую структуру, особенности которой предопределены, в том числе условиями синтеза. Пираноантоцианы могут быть использованы в качестве стабильных красителей в пищевой и косметической индустрии. Однако, прежде чем обосновывать преимущества применения пираноантоцианинов, необходимо всесторонне изучить их влияние



на здоровье человека. Кроме того, перспективной является разработка методики выделения и идентификации антоцианов различными аналитическими методами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Detection and partial characterisation of new anthocyanin-derived pigments in wine / P. J. Cameira dos Santos [et al.] // *J. Food Agric. Sci.* – 1996. – Vol. 70, № 2. – P. 204–208.
2. Fossen, T. Anthocyanins from red onion, *Allium cepa*, with novel aglycone / T. Fossen, Ø. M Andersen // *J. Phytochem.* – 2003. – Vol. 62, № 8. – P. 1217–1220.
3. Anthocyanin from strawberry (*Fragaria ananassa*) with the novel aglycone, 5-carboxypyranopelargonidin / Ø. M. Andersen [et al.] // *Phytochemistry.* – 2004. – Vol. 65, № 4. – P. 405–410.
4. Lu, Y. Novel pyranoanthocyanins from black currant seed / Y. Lu, Y. S. Sun, L. Y. Foo // *Tetrahedron Letters.* – 2000. – № 41. – P. 5975–5978.
5. Structure of rosacyanin B, a novel pigment from the petals of *Rosa hybrida* / Y. Fukui [et al.] // *Tetrahedron Letters.* – 2002. – № 43. – P. 2637–2639.
6. Rentzsch, M. Pyranoanthocyanins – an overview on structures, occurrence, and pathways of formation / M. Rentzsch, M. Schwarz, P. Winterhalter // *Trends in Food Science and Technology.* – 2007. – Vol. 18, № 10. – P. 526–534.
7. Identification of novel pyranoanthocyanins in berry juices / M. J. Rein [et al.] // *Eur. Food Res. Technol.* – 2005. – Vol. 220, № 3–4. – P. 239–244.
8. The impact of oxygen exposure before and after bottling on the polyphenolic composition of red wines / J. Wirth [et al.] // *Food Chem.* – 2010. – Vol. 123, № 1. – P. 107–116.
9. New Family of Bluish Pyranoanthocyanins / N. Mateus [et al.] // *J. Biomedicine and biotechnology.* – 2004. – Vol. 5, № 5. – P. 299–305.
10. Isolation and identification of 5-carboxypyrananthocyanins in beverages from cherry (*Prunus cerasus* L.). / M. Rentzsch [et al.] // *Innovative Food Sci and Emerging Technologies.* – 2007. – Vol. 8. – P. 333–338.
11. Nixdorf, S. L. Brazilian red wines made from the hybrid grape cultivar Isabel: Phenolic composition and antioxidant capacity / S. L. Nixdorf, I. Hermosín-Gutiérrez // *Analytica Chimica Acta.* – Vol. 659, № 1–2. – P. 208–223.
12. Are pyranoanthocyanins involved in sensory effect in red wines? [Электронный ресурс] / C. Quaglieri [et al.]. – 39th World Congress of Vine and Wine, Bento Gonçalves, Brazil, October 24–28 // *BIO Web of Conferences.* – 2016. – Vol. 7. – Режим доступа: https://www.bio-conferences.org/articles/bioconf/pdf/2016/02/bioconf-oiv2016_02007.pdf. – Дата доступа: 14.11.2016.
13. Hillebrand, S. Characterization of anthocyanins and pyranoanthocyanins from blood orange (*Citrus sinensis* (L.) Osbec) juice / S. Hillebrand, M. Schwarz, P. Winterhalter // *J. Agric. Food Chem.* – 2004. – Vol. 52, № 24. – P. 7331–7338.
14. Spectral features and stability of oligomeric pyranoanthocyanin-flavanol pigments isolated from red wines / J. He [et al.] // *J. Agric. Food Chem.* – 2010. – Vol. 58, № 16. – P. 9249–9258.
15. Variation of pyranoanthocyanins in red wines of different varieties and vintages and the impact of pinotin A addition on their color parameters / M. Rentzsch [et al.] // *European Food Research and Technology.* – 2009. – Vol. 229, № 4. – P. 689–696.
16. Gauche, C. Effect of pH on the copigmentation of anthocyanins from Cabernet Sauvignon grape extracts with organic acids / C. Gauche, E. da Silva Malagoli, M. T. Bordignon Luiz // *Sci. Agric. (Piracicaba, Braz.)* – 2010. – Vol. 67, № 1. – P. 41–46.



17. Mazza, G. In *Anthocyanins in Fruits, Vegetables and Grains* / G. Mazza, E. Miniati. – CRC Press : Boca Raton, 1993. – P. 149–199.
18. Structures and colour properties of new red wine pigments / A. E. Håkansson [et al.] // *J. Tetrahedron Lett.* – 2003. – Vol. 44, № 26. – P. 4887–4891.
19. De Freitas, V. Formation of pyranoanthocyanins in red wines: a new and diverse class of anthocyanin derivatives / V. De Freitas, N. Mateus // *Anal. Bioanal. Chem.* – 2011. – Vol. 401, № 5. – P. 1463–1473.
20. A new class of blue anthocyanin-derived pigments isolated from red wines / N. Mateus [et al.] // *J. Agric. Food Chem.* – 2003. – Vol. 51, № 7. – P. 1919–1923.
21. Oxovitisins: A New Class of Neutral Pyranone-anthocyanin Derivatives in Red Wines / J. He [et al.] // *J. Agric. Food Chem.* – 2010. – Vol. 58, № 15. – P. 8814–8819.
22. Oxidative formation and structural characterisation of new α -pyranone (lactone) compounds of non-oxonium nature originated from fruit anthocyanins / J. He [et al.] // *Food Chem.* – 2011. – Vol. 127, № 3. – P. 984–992.
23. Romero, C. Interactions between grape anthocyanins and pyruvic acid, with effect of pH and acid concentration on anthocyanin composition and color in model solutions / C. Romero, J. Bakker // *J. Agric. Food Chem.* – 1999. – Vol. 47, № 8. – P. 3130–3139.
24. A new class of wine pigments generated by reaction between pyruvic acid and grape anthocyanins / H. Fulcrand [et al.] // *Phytochemistry.* – 1998. – Vol. 47, № 8. – P. 1401–1407.
25. Schwarz, M. Pathway leading to the formation of anthocyaninevinylphenol adducts and related pigments in red wines / M. Schwarz, T. C. Wabnitz, P. Winterhalter // *J. Agric. Food Chem.* – 2003. – Vol. 51, № 12. – P. 3682–3687.
26. Колбас, Н. Ю. Механизмы копигментации антоцианов / Н. Ю. Колбас // Вуч. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. Ч. 2, Прыродазн. навукі. – 2014. – Вып. 10. – С. 30–38.
27. Vitisin A content in Chilean wines from *Vitis vinifera* cv. Cabernet Sauvignon and contribution to the color of aged red wines / M. Schwarz [et al.] // *J. Agric. Food Chem.* – 2003. – Vol. 51, № 21. – P. 6261–6267.
28. Rossouw, M. The phenolic composition of South African Pinotage, Shiraz and Cabernet Sauvignon wines / M. Rossouw, J. Marais // *South African Journal of Enology and Viticulture.* – 2004. – Vol. 25. – P. 94–104.
29. Schwarz, M. Isolation and identification of novel pyranoanthocyanins from black carrot (*Daucus carota* L.) juice / M. Schwarz, V. Wray, P. Winterhalter // *J. Agric. Food Chem.* – 2004. – Vol. 52, № 16. – P. 5095–5101.
30. Колбас, Н. Ю. Изучение взаимосвязи «структура – антиоксидантная способность» на примере антоцианов / Н. Ю. Колбас // Менделеевские чтения – 2012 : сб. материалов межвуз. науч.-метод. конф., Брест, 28 февр. 2012 г. ; под общ. ред. Н. С. Ступень. – Брест : БрГУ, 2012. – С. 48–53.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.09.2017

Kolbas N.Y. Pyranoanthocyanins: Chemical Structure, Spectral Characteristic, Specificity of Formation

Pyranoanthocyanes are a new class of plants pigments. Aspects on the chemical structure, nomenclature and classification of pyranoanthocyanins are suggested in this review. Analysis of the data on the spectrophotometric properties of vitisines, pinotines, and portosins is presented here. Mechanisms for the synthesis of pyranoanthocyanins in plant and their processing products are considered. The sensory properties of pyranoanthocyanins and the effect of pH solution and oxidants are analyzed in the article.



УДК 591.553 (476.7)

И.В. Абрамова¹, В.Е. Гайдук²

¹канд. биол. наук, доц., декан географического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²д-р биол. наук, проф. каф. зоологии и генетики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**СЕРАЯ ВОРОНА (*CORVUS CORONA L.*, PASSERIFORMES)
КАК МОДЕЛЬ СИНАНТРОПИЗАЦИИ И УРБАНИЗАЦИИ ПТИЦ
(НА ПРИМЕРЕ ЮГО-ЗАПАДНОЙ БЕЛАРУСИ)**

*На основании многолетних (1967–2017 гг.) исследований и литературных данных рассматриваются процессы синантропизации и урбанизации серой вороны *Corvus corona L.* (Passeriformes) в Беларуси в качестве модельного вида птиц. Показано, что эти процессы проходили наиболее интенсивно в последнее десятилетие XX – начале XXI в. в городах (Брест, Ивацевичи и др.) и поселках. Например, с 1967 по 2017 г. в г. Бресте количество гнездящихся пар серой вороны на маршруте протяженностью 25 км и шириной 200 м увеличилось в 4 раза, а в целом в городе – в 5,2 раза.*

Введение

Антропогенная трансформация ландшафтов и возникновение новых биотопов, благоприятных для многих видов птиц, в том числе и серой вороны, возможность использования новых богатых кормовых ресурсов, укрытий и убежищ антропогенного происхождения способствуют приобретению специфических адаптаций – изменение их поведения, обособление антропогенных популяций. По мере повышения степени трансформации ландшафтов в городах и поселках происходит снижение видового разнообразия птиц (вплоть до монодоминантности). Негативная тенденция снижения численности одних видов может нивелироваться возрастанием численности других, в результате общая численность птиц может даже увеличиться.

Особенностям экологии, биоценотического и хозяйственного значению врановых птиц посвящены ряд совецаний, проходивших в различных городах России: в Москве (1984), Липецке (1989, 1993), Ставрополе (1992), Казани (1997), Саранске (2002).

В настоящее время врановые входят в состав основного синантропного ядра авифауны антропогенных ландшафтов многих регионов. Серую ворону можно использовать в качестве модели для рассмотрения особенностей синантропизации и урбанизации птиц. Это дает возможность проследить изменение в поведении и экологии этого вида при разной степени связи с антропогенным и урбанизированным ландшафтом [1–4].

Материал и методы

Материал для данной работы был собран в 1967–2017 гг. в населенных пунктах (городах Брест, Ивацевичи, Береза, Дрогичин, Каменец, Пружаны; деревнях Томашовка, Страдечь, Любищицы и др.) и природных экосистемах Брестской области. Применяли общепринятые методы полевых исследований [5]. В данном исследовании основное внимание уделено урбанизированным экосистемам – городам и поселкам. Наиболее полные данные собраны в г. Бресте и его окрестностях. В статье использованы сведения, опубликованные в монографии [6]. В г. Бресте в 1967–2017 гг. проведены учеты птиц в период сезона размножения на постоянных маршрутах: микрорайоны Восток – Ковалево – Южный городок – ул. Набережная – Брестская крепость; Гребной канал – ул. Московская – ул. Ленина – Северный городок – д. Тюхиничи. Длина маршрута со-



ставляла 25 км, ширина 200 м. Общая протяженность учетных маршрутов более 900 км. Маршрут включал кварталы многоэтажной и усадебной застройки (старого и нового типов), участки долин рек Мухавец и Западный Буг.

В урбанизированных экосистемах наряду с учетом птиц на маршруте вели также синхронный подсчет птиц на небольших фиксированных площадках (окруженные домами газоны и скверы, участки кустарников и древесной растительности и т.д.). Полученные данные затем пересчитывались на 1 км² каждого местообитания. Систематические наблюдения, учеты численности птиц проводились в г. Бресте, г. Ивацевичи, д. Томашовка, на территории дачного поселка «Леснянка» Брестского р-на, в д. Любищицы Ивацевичского р-на. В других местообитаниях, в том числе и естественных экосистемах, исследования проводили не каждый год. Это позволило установить динамику плотности населения вида, изменение поведения, характер размещения и строения гнезд птиц урбанизированных и природных популяций.

Результаты исследования и их обсуждение

Процессы синантропизации и урбанизации серой вороны в XX в. в России и на сопредельных территориях рассмотрены в ряде работ В.М. Константинова [1; 2; 7; 8] с анализом литературных данных и других орнитологов [9–13]. Показано, что многочисленные стаи ворон зимовали в крупных городах центральной России в XX в. Весной они покидали города и гнездились в отдалении от поселений человека. Лишь отдельные пары гнездились в пригородах и лесопарковых зонах больших городов. Интенсивная урбанизация вороны проходила на территории Европейской России во второй половине XX в. Установлена определенная зависимость между размерами городов и численностью зимующих в них врановых, основу которых составляет серая ворона [7; 8]. Например, в г. Москве в 1980 г. зимовало 700–800 тыс. особей врановых, из них 76 % составляли серые вороны [7]; 100–200 тыс. особей зимовало в Ленинграде, Киеве, Львове, Липецке, Чебоксарах, Ростове-на-Дону [2; 13]. Серая ворона является одной из самых обычных птиц Ленинградской области. В антропогенных ландшафтах она встречается во все сезоны года, в естественных биотопах летом обычна, но зимой редка [14]. Около 30 % ворон [8], гнездящихся в городах Центральной России стали оседлыми, в северных городах Европейской России в зимний период птицы используют при добыче корма электрическое освещение.

Процесс синантропизации и урбанизации серой вороны в Беларуси слабо изучен. Тем не менее литературные сведения и наши наблюдения дают возможность проследить эти процессы на протяжении XX–XXI вв. В.Н. Шнитников [15] отмечал, что в начале XX в. в Минской губернии серая ворона зимовала в городах. По данным А.В. Федюшина и М.С. Долбика [16], в первой половине XX в. серые вороны семьями и небольшими группами находились на опушках лесов, на полях и в поймах рек до середины сентября, затем концентрировались в окрестностях поселков и городов. Осенью с наступлением заморозков и зимой птицы кормились отбросами у жилья человека. В г. Минске и других городах республики встречались стаи, состоящие из нескольких сотен птиц. Серые вороны ночевали в городских парках, окрестных лесах на деревьях (преимущественно хвойных), по утрам разлетались в разные части города в поисках корма. Численность птиц в поселениях человека сокращалась в начале марта, еще меньше их регистрировали во второй половине апреля. Это характерно и для других регионов Беларуси. Таким образом, эти авторы отмечали начальный этап урбанизации серой вороны в Беларуси – концентрация птиц в осенне-зимний период в городах и поселках и перемещение их в окрестности весной.



Отметим, что в Ленинградской области [14] вороны, гнездящиеся в естественных лесных биотопах, появляются на гнездовых участках не раньше второй половины марта. С августа они оставляют эти участки и перемещаются в антропогенные ландшафты к потенциально возможным источникам корма.

М.С. Долбик [17] указывал, что важным элементом культурного ландшафта являются прежде всего города и городские поселки, в которых живут и гнездятся 13 видов птиц, среди которых серая ворона не описана. Уже во второй половине XX в. отмечено, что ворона селится в лесопарках, парках, скверах, старых уличных насаждениях, придорожных полосах и других биотопах.

В зимний период в 1980–1983 гг. в г. Минске выявлено 6 видов врановых. В парковой зоне фоновым видом является серая ворона (47,2 %); в районах застройки нового типа (1–5 лет) на долю этого вида приходилось 7,2 %; в сомкнутых застройках 42,0 %; в застройках индивидуального типа – 34,3 % [18].

По сведениям В.В. Гричика и Л.Д. Бурко [19], ворона обычна в населенных пунктах. Птицы, гнездящиеся в городах, видимо, ведут оседлый образ жизни.

Птицы в регионе приступают к размножению во второй половине марта – начале апреля [6]. В средней полосе Беларуси начало кладок яиц приходится в среднем на начало апреля, появление птенцов – на первую половину мая [20]. В урбанизированных ландшафтах, по нашим наблюдениям, ворона начинает строить гнезда и откладывает яйца на 6–10 дней раньше, чем в естественных экосистемах. У птиц удлиняется репродуктивный период на 2–3 недели по сравнению с лесными популяциями. Гнезда строят из сухих сучьев различных пород деревьев: сосны, ольхи, березы и др., которые укладывают в развилки крупных ветвей дерева. В городах и поселках при строительстве гнезд вороны стали использовать различные синтетические материалы: стекловолокно, проволоку и др. Гнезда помещают на различных деревьях, преимущественно на сосне опушек леса, островных лесов, расположенных среди болот и лугов, небольших рощах. Больших массивов леса они избегают.

На территории г. Бреста имеются значительные пространства, покрытые древесной растительностью, в том числе хвойными, лиственными и плодово-ягодными насаждениями (сады) и кустарниками. Наибольшее число серых ворон отмечено в старых кварталах города, парках, долине р. Мухавец, на территории Брестской крепости (таблица).

По данным учетов на постоянных маршрутах в г. Бресте (длина 25 км, ширина 200 м, общая площадь 500 га) в 1967–2017 гг. было зарегистрировано 12–50 гнезд, в 1967–1980 гг. число учтенных гнезд составляло 12–20, в 1981–1997 гг. – 20–35, в последние 20 лет достигло 50. За данный период плотность гнездования увеличилась в 4 раза: от 2,5 ос./км² в 1970 году до 10 ос./км² в 2016–2017 гг. По нашим данным, в г. Бресте в целом число гнездящихся пар за это время увеличилось в 6,2 раза: с 50 до 310. Отметим, что в юго-западном секторе Москвы гнездовая популяция этого вида за 25 лет (1965–1990 гг.) возросла в 10 раз [10].

Численность серой вороны в Беларуси оценивается в 280–320 тыс. пар. Увеличение численности вида произошло в 1980–90-е гг. в связи с урбанизацией вида [21]. В юго-западной Беларуси численность серых ворон в последние 10 лет оценивается в 56–60 тыс. гнездящихся пар с тенденцией слабого увеличения. На долю урбанизированных популяций приходится в разные годы 25–35 %.

Специальные многолетние исследования И.В. Абрамовой [22] плотности летнего и зимнего населения птиц различных экосистем, в том числе и урбанизированных, показало (таблица), что плотность населения серых ворон варьирует в широком диапа-



зоне. Наибольшая плотность вида летом выявлена на урбанизированных территориях: г. Ивацевичи (56,6 ос./км²); пойменные экосистемы г. Бреста (60,0 ос./км²), Гребной канал и болото (75,6 ос./км²); д. Томашовка (65,6 ос./ км²). В зимний период плотность серой вороны в районах индивидуальной застройки г. Бреста возрастает почти в 4 раза, в парках и ряде других экосистем – в 2,5 раза. В пойме р. Мухавец она ниже, чем летом.

Таблица. – Обилие населения серых ворон в урбанизированных экосистемах юго-западной Беларуси [22], ос./км²

Экосистемы	Лето	Зима
г. Барановичи	35,8	64,5
г. Кобрин	30,5	70,0
г. Ивацевичи	50,6	62,2
г. Пинск	26,5	60,2
г. Береза	20,2	50,8
г. Иваново	18,7	46,8
г. Столин	17,4	52,3
г. Высокое	10,2	25,4
г. Брест, инд. застройки	17,7	66,8
г. Брест, многоэтажные кварталы	8,7	15,6
Парки г. Бреста	30,0	70,5
Пойменные экосистемы г. Бреста	60,0	46,3
Гребной канал и болото	75,6	50,8
д. Томашовка (Брестский р-н)	65,6	68,5
д. Любищицы (Ивацевичский р-н)	26,8	30,5
Дачные поселки (Леснянка и Заказанка)	6,4	9,4

В связи с этим отметим, что в районах индивидуальной застройки г. Гомеля зимой в 1975–1980 гг. в отличие от районов современных многоэтажных строений и смешанной застройки резко возросла численность серых ворон – до 51,9 ос./км² [23].

Было показано [24], что на территории мелкого населенного пункта (д. Покалюбичи Гомельской области) в 1998–2003 гг. летом вид редок и обычен зимой, ноябре – феврале плотность этого вида достигала 13,5 ос. на 10 га.

Нами прослежена сезонная динамика численности серой вороны в одном из микрорайонов г. Бреста в 1980 и 2010 гг. (рисунок 1).

Осенью и зимой плотность населения птиц значительно выше по сравнению с летом и достигает 50–55 ос./км².

В 1980 г. плотность населения птиц была несколько ниже как летом (10–15 ос./км), так и зимой (25–35 ос./км²), чем в 2010 г.

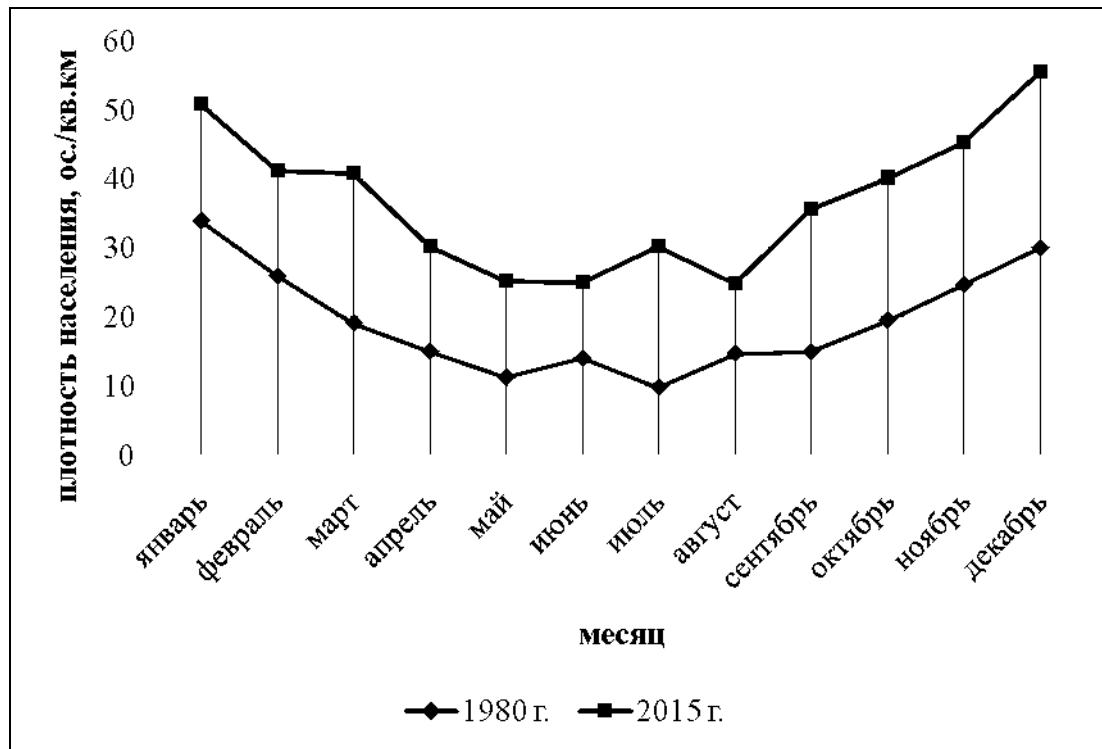


Рисунок 1. – Сезонная динамика численности серой вороны в г. Бресте

Численность серой вороны в 1985–2016 гг. летом и зимой (рисунок 2) варьировала по годам. Летом она была наименьшей в 1985–1990 гг., постепенно увеличивалась и в 1994–2010 гг. поддерживалась на уровне 40–50 ос./км², в последние 7 лет она несколько снизилась и составляла не более 40 ос./км². В зимний период также отмечено колебание численности птиц по годам.

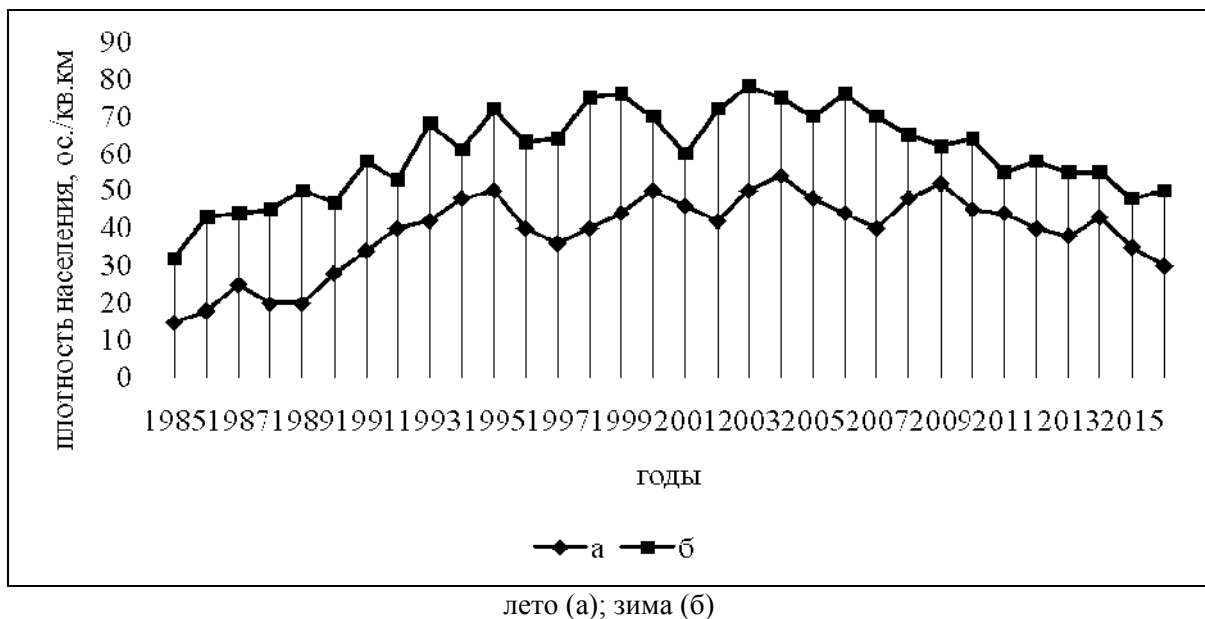


Рисунок 2. – Многолетняя динамика численности серой вороны в г. Бресте



В естественных лесных экосистемах вид относительно редок, плотность в июне – июле не превышает 6,2, варьируя в пределах 1,0–6,2 ос./км²; зимой она значительно уменьшается и находится в пределах 0,2–2,3 ос./км², в некоторые годы ворона не попадалась в учеты [22].

Например, несколько пар (4–8) в течение 2001–2017 гг. располагались на отдельных стоящих ольхах, вербах и облепихе на болоте в микрорайоне Ковалево г. Бреста вблизи или посреди колонии озерной чайки, которая состояла в различные годы из 2–5 тыс. гнездящихся пар. Расстояние между гнездами ворон составляло 50–300 м. Гнезда располагались на высоте 4–10 м. Сроки размножения серой вороны практически совпадали со сроками размножения озерной чайки. Были зарегистрированы многочисленные случаи разорения гнезд чаек воронами, которые в период выкармливания птенцов добывали яйца и птенцов чаек. Нам неоднократно приходилось наблюдать разорение гнезд рябинника, похищение из гнезд яиц и птенцов зяблика, серых мухоловок, чибиса и других птиц. В период выкармливания птенцов вороны добывают преимущественно насекомых: жуков, гусениц чешуекрылых, червей и др. Летом и осенью птицы включают в кормовой рацион семена ржи, пшеницы, ячменя и других растений. В последнее десятилетие вороны в течение всего года в городах и поселках (города Брест, Ивацевичи и др.) концентрируются на свалках, около мусорных контейнеров, где кормятся пищевыми отходами. В поселках нападают на домашнюю птицу. Неоднократно мы наблюдали (Гребной канал в г. Бресте; вдхр. Орхово в Брестском р-не и т.д.), как вороны схватывали мелкую рыбу, выброшенную рыбаками. Птицы находились в нескольких метрах от рыбаков, наблюдая за ловлей рыб и выжидая очередную порцию.

Попадая в новые условия урбанизированного ландшафта, вороны, как и другие птицы, приобретают специальные адаптации, в первую очередь, изменяется поведение птиц. Они перестают воспринимать человека как источник опасности. Так, дистанция вспугивания у этого вида с 1970 по 2017 г. сократилась в 2–3 раза. Если в первый период (1967–1980 гг.) она составляла 3–5 м, то в последние годы некоторые птицы подпускают человека до 0,5–2 м.

Возросла агрессивность птиц по отношению к человеку при защите гнезд и слетков. Были зарегистрированы случаи подлета взрослой птицы к человеку при защите птенцов, нанесение ударов клювом и крыльями по телу человека. Благоприятные условия обитания для серой вороны в городах и поселках снизили миграционную активность птиц урбанизированных популяций. Это отмечали и другие орнитологи [2].

На территории европейской части России урбанизация серой вороны в последние три десятилетия XX в. приобрела характер массовой экспансии в городах и привела к формированию городских популяций в отличие от Западной Европы, где этот вид фактически отсутствует на гнездовых в городах. Очевидно, здесь сыграли основную роль особенности городского хозяйства. В западно-европейских городах традиции полной утилизации пищевых отходов имеют многолетнюю историю, также и активное преследование серой вороны в городах и за их пределами [12].

В городах европейской части России утечка продуктов питания до конца 1980-х гг. была значительной. Было распространено контейнерное хранение мусора и пищевых отходов во дворах. Тем самым для птиц в наличии было изобилие источников корма в течение круглого года, наряду с этим терпимое отношение человека к вороне в городе способствовало успешному освоению ими городских территорий. Экологический кризис в России начиная с 1991–1992 гг. сопровождался резким снижением объемов пищевых отходов и их доступности для синантропных птиц, что привело к значительному ухудшению кормовой базы, в том числе и серой вороны, численность которой сократилась



лась в 2–3 раза. Напротив, в городах Карелии в это время был отмечен 2–3-кратный рост городских популяций серой вороны. Она оказалась лучше других видов города приспособлена к ухудшению кормовых условий [25].

Заклучение

Основным фактором, обусловившим синантропизацию и урбанизацию серой вороны в юго-западной Беларуси, является обилие и доступность кормов антропогенного происхождения, которые птицы используют в городах и поселках. Здесь они почти полностью переходят на питание пищевыми и хозяйственными отходами. Возможность успешно добывать корм в течение всего года, более благоприятные температурные условия, покровительственное отношение со стороны человека, практически полное отсутствие хищных птиц способствуют формированию урбанизированных популяций этого вида. Синантропизация и урбанизация серой вороны происходят на уровне отдельных особей и их групп, популяций. В населенных пунктах по сравнению с природными ландшафтами плотность населения вида больше (особенно в холодный период года), серые вороны раньше приступают к размножению, гнездовой период более растянут. У городских популяций птиц возрастает оседлость, уменьшается миграционная активность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Врановые как модель синантропизации и урбанизации птиц / В. М. Константинов [и др.] // *Материалы Всес. науч.-метод. совещ. зоологов педвузов.* – Махачкала, 1990. – Ч. 2. – С. 119–120.
2. Константинов, В. М. Особенности урбанизации врановых птиц / В. М. Константинов // *Экология, эволюция и систематика животных : материалы Всес. науч.-практ. конф. с междунар. участием.* – Рязань : Голос губернии, 2009. – С. 15–19.
3. Водолажская, Т. И. Врановые птицы в урбанизированных ландшафтах / Т. И. Водолажская // *Экология и численность врановых птиц России и сопредельных государств : сб. науч. тр.* – Казань : КГПУ, 1997. – С. 71–76.
4. Храбрый, В. М. Пути приспособления птиц к урбанизированному ландшафту / В. М. Храбрый // *Птицы и урбанизированный ландшафт : сб. крат. сообщений.* – Каунас, 1984. – С. 4–8.
5. Вергелес, Ю. И. Количественные учеты населения птиц : обзор количественных методов учета птиц / Ю. И. Вергелес. // *Беркут*, 1994. – Т. 3. – № 1. – С. 43–48.
6. Гайдук, В. Е. Экология птиц юго-запада Беларуси. Воробьинообразные : монография / В. Е. Гайдук, И. В. Абрамова ; Брест. гос. ун-т. – Брест : Изд-во БрГУ, 2013. – 298 с.
7. Константинов, В. М. Изменение численности и стереотип гнездования у серых ворон в городе / В. М. Константинов, А. А. Вахрушев, И. Г. Лебедев // *Влияние антропогенной трансформации ландшафта на население наземных позвоночных животных : тез. докл. Всесоюз. совещ. : в 2 ч.* – М., 1987. – Ч. 2. – С. 151–152.
8. Марголин, В. А. Сезонные перемещения серых ворон на территории СССР / В. А. Марголин, В. М. Константинов // *Врановые птицы в антропогенном ландшафте.* – Липецк : ЛГПИ, 1993. – Вып. 1. – С. 45–64.
9. Благосклонов, К. Н. Врановые птицы в городах Восточной Европы / К. Н. Благосклонов // *Экология, биоценотическое и хозяйственное значение врановых птиц : материалы I Всесоюз. совещ.* – М. : Наука, 1984. – С. 64–67.
10. Корбут, В. В. Синантропизация и урбанизация населения серой вороны мегаполиса Москва / В. В. Корбут // *Ceterisparibus*, 2016. – № 4. – С. 13–18.



11. Корбут, В. В. Депрессия численности серой вороны (*Corvuscoronec.L.*, 1785) в Московском регионе / В. В. Корбут // Докл. РАН, 1996. – Т. 351, № 1. – С. 140–142.
12. Корбут, В. В. Уникальная популяция серой вороны (*Corvuscoronec.L.*, 1785) Москвы / В. В. Корбут // Докл. РАН, 1996. – Т. 348, № 1. – С. 136–139.
13. Храбрый, В. М. Многолетняя динамика гнездовой численности врановых в Санкт-Петербурге / В. М. Храбрый // Экология врановых птиц в антропогенных ландшафтах : материалы VI Междунар. конф. – Саранск, 2002. – С. 130–132.
14. Мальчевский, А. С. Птицы Ленинградской области и сопредельных территорий / А. С. Мальчевский, Ю. П. Пукинский. – Л. : ЛГУ, 1983. – Т. 2. – 502 с.
15. Шнитников, В. Н. Птицы Минской губернии / В. Н. Шнитников. – М. : Типо-литогр. т-ва И. Н. Кушнерев и К°, 1913. – 475 с.
16. Федюшин, А. В. Птицы Белоруссии / А. В. Федюшин, М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1967. – 519 с.
17. Долбик, М. С. Ландшафтная структура орнитофауны Белоруссии / М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1974. – 312 с.
18. Иванютенко, А. Н. Распределение и численность врановых птиц г. Минска в зимний период / А. Н. Иванютенко // Биологические основы освоения, реконструкции и охраны животного мира Белоруссии : тез. докл. V зоол. конф. – Минск : Наука и техника, 1983. – С. 121–122.
19. Гричик, В. В. Животный мир Беларуси. Позвоночные : учеб. пособие / В. В. Гричик, Л. Д. Бурко. – Минск : Изд. центр БГУ, 2013. – 399 с.
20. Иванютенко, А. Н. Фенология гнездования врановых птиц Белоруссии / А. Н. Иванютенко // Фенологические исследования природы Белоруссии / ред. кол.: И. Д. Юркевич [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1986. – С. 166–169.
21. Птицы Беларуси на рубеже XXI века / М. Е. Никифоров [и др.]. – Минск : Н. А. Королев, 1997. – 188 с.
22. Абрамова, И. В. Структура и динамика населения птиц экосистем юго-запада Беларуси / И. В. Абрамова. – Брест : Изд-во БрГУ, 2007. – 208 с.
23. Кусенков, А. Н. Зимняя численность и некоторые черты экологии врановых птиц в урбанизированных ландшафтах Белорусского Полесья / А. Н. Кусенков, А. Д. Ти-ханский // материалы Всесоюз. науч.-метод. совещ. зоологов педвузов. – Махачкала, 1990. – Ч. 2. – С. 141–142.
24. Горошко, З. А. Динамика численности врановых птиц мелкого населенного пункта Полесья / З. А. Горошко, А. Н. Кусенков // Экологические проблемы Полесья и сопредельных территорий : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 19–21 окт. 2005 г. ; редкол.: А. Н. Кусенков [и др.]. – Гомель : ГГУ, 2005. – С. 40–42.
25. Сазонов, С. В. Современные тенденции динамики орнитофауны на урбанизи-рованных территориях в Карелии / С. В. Сазонов // Тр. Карел. науч. центра РАН. – Вып. 4. – Петрозаводск, 2003. – С. 187–200.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2017

Abramova I.V., Gaiduk V.E. Gray Crow (Corvus Corona L., Passeriformes) as a Model of Synthropisation and Urbanization of Birds in Southwest of Belarus

The article tracks the processes of synanthropization and urbanization of the gray crow of Corvus corona L. (Passeriformes) in Belarus as a model species of birds are considered. The field work was performed in the years 1992–2017 applying the conventional bird count methods. These processes took place most intensively in the last decade of the 20 and beginning of the 21 centuries in the cities (Brest, Ivatsevichi, etc.) and settlements. For example, in Brest from 1967 to 2017 years the number of nesting pairs of gray crows on a route 25 km long and 200 m wide has increased 4-fold, and in the city – 5.2 times.



УДК 581.92 + 582

С.В. Зеркаль¹, Н.В. Шкуратова²

¹канд. биол. наук, доц., доц. каф. ботаники и экологии
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. биол. наук, доц., доц. каф. ботаники и экологии
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ФЛОРИСТИЧЕСКИЙ СОСТАВ ВЫСШИХ ВОДНЫХ И ПРИБРЕЖНЫХ РАСТЕНИЙ БАССЕЙНА р. ПРИПЯТЬ В ЧЕРТЕ г. ПИНСКА

Рассматриваются результаты изучения видового состава водной и прибрежно-водной растительности бассейна р. Припять в черте г. Пинска. В ходе систематизации выявлено 98 видов высших водных и прибрежных растений, среди которых гидрофитов 32 вида, гигрофитов – 66 видов. В акватории г. Пинска выявлены виды из числа нуждающихся в профилактической охране, также установлено произрастание 5 охраняемых видов.

Введение

Несмотря на достаточную обеспеченность водными ресурсами территории Беларуси, все большую тревогу вызывают проблемы, связанные с антропогенными нагрузками на водные объекты. Возрастающее воздействие на окружающую среду требует пристального изучения биоразнообразия на урбанизированных территориях, в том числе видового состава прибрежных и водных растений.

Поскольку таксономическая структура флоры является мерой биологического разнообразия флоры, с целью установления видового состава флоры макрофитов провели детальный анализ водной и прибрежно-водной растительности водоемов в акватории г. Пинска Брестской области.

Материалы и методы

Согласно геоморфологическому районированию территория Пинского района, соответственно, зона исследования относится к области Полесской низменности, под-области Белорусского Полесья и находится в пределах Лунинецкой аллювиальной низины. Лунинецкая низина расположена в южной части Полесья. Занимает обширную территорию вдоль долины Припяти и низовьев её многочисленных притоков [1].

Долина Припяти является основной водной артерией Белорусского Полесья – самый большой по величине и водности приток Днепра. Продольный профиль имеет слабовыпуклый характер и небольшое падение. Ширина долины достигает 75 км. Русло извилистое. В долине выделяются пойма и две надпойменные террасы.

Припять в границах Брестской области течет на протяжении свыше 150 км. Основные притоки: Пина, Ясельда, Бобрик, Цна, Лань и Случь (слева), Стоход, Стыр, Горынь, Ствига, Уборть (справа). Большинство притоков полностью или частично канализованы. Особенностью гидрологического режима является растянутое весеннее половодье. Замерзает река в первой половине декабря, очищается ото льда в марте. В теплые зимы ледостав может отсутствовать. Припять судоходна на всем протяжении в пределах области [2, с. 88]. Русло реки извилистое, с множеством стариц, заливов и песчаных островов. На всем протяжении ширина поймы изменяется в широких пределах – в месте впадения Пины достигает до 18 км.



Выделяют несколько уровней поймы. Старая высокая пойма (2–3 м), занимая отдельные участки долины, заливается только в экстремальные по водности годы. На низкой старой пойме (высота 1,5–2 м) периодически заливаются участки староречьев и протоков. Большую часть днища долины занимает молодая, сильно заболоченная пойма. Относительные превышения над урезом воды в верховьях 0,5–1,5 м, ширина до 17 км. Высокая молодая пойма тянется вдоль Припяти широкой полосой от 0,5 до 1,0 км. На приустьевых участках притоков характерными формами рельефа являются гривистые заболоченные участки с протоками и старицами. На притеррасных участках поймы хорошо выражены крупногривистые эоловые формы высотой 0,5–1,0 м, длиной до 5,0 км, а на некоторых отрезках поймы широко распространены прирусловые валы [3, с. 146].

В пределах г. Пинска протекают реки Припять, Пина, Ясельда. По водному режиму они относятся к равнинным, имеют небольшие уклоны и скорости течения.

Природные условия, рельеф, гидросеть долины Припяти претерпели значительные антропогенные трансформации. Техногенные преобразования связаны со строительством Днепро-Бугской системы, мелиоративных каналов, созданием ряда водохранилищ. Рельеф испытывает заметные изменения и за счет добычи торфа в результате сельскохозяйственной деятельности и за счет большого распространения карьерных выработок.

Климат Пинска умеренно континентальный с преобладающим влиянием морских воздушных масс, переносимых системой циклонов с Атлантического океана. Циклоны, перемещающиеся с Запада на Восток, в зимнее время приносят теплый воздух, а в летнее время обуславливают прохладную с дождями погоду. Чередование воздушных масс различного происхождения в холодное полугодие создает характерный для Пинска неустойчивый тип погоды. Преобладающий влажный атлантический воздух обуславливает высокую относительную влажность и значительную облачность, которые способствуют выпадению большого количества осадков.

Исследования по изучению видового состава водных и прибрежно-водных растений водоемов г. Пинска проводились в период с 2010 г. по 2016 г. В качестве основного метода исследования был маршрутно-рекогносцировочный метод, сущность которого заключалась в планомерном обследовании водных и прибрежно-водных фитоценозов в пределах г. Пинска. Наблюдения и сборы природных материалов, в том числе гербарных, проводились в руслах и старицах рек Пина и Припять, мелиоративных каналах, искусственных водоемах, вырытых в пойме.

Результаты и их обсуждение

Согласно классификации водных, воздушно-водных и околородных сосудистых растений, встречающихся в водоёмах и водотоках Беларуси, выделяют две основные группы растений – гидрофиты и гигрофиты. Современная аквафлора Беларуси насчитывает 183 вида высших (сосудистых) растений [4].

Гидрофиты, или настоящие водные растения – свободно плавающие на поверхности воды или в ее толще, а также погруженные укореняющиеся растения, с плавающими листьями или без них [5]. Из данной категории в акватории г. Пинска выявлены 32 вида растений из 18 родов. В видовом составе преобладают покрытосеменные растения, однако выявлены 3 вида высших споровых (таблица 1).



Таблица 1. – Систематический перечень гидрофитов водоемов акватории г. Пинска

№	Вид	Семейство	Встречаемость
1	<i>Ricciocarpus natans</i> (L.) Corda in Opiz, Beitr. Naturg.	<i>Ricciaceae</i>	редко
2	<i>Riccia fluitans</i> L.		редко
3	<i>Salvinia natans</i> (L.) All.	<i>Salviniaceae</i>	нередко 4 категория охраны
4	<i>Nymphae alba</i> L.	<i>Nymphaeaceae</i>	не часто 3 категория охраны
5	<i>Nymphae candida</i> J. et C. Presl.		нередко
6	<i>Nuphar lutea</i> (L.) Smith		очень часто
7	<i>Ceratophyllum submersum</i> L.	<i>Ceratophyllaceae</i>	нередко
8	<i>Batrachium trichophyllum</i> (Chaix) Bosch	<i>Ranunculaceae</i>	редко
9	<i>Batrachium circinnatus</i> (Silbth.) Spach		часто
10	<i>Hottonia palustris</i> L.	<i>Primulaceae</i>	часто
11	<i>Aldrovanda vesiculosa</i> L.	<i>Droseraceae</i>	очень редко 2 категория охраны
12	<i>Myriophyllum verticillatum</i> L.	<i>Haloragaceae</i>	нередко
13	<i>Myriophyllum spicatum</i> L.		нередко
14	<i>Hippuris vulgaris</i> L.	<i>Hippuridaceae</i>	нередко
15	<i>Utricularia intermedia</i> Hayne	<i>Lentibulariaceae</i>	редко
16	<i>Utricularia vulgaris</i> L.		часто
17	<i>Callitriche hermaphroditica</i> L.	<i>Callitrichaceae</i>	не часто
18	<i>Callitriche hermaphroditica</i> L.		не часто
19	<i>Elodea canadensis</i> Michx.	<i>Hydrocharitaceae</i>	часто
20	<i>Hydrocharis morsus-ranae</i> L.		нередко
21	<i>Potamogeton pectinatus</i> L.		нередко
22	<i>Potamogeton filiformis</i> Pers.		редко
23	<i>Potamogeton crispus</i> L.	<i>Potamo- gemonaceae</i>	нередко
24	<i>Potamogeton gramineus</i> L.		изредка
25	<i>Potamogeton lucens</i> L.		часто
26	<i>Potamogeton perfoliatus</i> L.		нередко
27	<i>Potamogeton natans</i> L.		нередко
28	<i>Spirodela polyrhiza</i> (L.) Schleid.	<i>Lemnaceae</i>	нередко
29	<i>Lemna minor</i> L.		часто
30	<i>Lemna gibba</i> L.		редко
31	<i>Lemna trisulca</i> L.		часто
32	<i>Wolffia arrhyza</i> (L.) Horkel ex Wimm.		очень редко

В том числе зарегистрированы два вида мохообразных – *Ricciocarpus natans* L. и *Riccia fluitans* L. (семейство *Ricciaceae*), которые встречаются довольно редко и приурочены к местам обитания со стоячей или слабо проточной водой мелких водоемов [6].

Единственный водный папоротник в Республике Беларусь – *Salvinia natans* – в акватории г. Пинска встречается нередко, поскольку на юге Беларуси находится в пределах естественного ареала, где климатические условия способствуют активному вегетативному размножению растения в течение вегетационного сезона и благоприятной зимовке спорокарпиев [7; 8]. Сходная ситуация характерна для бассейнов рек Припять, Мухавец, Западный Буг.

Покрытосеменные представлены 29 видами и 16 родами, относящимися к 12 семействам: *Nymphaeaceae*, *Ceratophyllaceae*, *Ranunculaceae*, *Primulaceae*, *Droseraceae*,



Haloragaceae, *Hypuridaceae*, *Lentibulariaceae*, *Callitrichaceae*, *Hydrocharitaceae*, *Potamogetonaceae*, *Lemnaceae*. Ведущими по числу видов являются семейства *Potamogetonaceae* (7 видов), *Lemnaceae* (5 видов).

Семейство *Ranunculaceae* представлено 2 видами рода *Batrachium*, являющимися настоящими водными растениями, способными образовывать наземные формы при понижении уровня воды.

Повсеместно распространена *Nuphar luteum*, часто встречаются *Batrachium circinnatus*, *Hottonia palustris*, *Utricularia vulgaris*, *Potamogeton lucens*, *Lemna minor*, *Lemna trisulca*, а также заносный и натурализовавшийся вид – *Elodea canadensis*. Обнаружены участки произрастания *Wolffia arrhiza*, редкого заносного вида, являющегося самым маленьким цветковым растением на земле.

Зарегистрированы охраняемые гидрофиты [7; 8]:

– *Nymphaea alba* L. (*Nymphaeaceae*) – третья категория охраны – нечасто встречается в воде стариц и заток, где глубина достигает от 1,5 до 2,5 м;

– *Salvinia natans* L. (*Salviniaceae*) – относится к четвертой категории охраны;

– *Aldrovandavesiculosa* L. (*Droseraceae*) – вторая категория охраны – реликтовый насекомоядный вид, встречается спорадически в заводях с медленным течением и канавах, у поверхности воды.

Таким образом, в составе гидрофитной группы акватории г. Пинска представлены 39 видов высших сосудистых растений, что составляет 34 % от числа гидрофитов аквафлоры Беларуси [4]. Присутствие в акватории г. Пинска таких древних реликтовых растений, как *Salvinia natans*, *Aldrovandavesiculosa*, *Nymphaea alba*, *Hippuris vulgaris* и других присуще для акваторий Полесья в целом и характеризует местную водную флору как более древнюю в сравнении с наземной флорой [9].

Растения второй, широко представленной группы – гигрофиты – занимают средние уровни береговой зоны затопления, заходя довольно часто в воду у низких топких берегов. В последнем случае могут входить в состав сообществ гигрогелофитов и гелофитов [5]. К категории гигрофитов, т.е. наземных растений влажных, переувлажнённых и периодически затопляемых местообитаний с высокой влажностью воздуха, из района исследования можно отнести 66 видов (таблица 2).

По всей береговой зоне обследованной акватории достаточно часто обнаруживаются хвощеобразные *Equisetum palustre* L. и *Equisetum fluviatile* L.

Покрытосеменные на обследованной территории представлены 25 семействами, среди которых представлены 16 семейств двудольных (*Ranunculaceae*, *Caryophyllaceae*, *Elatinaceae*, *Violaceae*, *Brassicaceae*, *Primulaceae*, *Lythraceae*, *Anagraceae*, *Apiaceae*, *Menyanthaceae*, *Rubiaceae*, *Boraginaceae*, *Scrophulariaceae*, *Lamiaceae*, *Asteraceae*) и 9 семейств однодольных (*Butomaceae*, *Alismataceae*, *Juncaginaceae*, *Iridaceae*, *Cyperaceae*, *Poaceae*, *Araceae*, *Sparganiaceae*, *Typhaceae*).

Наибольшим видовым составом характеризуются семейства *Cyperaceae* (15 видов), *Poaceae* (6 видов), *Apiaceae* (5 видов), остальные семейства содержат по 3 вида и менее.

Среди гигрофитов выявлены два охраняемых вида [7; 8]:

– *Hydrocotyle vulgaris* L. (*Umbelliferae*) – первая категория охраны – обнаружен малочисленная группа экземпляров на заросшей осокой береговой линии р. Припять;

– *Elatine hudsoniana* L. (*Elatinaceae*) – вторая категория охраны – обнаружен на границе городской черты в составе пионерных сообществ на илистом грунте береговой зоны свежих карьеров.



Таблица 2. – Систематический перечень гигрофитов береговых местообитаний акватории г. Пинска

№	Вид	Семейство	Встречаемость
1	<i>Equisetum palustre</i> L.	<i>Equisetaceae</i>	часто
2	<i>Equisetum fluviatile</i> L.		часто
3	<i>Caltha palustris</i> L.	<i>Ranunculaceae</i>	очень часто
4	<i>Ranunculus lingua</i> L.		часто
5	<i>Myasotin quaticum</i> (L.) Fries	<i>Caryophyllaceae</i>	часто
6	<i>Stellaria palustris</i> Retz.		часто
7	<i>Elatine hudpiper</i> L.	<i>Elatinaceae</i>	редко 2 категория охраны
8	<i>Viola palustris</i> L.	<i>Violaceae</i>	часто
9	<i>Rorippa amphibium</i> (L.) Bess.	<i>Brassicaceae</i>	нередко
10	<i>Cardamine amara</i> L.		нередко
11	<i>Cardamine pratensis</i> L.		часто
12	<i>Lysimachia vulgaris</i> L.	<i>Primulaceae</i>	часто
13	<i>Lythrum salicaria</i> L.	<i>Lythraceae</i>	довольно часто
14	<i>Epilobium palustre</i> L.	<i>Anagraceae</i>	нередко
15	<i>Hydrocotyle vulgaris</i> L.	<i>Apiaceae</i>	единично 1 категория охраны
16	<i>Cicuta virosa</i> L.		довольно часто
17	<i>Sium latifolium</i> L.		нередко
18	<i>Oenanthe quatica</i> L.		довольно часто
19	<i>Peucedanum palustre</i> L. Moench.		часто
20	<i>Menyanthes trifoliata</i> L.	<i>Menyanthaceae</i>	часто
21	<i>Galium palustre</i> L.	<i>Rubiacea</i>	часто
22	<i>Galium uliginosum</i> L.		нередко
23	<i>Myosotis scorpioides</i> L.	<i>Boraginaceae</i>	очень часто
24	<i>Limosella aquatica</i> L.	<i>Scrophulariaceae</i>	изредка
25	<i>Veronica scutellata</i> L.		нередко
26	<i>Veronica anagallis-aquatica</i> L.		нередко
27	<i>Stachys palustris</i> L.	<i>Lamiaceae</i>	часто
28	<i>Lycopus europaeus</i> L.		часто
29	<i>Menhta aquatica</i> L.		нечасто
30	<i>Bidens cernuas</i> L.	<i>Asteraceae</i>	нередко
31	<i>Bidens frondoza</i> L.		редко
32	<i>Eupatorium cannabinum</i> L.		нередко
33	<i>Butomus umbellatus</i> L.	<i>Butomaceae</i>	часто
34	<i>Sagittaria sagittifolia</i> L.	<i>Alismataceae</i>	часто
35	<i>Alisma plantago-aquatica</i> L.		часто
36	<i>Alisma lanceolatum</i> L.		реже
37	<i>Alisma gramineum</i> L.		изредка
38	<i>Triglochin palustris</i> L.	<i>Juncaginaceae</i>	часто
39	<i>Juncus bufonius</i> L.		часто
40	<i>Iris pseudacorus</i> L.	<i>Iridaceae</i>	нередко
41	<i>Eriophorum polystachion</i> L.	<i>Cyperaceous</i>	часто
42	<i>Eleocharis palustris</i> L.		часто
43	<i>Scirpus sylvaticus</i> L.		часто
44	<i>Schoenoplectus lacustris</i> (L.) Pala		часто



Продолжение таблицы 2

45	<i>Cyperus fuscus</i> L.	Cyperaceae	редко
46	<i>Carex vulpina</i> L.		довольно часто
47	<i>Carex cyperoides</i> L.		очень редко
48	<i>Carex aquatilis</i> Wahlenb.		изредка
49	<i>Carex elata</i> All. subsp. omskiana (Meinsh.) Jalas		нередко
50	<i>Carex acuta</i> L.		часто
51	<i>Carex nigra</i> (L.) Reichard.		очень часто
52	<i>Carex riparia</i> Curt.		нередко
53	<i>Carex pseudocyperus</i> L.		нередко
54	<i>Carex vesicaria</i> L.		часто
55	<i>Carex rostrata</i> Stokes	часто	
56	<i>Phragmites australis</i> (Cav.) Trin. ex Steud.	Poaceae	часто
57	<i>Glyceria fluitans</i> (L.) R. Br.		часто
58	<i>Glyceria maxima</i> (C. Hartm.) Holmb.		часто
59	<i>Poa palustris</i> L.		часто
60	<i>Alopecurus geniculatus</i> L.		нередко
61	<i>Phalaroides arundinacea</i> (L.) Rauschert	часто	
62	<i>Acorus calamus</i> L.	Araceae	изредка
63	<i>Calla palustris</i> L.		нередко
64	<i>Sparganium emersum</i> Rehm.	Sparganiaceae	редко
65	<i>Typha latifolia</i> L.	Typhaceae	часто
66	<i>Typha angustifolia</i> L.		редко

Заклучение

Флора водных растений насчитывает 98 видов, 62 родов, 35 семейств, 5 классов, 4 отделов высших растений.

Высшие споровые растения (5 видов) представлены мохообразными, хвощеобразными и папоротникообразными.

Покрытосеменные растения представлены 45 видами двудольных, которые относятся к 23 семействам, и 48 видами однодольных, относящихся к 12 семействам.

В акватории г. Пинска выявлены виды из числа нуждающихся в профилактической охране (*Wolffia arrhyza*, *Nymphae candida*, *Utricularia intermedia*, *Lemna gibba*, *Myriophyllum verticillatum*, *Hippuris vulgaris*, *Batrachium trichophyllum*, *Limosella aquatic*, *Carex aquatilis*, *Cyperus fuscus*), также установлено произрастание 5 охраняемых видов (*Salvinianatans*, *Aldrovandavesiculosa*, *Nymphaea alba*, *Hydrocotylevulgare*, *Elatinehurdripiper*).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матвеев, А. В. Рельеф Белоруссии / А. В. Матвеев, Б. Н. Гурский, Р. Н. Левицкая. – Минск : Университетское, 1988. – 317 с.
2. Мешечко, Е. Н. Краеведение : учеб.-метод. пособие для студ. геогр. фак. / Е. Н. Мешечко. – Брест : БрГУ, 2010. – 353 с.
3. Якушко, О. Ф. Геоморфология Беларуси : учеб. пособие / О. Ф. Якушко. – Минск : БГУ, 1999. – 173 с.



4. Гигевич, Г. С. Высшие водные растения Беларуси: эколого-биологическая характеристика, использование и охрана / Г. С. Гигевич, Б. П. Власов, Г. В. Вынаев ; под общ. ред. Г. С. Гигевич. – Минск : БГУ, 2001. – 231 с.
5. Лапиров, А. Г. Экологические группы растений водоемов / А. Г. Лапиров // Гидробиотаника: методология, методы : материалы школы по гидробиотанике. – Рыбинск : Рыбин. Дом печати, 2003. – С. 5–22.
6. Рыковский, Г. Ф. Флора Беларуси. Мохообразные : в 2 т / Г. Ф. Рыковский, О. М. Масловский. – Минск : Тэхналогія, 2009. – Т. 2. Нерауісорсіды – Sphagnopsida – 213 с.
7. Определитель высших растений Беларуси / ред. В. И. Парфенова. – Минск : Дизайн ПРО, 1999. – 472 с.
8. Красная книга Республики Беларусь: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений / редкол.: Л. И. Хоружик [и др.] – Минск : БелЭн, 2005. – 456 с.
9. Парфенов, В. И. Флора Белорусского Полесья / В. И. Парфенов. – Минск : Наука и техника, 1983. – 242 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.09.2017

Zerkal S.V., Shkuratova N.V. Floristic Composition of Higher Aquatic and Riparian Plants of the Basin of the Pripyat River within the City of Pinsk

In the article the results of studying the species composition of aquatic and littoral vegetation of the basin of the Pripyat river within the city of Pinsk. During systematization of the identified 98 species of higher aquatic and riparian plants, including 32 species of hydrophytes, hygrophytes – 66 species. In the waters of Pinsk identified the types of number in need of preventive protection, also installed the 5 habitat of protected species.



УДК 581.824

Н.М. Матусевич¹, М.П. Жигар²

¹канд. биол. наук, зав. каф. ботаники и экологии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. биол. наук, проф. каф. ботаники и экологии

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

**ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ АНАТОМИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ
КОРЫ ОДНОЛЕТНЕГО СТЕБЛЯ ДВУХ ВИДОВ КВИЛАХИ
(СЕМ. *ROSACEAE* JUSS.)**

Проведено сравнительное изучение анатомического строения коры однолетнего стебля двух видов из рода *Quillaja* – одного из примитивных родов подсемейства *Spiraeoideae* семейства *Rosaceae*: *Quillaja saponaria* L. и *Quillaja brasiliensis* L. Выявлено, что заложение первого феллогена у квилахи происходит в субэпидермальном слое коры, в то время как другим Спирейным свойственно более глубокое его залегание – в перicycle или в первичной флоэме. Отмечены и другие отличительные особенности коры квилахи, в числе которых формирование кристаллов в клетках феллемы, отсутствие колленхимы и эндодермы, наличие длинных стилоидов оксалата кальция в лубе, не встречающихся у других Спирейных, более сильная дилатация аксиальной паренхимы в лубе по сравнению с лучевой. Все эти аргументы говорят в пользу выделения *Quillaja* в отдельное подсемейство *Quillajoideae*.

Введение

Систематическое положение растений из рода *Quillaja* до сих пор вызывает разногласия среди разных авторов. В. Фоке [1], Г. Шульце-Менц [2], выделили в подсемействе *Spiraeoideae* трибу *Quillajaeae*. А.Л. Тахтаджян предлагает выделить *Quillaja* в отдельное подсемейство *Quillajoideae* [3; 4]. Д. Морган и другие сделали вывод, что *Quillaja* – вообще не член семейства *Rosaceae*, поскольку по некоторым признакам, например, по числу хромосом $x = 14$, она не подходит ни к какой группе в семействе Розоцветных [5].

Современная систематика растений для решения спорных вопросов широко использует достижения других наук: морфологии, анатомии, физиологии, карпологии и др. Поскольку кора стебля древесных растений включает в себя различные ткани как первичного происхождения (эпидерму, колленхиму, коровую паренхиму, кольцо первичных механических тканей, первичную флоэму), так и вторичные ткани (перидерму, вторичную флоэму), она содержит большое количество признаков, которые можно интерпретировать как диагностические, и анатомические особенности строения коры широко используются для решения вопросов систематики как голосеменных [6; 7], так и покрытосеменных растений [8–12].

Цель нашей работы – выявить признаки строения коры однолетнего стебля квилахи, которые являются диагностическими и могут быть использованы в решении вопроса о таксономическом статусе этих растений.

Материал и методы исследования

Нами было изучено анатомическое строение коры однолетних стеблей двух видов квилахи – квилахи мыльной (*Quillaja saponaria* L.) и квилахи бразильской (*Quillaja brasiliensis* L.).

По мнению Д. Хатчинсона (цит. по [13]), *Quillaja* и близкие роды представляют самую примитивную группу семейства *Rosaceae*, имеющую много общего с Дилление-



выми, от которых, как предполагают, произошли Розоцветные. Распространена *Quillaja* в горах Боливии, Перу и Чили.

Выполнение работы предусматривало сбор полевого материала, его фиксацию, изготовление временных и постоянных препаратов и их анализ. Материал для исследования был собран в Ботаническом институте РАН в ноябре месяце, когда камбий находился в недействительном состоянии и зафиксирован в смеси 96 %-го спирта и глицерина (1:1). Однолетние стебли квилахи брали с трех особей из нижней части кроны с южной стороны растения. Затем, после 10-дневной выдержки в фиксаторе, готовили постоянные препараты по общепринятой в анатомии растений методике [14]. Для этого фиксированный материал помещали в воду на 20–30 минут, чтобы спирт из материала диффундировал в растворитель.

Из верхних, средних и нижних междоузлий стебля готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов. Для постоянных препаратов их изготавливали на санном микротоме с замораживающим столиком, для изготовления временных препаратов срезы делали от руки с использованием лезвия и сердцевины бузины.

Срезы толщиной 10–30 мкм выполняли в поперечном и продольном радиальном и продольном тангентальном направлениях. Затем их помещали в сафранин на 20 минут, после чего переносили в нильский синий на 3 минуты. Далее срезы проводили через серию спиртов разных концентраций (50, 70, 96 % и абсолютный спирт). После этого срезы обрабатывали карболксиллом, ксиллом, затем заключали в канадский бальзам.

Анализ полученных препаратов проводили на световых микроскопах Биолам Л-212 и Биолам Р-15. Измерения осуществляли винтовым окулярным микрометром МОВ-1-15, визированным по объективной линейке.

Результаты исследования

Кора однолетнего стебля изученных видов квилахи включает в себя эпидерму, перидерму, первичную кору, кольцо механических тканей, первичную флоэму, вторичную флоэму.

Эпидерма состоит из одного слоя клеток, которые в поперечном сечении имеют округлые очертания, а их наружные периклиальные стенки несколько сводчатые. Оболочки клеток эпидермальной ткани утолщены неодинаково: более толстой у обоих видов является их внешняя периклиальная стенка, на поверхности которой располагается слой кутикулы. На радиальных срезах клетки имеют вытянутую прямоугольную форму у квилахи мыльной, а у квилахи бразильской – прямоугольную и квадратную форму с выпуклой внешней периклиальной стенкой. Размеры эпидермальных клеток: 13–16 мкм (тангентальный) и 8–9 мкм (радиальный) у квилахи мыльной, соответственно 10–13 мкм и 4–5 мкм у квилахи бразильской.

Виды отличаются также характером внутреннего содержимого эпидермальных клеток. Так, у квилахи мыльной оно уже в верхних междоузлиях стебля имеет темно-коричневую окраску, а у квилахи бразильской оно становится таковым лишь в клетках эпидермы нижних, более старых междоузлий, а в верхних и средних участках стебля внутреннее содержимое клеток эпидермы является светлоокрашенным.

Эпидермальные клетки *Quillaja saponaria* имеют выросты – волоски, длина которых достигает 50 мкм. Они кроющего типа, одноклеточные, их вершины заостренные. Клеточные оболочки этих трихом утолщенные, поверхность их неровная и показывает по всей длине некоторую скульптурированность. Располагаются трихомы пер-



пендикулярно поверхности органа, иногда верхушка волоска наклонная. Эпидерма *Quillaja brasiliensis* опушения не имеет.

Субэпидермально залегает перидерма. Она типичного строения, т.е. имеет в своем составе феллему, феллоген и феллодерму. В составе пробковой ткани у квилахи мыльной в одном радиальном ряду находится 5–6 слоев клеток, у квилахи бразильской – до 4 слоев. В поперечном сечении клетки феллемы имеют различную форму даже у одного вида, т.е. феллема гетерогенная по форме клеток. По внутреннему клеточному содержимому она также гетерогенная. Так, наружные три – четыре слоя клеток пробки смятые, с извилистыми очертаниями клеток, с темно-коричневым клеточным содержимым. Клетки внутренних слоев феллемы живые, бесцветные, у квилахи бразильской – выпукло-прямоугольной формы, а у квилахи мыльной они квадратные, прямоугольные, вытянутые в тангентальном и радиальном направлениях, с извилистыми стенками. На продольных срезах их очертания прямоугольные, вытянутые по оси органа, и квадратные, с извилистыми оболочками (у квилахи бразильской); у квилахи мыльной клетки пробки прямоугольные, вытянутые по оси и радиусу стебля, а также квадратные и округло-квадратные, с извилистыми очертаниями.

Оболочки клеток пробки слегка и равномерно утолщены у обоих видов. В некоторых клетках этой ткани имеются округлые на поперечных и продольных срезах образования. Подобные структуры были отмечены в феллеме *Echorda* и интерпретированы как кристаллы [15]. Можно предположить, что отмеченные структуры у *Quillaja* – это ранняя стадия формирования кристаллов.

Феллоген однослойный характеризуется всеми признаками строения, присущими меристематическим тканям. Расположенная ниже феллодерма у квилахи мыльной представлена также одним слоем клеток, а у квилахи бразильской – 2–3 слоями. Клетки феллодермы в поперечном сечении имеют прямоугольную (у квилахи мыльной) и узко-прямоугольную (у квилахи бразильской) форму. Клеточные оболочки у этой ткани утолщенные у первого вида и тонкие у второго.

Формирование перидермы у обоих видов происходит по-разному. У квилахи бразильской она закладывается сначала только в одном участке стебля, на месте будущей чечевички. В средних междоузлиях однолетнего стебля перидерма сформирована уже примерно у половины его окружности, а другая половина остается покрытой эпидермой. Лишь в нижних междоузлиях стебель покрыт перидермой на всей своей поверхности. У квилахи мыльной кольцо ткани перидермы закладывается одновременно по всей окружности однолетнего стебля.

Под перидермой располагается первичная кора. Она состоит только из клеток коровой паренхимы. У *Quillaja brasiliensis* в ее составе находится 8–10 слоев клеток, у *Quillaja saponaria* их 5–6.

В поперечном сечении клетки коровой паренхимы имеют овальную, вытянутую в тангентальном направлении форму, у квилахи мыльной они несколько сдавлены, поэтому имеют извилистые очертания. На продольных срезах клетки овально-прямоугольные и округло-квадратные у квилахи бразильской, а у квилахи мыльной внешние слои ткани сложены узкими овально-прямоугольными клетками и отличаются от внутренних слоев, состоящих из квадратных по форме клеток.

Первичная кора у *Quillaja brasiliensis* гомогенная, клетки ее с тонкими оболочками, у *Quillaja saponaria* – гетерогенная и включает, помимо тонкостенных паренхимных, более крупные и темноокрашенные клетки с утолщенными оболочками. В них происходит синтез сапонинов.



У обоих видов квилахи среди паренхимных клеток первичной коры имеются одиночные склереиды. Их клетки вытянуты и вдоль, и поперек оси органа. У квилахи бразильской они развиты в большем количестве, чем у квилахи мыльной. У обоих видов обнаружены также друзы оксалата кальция, а у квилахи бразильской, помимо друз, имеются и стилоиды.

Самый внутренний слой первичной коры у *Quillaja saponaria* отличается более крупными размерами его клеток, темной окраской их внутреннего клеточного содержимого, и эту ткань можно интерпретировать, по-видимому, как эндодерму. В коре квилахи бразильской хорошо различимой эндодермы нет.

Глубже первичной коры располагается кольцо механических тканей. Оно у обоих видов квилахи сплошное, гетерогенное, сложено волокнами и склереидами. Ширина его по всей его окружности более–менее равная. Группы волокон склеренхимы на поперечном срезе у квилахи бразильской имеют овальные очертания, у квилахи мыльной – овальные и четырехугольные. Клеточные оболочки волокон и склереид у *Quillaja brasiliensis* слабо одревесневшие, у *Quillaja saponaria* лигнификация склеренхимных клеток слабая, а у склереид – очень сильная. На радиальных срезах склереиды отличаются также и по форме клеток: у квилахи бразильской они овальные и удлинненно-овальные, а у квилахи мыльной склереиды имеют квадратную форму. В поперечном сечении волокон у первого вида преобладают овальные и округлые, реже 5-угольные очертания, у второго вида – 4–5-угольные. Кристаллоносная обкладка механического кольца у обоих видов отсутствует.

Первичная флоэма плохо отличима от вторичной флоэмы, так как в результате дилатации запасающих клеток и облитерации проводящих элементов она имеет вид гомогенной паренхимной ткани.

Вторичная флоэма состоит из проводящих и паренхимных элементов. На поперечном срезе у обоих видов квилахи ситовидные трубки собраны в нечетко выраженные радиальные ряды, часть ситовидных трубок у квилахи бразильской образует короткие тангентально ориентированные цепочки. Среди проводящих элементов без видимой закономерности располагаются клетки аксиальной паренхимы. У обоих видов во флоэме преобладают проводящие элементы, они имеют большие размеры поперечника, чем клетки аксиальной паренхимы. На поперечном срезе тангентальный размер ситовидных трубок у квилахи мыльной 14–17 мкм и 11–13 мкм у квилахи бразильской, радиальный размер соответственно 8–10 мкм и 10–11 мкм.

В поперечном сечении ситовидные трубки имеют разнообразную форму: округлую, овальную, прямоугольную, вытянутую в тангентальном направлении, иногда очертания их извилистые. Длина члеников ситовидных трубок у *Quillaja saponaria* – 100–140 мкм, у *Quillaja brasiliensis* – 180–230 мкм. Их поперечные оболочки по отношению к продольным стенкам наклонные, ситовидные пластинки простые.

Клетки аксиальной паренхимы вторичной флоэмы содержат большое количество кристаллов щавелевокислого кальция. У квилахи бразильской это стилоиды разной формы (очень длинные, узкие, заостренные с одной или двух сторон), широкие кристаллы уплощенной формы, короткопризматические, имеющие вид параллелепипеда, а у квилахи мыльной, кроме указанных, отмечены также кристаллы ромбической формы.

Флоэмные лучи однорядные и двурядные, гетероцеллюлярные. Клетки их тонкостенные. Высота лучей – 350–400 мкм, ширина – до 65–80 мкм. Слоистость сердцевинных лучей – до 15 клеток (у *Quillaja brasiliensis*) и до 25 клеток у *Quillaja saponaria*.



На 1 мм² тангентальнага среза знаходзіцца да 60 лучей. Яны слаба дилатируюць, больш выразна дилатацыя клетак аксіальнай парэнхімы.

Заклученне

Род *Quillaja* – адзін з самых примітывных родаў сямейства *Rosaceae*. Наряду з другімі примітывнымі родамі (*Kageneckia*, *Vauquelinia*, *Exochorda*) яны яўляюцца, по-відому, последнімі реліктамі, маюць мало агульнага з другімі родамі сямейства *Rosaceae*.

Среди разных авторов имеются большие разногласия по систематическому положению рода *Quillaja*. Для решения спорных вопросов систематики привлекаются данные многих наук, в том числе и анатомии растений, в частности, данные по анатомическому строению коры однолетнего стебля [6–12]. Поскольку гистологический состав коры отличается значительным многообразием, содержит в себе ткани как первичного, так и вторичного происхождения, этот сложный тканевый комплекс обладает большим набором диагностических признаков и может быть с успехом использован для решения вопросов филогении и таксономии.

В анатомическом строении коры изученных представителей рода *Quillaja*, в отличие от других представителей подсемейства *Spiraeoideae*, имеются специфические особенности. Это своеобразный гистологический состав и топография тканей коры; заложение первого феллогена в субэпидермальном слое; отсутствие эндодермы и колленхимы в составе коры; гетерогенная феллема, наличие в ее клетках кристаллов и равномерное утолщение ее клеточных стенок; наличие склерид в коровой паренхиме; сплошное гетерогенное кольцо механических тканей и отсутствие у него кристаллоносной обкладки; дилатация клеток аксиальной паренхимы и слабая дилатация сердцевинных лучей; развитие однорядных и двурядных сердцевинных лучей; развитие стилоидов в лубе.

В подсемействе Спирейные на основе признака топографии тканей выделяются несколько типов строения коры, что свидетельствует о разнообразии ее анатомического строения [10], и по этому признаку (топография тканей коры стебля) отмечено соответствие выделенным ботаниками в составе подсемейства *Spiraeoideae* трибам, в том числе выделение трибы *Quillajae*. Однако заложение первого феллогена у квилахи происходит в субэпидермальном слое, в то время как другим Спирейным свойственно более глубокое его залегание – в перицикле или в первичной коре [9; 10]. Имеется целый ряд других отличительных особенностей коры квилахи, в числе которых можно отметить: отсутствие колленхимы и эндодермы, гетерогенную феллему, наличие кристаллов в ней и равномерное утолщение оболочек ее клеток, наличие склерид в коровой паренхиме, сплошное гетерогенное кольцо механических тканей и отсутствие у него кристаллоносной обкладки, своеобразную форму кристаллов в аксиальной паренхиме в виде стилоидов, которая не встречается ни у одного из изученных представителей Спирейных. Считаем, что род *Quillaja* на основе данных по анатомии коры однолетнего стебля заслуживает повышения его таксономического ранга до уровня самостоятельного подсемейства *Quillajoideae* в составе семейства *Rosaceae*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Focke, W. O. *Rosaceae* / A. Engler, K. Prantl. Die natürlichen Pflanzenfamilien. – Leipzig, 1894. – Т. 3, Abt. 3. – S. 1–61.



2. Schulze-Menz, G. K. Rosaceae / A. Engler // Syllabus der Pflanzenfamilien. – 13 Aufl. – Berlin, 1964. – Bd. 2. – S. 209 – 218.
3. Тахтаджян, А. Л. Система магнолиофитов / А. Л. Тахтаджян. – Л. : Наука, 1987. – 439 с.
4. Takhtajan, A. Diversity and classification of flowering plants / A. Takhtajan. – New York, 1997. – 643 p.
5. Morgan, D. Systematic and evolutionary implications of rbcL-sequence variation in Rosaceae / D. Morgan, D. Soltis, K. Robertson // Amer. J. Bot. – 1994. – Vol. 81, № 7. – P. 890–903.
6. Лотова, Л. И. Анатомия коры хвойных / Л. И. Лотова. – М. : Наука, 1987. – 150 с.
7. Еремин, В. М. Сравнительная анатомия коры сосновых : дис. ... д-ра биол. наук : 03.00.05 / В. М. Еремин. – Воронеж, 1983. – 630 л.
8. Бойко, В. И. Анатомическое строение коры видов семейства Ericaceae D. C. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / В. И. Бойко. – Воронеж, 1996. – 26 с.
9. Lotova, L. I. Anatomy of cortex and secondary phloem of Rosaceae. 3. Quillajoideae / L. I. Lotova, A. C. Timonin // Ботан. журн. – 1999. – Т. 84, № 2. – С. 34–41.
10. Матусевич, Н. М. Таксономический анализ древесных представителей семейства Rosaceae по признакам анатомической структуры коры их однолетних стеблей : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Н. М. Матусевич. – Минск, 2005. – 21 с.
11. Шкуратова, Н. В. Сравнительная анатомия коры представителей сем. *Salicaceae* Mirb. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Н. В. Шкуратова. – Минск, 2005. – 21 с.
12. Котина, Е. Л. Сравнительно-анатомическое изучение коры представителей сем. *Agaliaceae* Durande и близких таксонов : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Е. Л. Котина. – СПб, 2008. – 20 с.
13. Гладкова, В. Н. Порядок Розовые или Розоцветные (Rosales) / В. Н. Гладкова // Жизнь растений : в 6 т. – М. : Просвещение, 1974–1982. – Т. 5, кн. 2. – 1981. – С. 175–189.
14. Прозина, М. Н. Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – М. : Высш. шк., 1960. – 206 с.
15. Лотова, Л. И. Анатомия коры *Echordia* в связи с положением рода в системе сем. Rosaceae / Л. И. Лотова, А. К. Тимонин // Проблемы ботаники на рубеже XX–XXI веков : тез. докл. II (X) съезда Рус. ботан. об-ва. – СПб., 26–30 мая 1998. – СПб, 1998. – С. 51.

Matusevich N.M., Zigar M.P. Distinctive Features of the Anatomical Structure of the Cortex of the Annual Stem of Two Species of Quillaja (Family Rosaceae Juss.)

A comparative study was made of the anatomical structure of the cortex of the annual stem of two species of the genus Quillaja, one of the primitive genera of the subfamily Spiraeoideae of the family Rosaceae-Quillaja saponaria L. and Quillaja brasiliensis L. It was revealed that the laying of the first phallogen in quillaja occurs in the subepidermal layer of the cortex, while the other Spiraeoideae is characterized by a deeper layer of it - in the pericyte or in the primary phloem. In addition, other distinctive features of the Quillaja crust have been noted, including the formation of crystals in the cells of the fallum, the presence of a specific form of long calcium oxalate styloids in the brow that do not occur in other Spiraeoideae, a stronger dilatation of the axial parenchyma in the bast in comparison with the radial. All these arguments speak in favor of isolating Quillaja into a separate subfamily of Quillajoideae.



УДК 911.9:556.55

О.В. Токарчук¹, С.М. Токарчук²

¹канд. геогр. наук, доц., доц. каф. географии и природопользования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

²канд. геогр. наук, доц., доц. каф. географии и природопользования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕКРЕАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ БРЕСТСКОЙ ОБЛАСТИ

Описывается методика исследования, которая включает три основных блока: оценку потенциала водных рекреационных ресурсов; оценку факторов, лимитирующих использование водных рекреационных ресурсов; интегральную геоэкологическую оценку рекреационного потенциала водных объектов Брестской области. Приводятся результаты исследования. Описываются особенности географии рекреационного потенциала водных объектов в разрезе административных районов. Раскрывается соотношение районов области по потенциалу водных рекреационных ресурсов и факторам, лимитирующих использование водных объектов в рекреации.

Введение

Водные ресурсы являются одним из самых востребованных и жизненно необходимых видов природных ресурсов. Их особенностью является многоаспектность хозяйственного использования. Изучение и описание водных объектов каждой отдельно взятой территории позволяет определить их значение и хозяйственный потенциал.

Особую актуальность представляет изучение рекреационного потенциала водных объектов, т.е. возможности использования рек, озер, водохранилищ и других водных объектов отдельных территорий для организации отдыха людей. Для наиболее полного удовлетворения потребностей населения в различных видах рекреационной деятельности без ущерба для экологического состояния водоемов и водотоков необходимо изучать особенности их территориального распределения, возможности использования в том или ином виде отдыха, а также их экологическое состояние [1; 4; 7–10].

Наиболее распространенными видами отдыха на побережье водных объектов суши в летний период являются купание, принятие солнечных и воздушных ванн, парусный и водно-моторный спорт, катание на лодках и водных лыжах. При этом важнейшими характеристиками рекреационного потенциала водных объектов являются площадь распространения, территориальная однородность, период возможной эксплуатации, возможность разнонаправленного использования.

Рекреационный потенциал водных объектов может оцениваться для территориальных единиц различного ранга (страны, административных областей, речных бассейнов и т.д.) [4; 7; 8; 10]. При этом необходимо учитывать существенные различия количественных, режимных и качественных характеристик водных объектов: морей, озер, рек, водохранилищ, прудов [6; 7; 9]. Важно также обращать внимание на основные аспекты использования и охраны водных объектов.

Сопряженное изучение водных объектов Брестской области и их рекреационного потенциала позволяют обосновать наиболее благоприятные места для отдыха на водах, а также способствовать выработке мер для сохранения водных объектов в пригодном для рекреации виде.



Материал и методика исследования

Целью исследования являлась геоэкологическая оценка рекреационного потенциала водных объектов Брестской области.

Под *рекреационным потенциалом водных объектов* понималась совокупность компонентов природы, их свойств и отдельных параметров, которая позволяет наиболее полно удовлетворить потребности населения в различных видах рекреационной деятельности без ущерба для экологического состояния водоемов и водотоков. На их количество и качество влияют различные факторы, связанные в основном с хозяйственной деятельности человека. Зачастую некоторые негативные факторы ограничивают использование водных ресурсов в рекреационной деятельности. Изучение и оценка этих лимитирующих факторов и рекреационного потенциала позволяют определить наиболее благоприятные места для отдыха, а также обеспечить безопасность населению.

При выполнении исследования в качестве территориальных единиц оценки использовались *административные районы* Брестской области. Выбор административных районов был обусловлен тем, что сетка административного деления отвечает таким требованиям, как однозначность выделения границ, возможность повторения и контроля ее границ, надежность получения объективной и всесторонней информации, достаточная для целей исследования дробность деления.

Геоэкологическая оценка рекреационного потенциала водных объектов Брестской области (на уровне административных районов) состояла из трех блоков, представленных на рисунке 1.

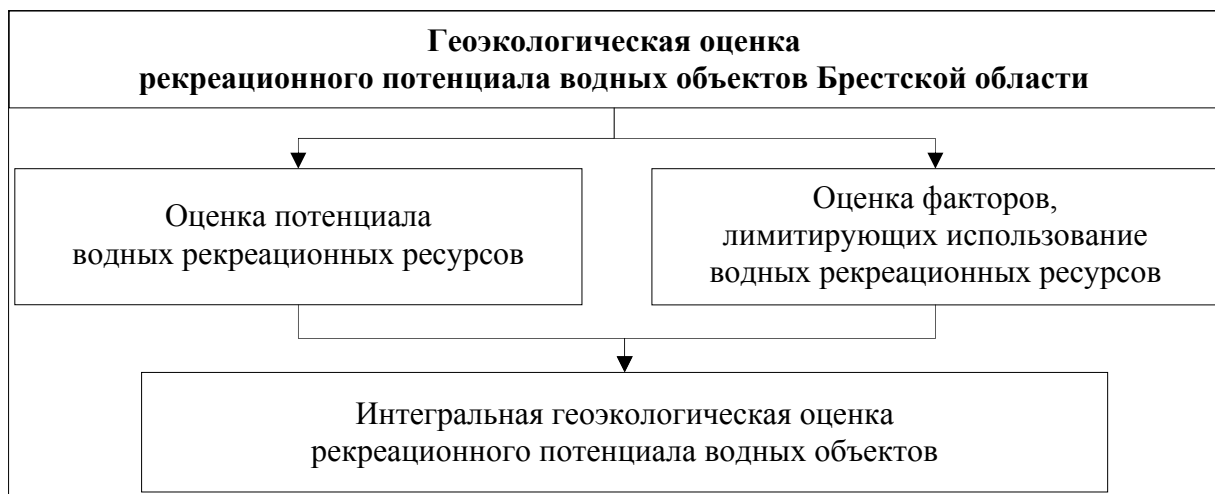


Рисунок 1. – Структура геоэкологической оценки рекреационного потенциала водных объектов административных районов Брестской области

Для каждого блока оценки была разработана собственная структура и выбраны необходимые показатели, которые представлены в таблицах 1 и 2.

Поскольку исходные данные, являющиеся основой для расчета комплексных и интегральных показателей, выражаются в разных единицах измерения, при выполнении оценки ставилась задача их приведения к сопоставимым показателям, с которыми возможны математические действия. В качестве наиболее оптимального в данном случае рассматривалось применение балльного ранжирования.



Таблица 1. – Структура оценки потенциала водных рекреационных ресурсов

Критерий		Показатель					
1	Реки	1.1	Густота речной сети, км/км ²				
		1.2	Величина речного стока, млн м ³				
2	Водоемы	2.1	Озера	2.1.1	Количество озер		
				2.1.2	Площадь зеркала озер, км ²		
		2.2	Водохранилища	2.2.1	Количество водохранилищ		
				2.2.2	Площадь зеркала водохранилищ, км ²		
		2.3	Пруды	2.3.1	Количество прудов		
				2.3.2	Площадь зеркала прудов, км ²		
3	Подземные воды	3.1	Пресные воды	3.1.1	Родники	3.1.1.1	Количество родников
				3.1.2	Подземные пресные воды	3.1.2.1	Количество месторождений пресных подземных вод
						3.1.2.2	Дебит скважин пресных подземных вод, тыс. м ³ /сут.
				3.2	Минеральные воды	3.2.1	Количество заводов разлива минеральных подземных вод

Таблица 2. – Структура и показатели геоэкологической оценки факторов, лимитирующих использование водных рекреационных ресурсов административных районов Брестской области

Критерий		Показатель	
1	Загрязнение поверхностных вод	1.1	Сброс сточных вод в реки, озера и водохранилища, тыс. м ³
2	Водопользование	2.1	Использование воды
		2.2	Добыча (изъятие) воды из природных поверхностных источников
3	Мелиоративная освоенность территории	3.1	Удельный вес осушенных земель в общей площади района, %
4	Уровень применения удобрений	4.1	Внесение минеральных удобрений, кг/га пашни
		4.2	Внесение органических удобрений, кг/га пашни
5	Уровень нагрузки животноводства	5.1	Численность КРС, голов
		5.2	Численность свиней, голов

Для геоэкологической оценки рекреационного потенциала водных объектов Брестской области была использована пятибалльная оценочная шкала. Данный выбор опирался на два основных положения. Во-первых, некоторые показатели, используемые при проведении оценки, не отличаются большой вариативностью, т.е. оцениваемые характеристики довольно однообразны и мало изменяются в пределах региона.



Поэтому использование шкал с большим числом ступеней лишь затруднило бы процесс оценки. Во-вторых, Брестская область включает 16 административных районов, поэтому пятиступенчатые итоговые классификации являются достаточно репрезентативными.

В качестве источников исходной информации для проведения геоэкологической оценки рекреационного потенциала водных объектов были использованы картографические материалы [5], статистические данные [2], материалы интернет-ресурсов, литературные источники [2; 3; 7], фондовые данные Брестского областного комитета природных ресурсов и охраны окружающей среды.

Результаты и их обсуждение

Оценка потенциала водных рекреационных ресурсов Брестской области включала три части: оценку потенциала водотоков, водоемов и подземных вод, – и проводилась с использованием показателей, представленных в таблице 1. Итоговые результаты оценки потенциала водных рекреационных ресурсов Брестской области показаны на рисунке 2.

Из представленной картосхемы видно, что большинство районов Брестской области характеризуются средними показателями потенциала водных рекреационных ресурсов. Наибольшие значения потенциала наблюдаются в Брестском, Барановичском и Пинском районах. Очень низким потенциалом водных рекреационных ресурсов обладают Жабинковский и Малоритский районы.



Рисунок 2. – Оценка потенциала водных рекреационных ресурсов Брестской области

Районы Брестской области по уровню потенциала водных рекреационных ресурсов с учетом структуры оценочного исследования можно разделить на три группы:

1. *Районы с очень низким и низким показателем величины потенциала водных рекреационных ресурсов.* К данной группе относится пять районов: Малоритский, Жабинковский, Столинский, Ляховичский и Ганцевичский. Данные районы характеризу-



ются малой площадью и достаточно компактной территорией. Жабинковский и Малоритский районы расположены на юго-западе области и характеризуются средними показателями речной обеспеченности и очень низкими показателями величины потенциала водоемов и подземных вод.

Столинский, Ляховичский и Ганцевичский районы, расположенные на востоке Брестской области, обладают низкими показателями величины потенциала водоемов и подземных вод и средними показателями величины потенциала рек.

2. *Районы со средним показателем величины потенциала водных рекреационных ресурсов.* К данной группе относится также пять районов, из которых четыре расположены в западной и центральной частях области и один район – Лунинецкий – на востоке. Для них характерны разные сочетания результатов оценки потенциала рек, водоемов и подземных вод. Так, в Лунинецком, Пружанском и Кобринском районах показатели потенциала рек имеют высокие значения, а подземных вод – низкие и очень низкие. В то же время в Каменецком и Дрогичинском районах показатели потенциала подземных вод выше среднего.

3. *Районы с высоким и очень высоким показателем величины потенциала водных рекреационных ресурсов.* К этой группе относятся Березовский, Ивановский и Ивацевичский районы. Для этих трех районов характерны низкие показатели величины потенциала подземных вод и высокие показатели рек и водоемов, что обусловлено наличием больших по площади озер и густой естественной речной сетью районов.

Для Брестского, Барановичского и Пинского районов характерны очень высокие общие интегральные показатели величины потенциала водных рекреационных ресурсов. Для Пинского района все интегральные промежуточные показатели отмечаются высокими значениями.

Таким образом, наибольшим потенциалом организации водного туризма отличаются шесть районов области, расположенных в центральной части области.

Оценка факторов, лимитирующих использование водных рекреационных ресурсов Брестской области, включала пять основных блоков (загрязнение поверхностных вод, водопользование, мелиоративная освоенность территории, уровень применения удобрений, уровень нагрузки животноводства) и проводилась с использованием показателей, представленных в таблице 2.

Итоговые результаты оценки факторов, лимитирующих использование водных ресурсов административных районов Брестской области в рекреационной деятельности представлены на рисунке 3.

Согласно представленной картосхеме, можно сказать, что для абсолютного большинства районов характерны низкие интегральные значения факторов, лимитирующих использования водных ресурсов в рекреации. Только в Лунинецком районе отмечаются средние значения факторов; для трех районов Брестской области (Пинский, Березовский и Ганцевичский) интегральные значения факторов, лимитирующих использования водных ресурсов в рекреации, – выше средних.

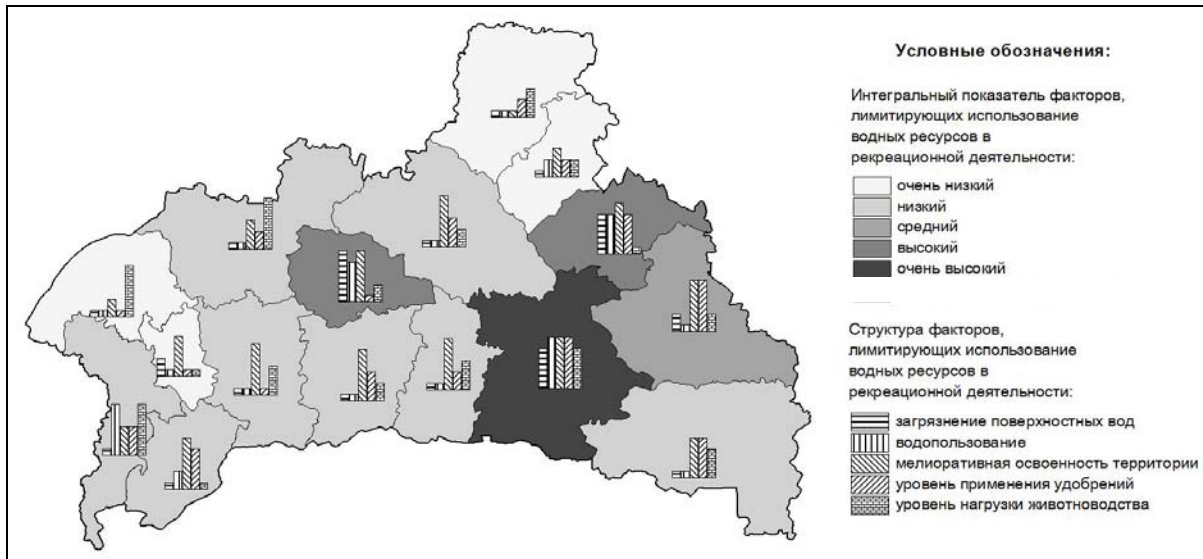


Рисунок 3. – Оценка факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности

Районы Брестской области по интегральному значению факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреации с учетом структуры оценочного исследования, можно разделить на три группы:

1. *Районы с низким и очень низким значением факторов, ограничивающих использование водных ресурсов в рекреационной деятельности.* К данной группе относится большинство (12) районов области. Все эти районы характеризуются низкими показателями водопользования и загрязнения поверхностных вод. В Брестском, Каменецком и Пружанском районах, расположенных на западе области, отмечается повышенный уровень нагрузки животноводства. А для центральных и южных районов области (Ивацевичский, Кобринский, Дрогичинский, Ивановский) характерна высокая мелиоративная освоенность территории.

2. *Районы со средним значением факторов, ограничивающих использование водных ресурсов в рекреационной деятельности.* Это один район Брестской области – Лунинецкий. Основными факторами, ограничивающими здесь использование водных ресурсов в рекреации, являются высокий уровень мелиоративной освоенности территории и применения удобрений. К нежелательным последствиям мелиорации можно отнести обмеление рек, дефицит водных ресурсов, загрязнение вод. Избыточное содержание нитратов, фосфатов и других химических соединений существенно ухудшает качество поверхностных вод и, соответственно, ограничивает их использование в целях рекреации.

3. *Районы с высоким и очень высоким значением факторов, ограничивающих использование водных ресурсов в рекреационной деятельности.* К данной группе относятся 3 района: Пинский, Березовский и Ганцевичский. В Пинском районе все факторы, ограничивающие использование водных ресурсов в рекреации, имеют значения выше средних. Березовский район характеризуется низкими показателями только для уровня применения удобрений и уровня нагрузки животноводства, а для Ганцевичского района характерен низкий уровень только для нагрузки животноводства, в то время как другие показатели для данных районов – выше среднего уровня.

Итоговые результаты *интегральной оценки рекреационного потенциала водных объектов Брестской области* представлены на рисунке 4.

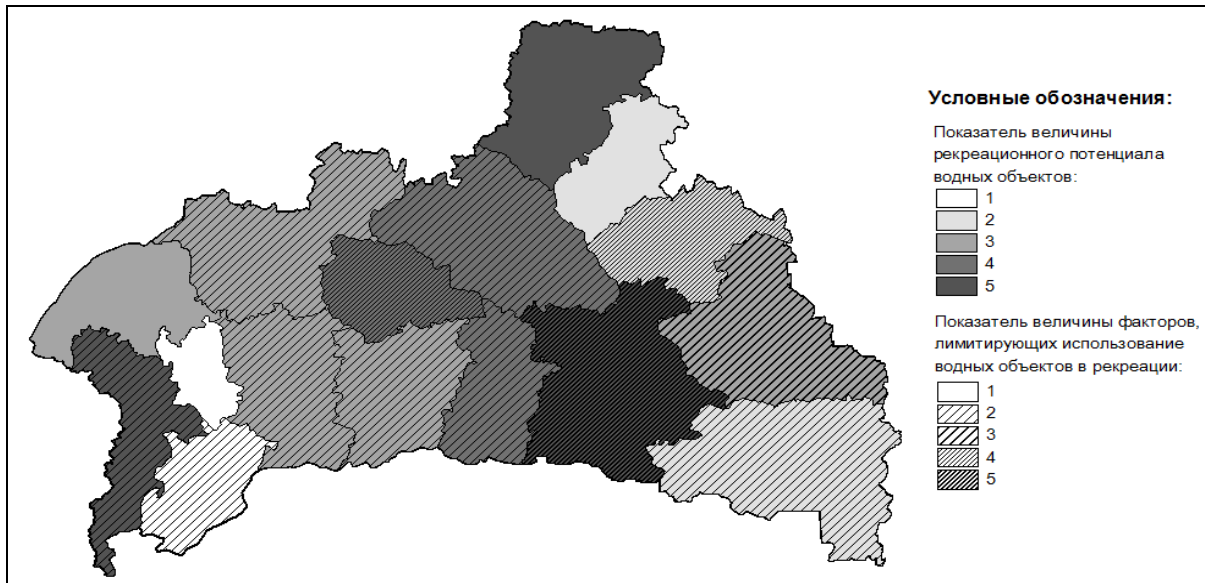


Рисунок 4. – Интегральная геоэкологическая оценка рекреационного потенциала водных объектов Брестской области

Анализ потенциала водных рекреационных ресурсов и факторов, лимитирующих их использование, позволил выделить следующие группы районов Брестской области по значениям рекреационного потенциала водных объектов:

- 1) *районы с очень низким рекреационным потенциалом водных объектов* и низкими и очень низкими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Жабинковский, Малоритский);
- 2) *районы с низким рекреационным потенциалом водных объектов:*
 - а) низкими и очень низкими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Ляховичский, Столинский);
 - б) высокими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Ганцевичский).
- 3) *районы со средним рекреационным потенциалом водных объектов:*
 - а) низкими и очень низкими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Каменецкий, Пружанский, Кобринский, Дрогичинский);
 - б) средними показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Лунинецкий);
- 4) *районы с высоким рекреационным потенциалом водных объектов:*
 - а) низкими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Ивановский, Ивацевичский);
 - б) высокими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Березовский);
- 5) *районы с очень высоким рекреационным потенциалом водных объектов:*
 - а) низкими и очень низкими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Брестский, Барановичский);
 - б) очень высокими показателями величины факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреационной деятельности (Пинский).



Исходя из данной группировки районов Брестской области, а также данных, представленных в таблицах 3 и 4, можно отметить, что наибольшим рекреационным потенциалом водных объектов обладают два района – Барановичский и Брестский. Высокие показатели обеспеченности водными ресурсами в сочетании с низкими показателями факторов, которые лимитируют их использование, позволяют беспрепятственно организовывать рекреационную деятельность в данных районах. Высоким рекреационным потенциалом также обладают Ивановский и Ивацевичский районы. Ограничивающими факторами в них являются только низкий потенциал подземных вод и высокая мелиоративная освоенность территории, в остальном же районы являются благоприятными для использования их в рекреации.

Таблица 3. – Матрица соотношения районов Брестской области по потенциалу водных рекреационных ресурсов и факторам, лимитирующим использование водных объектов в рекреации, количество районов / доля от общей площади, %

Потенциал			А	Б	В	Г	Д	Итого
			очень низкий	низкий	средний	высокий	очень высокий	
Лимитирующие факторы								
1	очень низкий		1 / 2,07	1 / 4,12	1 / 5,12		1 / 6,7	4 / 18,01
2	низкий		1 / 4,14	1 / 10,18	3 / 20,4	2 / 13,84	1 / 4,7	8 / 53,26
3	средний				1 / 8,26			1 / 8,26
4	высокий			1 / 5,21		1 / 4,39		2 / 9,6
5	очень высокий						1 / 9,94	1 / 9,94
Итого			2 / 6,21	3 / 19,51	5 / 33,78	3 / 18,23	3 / 21,34	16 / 100

Таблица 4. – Матрица типизации районов Брестской области по потенциалу водных рекреационных ресурсов и факторов, лимитирующих использование водных объектов в рекреации

Потенциал			А	Б	В	Г	Д
			очень низкий	низкий	средний	высокий	очень высокий
Лимитирующие факторы							
1	очень низкий		Жабинковский	Ляховичский	Камянецкий		Барановичский
2	низкий		Малоритский	Столинский	Пружанский, Кобринский, Дрогичинский	Ивановский, Ивацевичский	Брестский
3	средний				Лунинецкий		
4	высокий			Ганцевичский		Березовский	
5	очень высокий						Пинский

Абсолютное большинство районов Брестской области характеризуются весьма благоприятной ситуацией и, следовательно, обладают большим потенциалом использования водных ресурсов в рекреационной деятельности. Исключение составляют только



два района области (Малоритский и Ганцевичский), в пределах которых необходимы мероприятия по улучшению состояния водных объектов и прилегающих территорий, что позволит в дальнейшем в большей степени использовать их водные ресурсы в рекреации. Основываясь на результатах типизации районов Брестской области, выполненной по итогам интегральной геоэкологической оценки рекреационного потенциала водных объектов (рисунки 5, 6), можно отметить наиболее благоприятные районы для ор-

потенциал		А	Б	В	Г	Д
		очень низкий	низкий	средний	высокий	очень высокий
лимитирующие факторы	1 очень низкий					
	2 низкий					
	3 средний					
	4 высокий					
	5 очень высокий					

Возможность использования водных объектов в рекреационной деятельности:

очень низкая
 низкая
 средняя
 высокая
 очень высокая

Рисунок 5. – Матрица типизации районов Брестской области по благоприятности использования водных объектов в рекреационной деятельности

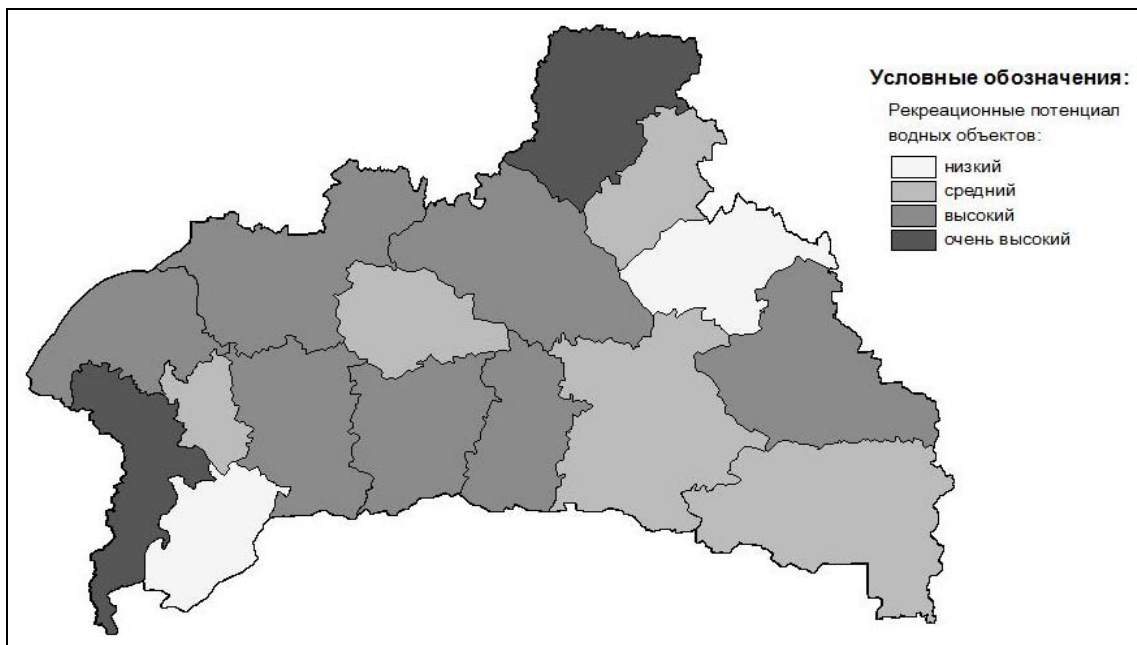


Рисунок 6. – Рекреационный потенциал водных объектов Брестской области

ганизации рекреационной деятельности. Районов с очень низким рекреационным потенциалом в области нет. Два района (Малоритский и Ганцевичский) обладают низким рекреационным потенциалом. Средний потенциал имеют 5 районов: небольшие по пло-



щади Жабинковский и Березовский и крупные районы юго-восточной части области (Пинский, Столинский и Лунинецкий). Большинство районов имеют высокий рекреационный потенциал водных объектов. Наиболее благоприятными для организации рекреационной деятельности являются Брестский и Барановичский районы.

Заклучение

Оценка потенциала водных рекреационных ресурсов, оценка факторов, лимитирующих использование водных рекреационных ресурсов, а также интегральная геоэкологическая оценка рекреационного потенциала водных объектов Брестской области показали достаточно заметные различия ее административных районов. Результаты исследования могут быть использованы в целях планирования и оптимизации мероприятий, направленных на использование рекреационного потенциала водных объектов области и их охраны, а также в качестве основы для более детального изучения рассматриваемой проблематики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Ю. С. Использование водоемов и рек в целях рекреации / Ю. С. Васильев, В. А. Кукушкин. – Л. : Гидрометеиздат, 1988. – 229 с.
2. Водные ресурсы Брестской области / А. А. Волчек [и др.]. – Минск : Изд. центр БГУ, 2002. – 440 с.
3. Геаграфія Брэсцкай вобласці / С. В. Арцеменка [і інш.] ; пад. рэд. С. В. Арцёменкі, А. У. Грыбко. – Мінск : Выд. цэнтр БДУ, 2002. – 388 с.
4. Каширо, М. А. Влияние экологического состояния водных объектов на рекреационный потенциал городской территории (на примере г. Томска) / М. А. Каширо // Вестн. Том. гос. ун-та. – 2010. – № 333. – С. 177–180.
5. Нацыянальны атлас Беларусі / Камітэт па зямельных рэсурсах, геадэзіі і картаграфіі пры Савеце Міністраў Рэсп. Беларусь. – Минск, 2002. – 292 с.
6. Пирожник, И. И. Основы географии туризма и экскурсионного обслуживания : учеб. пособие / И. И. Пирожник. – Минск : Университетское, 1985. – 253 с.
7. Потаев, Г. А. Рекреационные ресурсы Беларуси: современное состояние, проблемы и перспективы использования / Г. А. Потаев // Природ. ресурсы. – 2000. – № 3. – С. 85–102.
8. Решетникова А. Н. Экологические проблемы рекреационного водопользования в Беларуси / А. Н. Решетникова // Региональные проблемы социально-экономической географии : тез. докл. Респ. науч. конф., Минск, 28–30 нояб. 2002 г. / отв. ред. И. И. Пирожник. – Минск : БГУ, 2002. – С. 223–226.
9. Шевцова, Н. С. Научно-методические подходы к проблеме оценки природно-рекреационного потенциала озер / Н. С. Шевцова // Природ. ресурсы. – 2003. – № 2. – С. 11–20.
10. Шевцова, Н. С. Функциональное туристско-рекреационное зонирование малых и средних рек Брестской области / Н. С. Шевцова // Природ. ресурсы. – 2015. – № 2. – С. 107–116.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.09.2017

Tokarchuk O.V., Tokarchuk S.M. Geoeological Assessment of the Recreational Potential of Water Bodies in the Brest Region

The article reveals author's approaches and the result of geoeological assessment of the recreational potential of water bodies in the Brest region. The paper discloses methodology, which includes three main blocks: an assessment of the potential of recreational water resources; assessment of the factors that limit the use of recreational water resources; an integrated geoeological assessment of the recreational potential of water bodies in the Brest region. The article describes the features of the geography of the recreational potential of water bodies within the boundaries of administrative districts. The study shows the correlation of the districts's areas based on the potential of recreational water resources and the factors that limit the use of water bodies in recreation.

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія зборніка навуковых прац разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc; *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *С.Ф. Бут-Гусаім, К.М. Мароз, Л.М. Калілец*
Камп'ютарнае макетаванне *С.М. Мініч, Г.Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 28.12.2017. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.
Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 16,28. Ул.-выд. арк. 12,72.
Тыраж 100 экз. Заказ № 540.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А.С. Пушкіна».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.
224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.