Вучоныя запіскі 2018 • Вып. 14
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 519.652+517.548.5

О.В. Матысик[1], А.П. Худяков[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by

ОБОБЩЕННОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТОВА ТИПА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Работа посвящена исследованию обобщенной интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа. Для периодических скалярных функций одной переменной построены новые интерполяционные тригонометрические многочлены. Для построенной интерполяционной формулы получено явное представление и оценка погрешности.

Введение

Интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для случая функций состоит в построении многочленов, для которых выполнялись бы условия совпадения значений многочлена и его производных некоторых фиксированных порядков во всех или отдельных узлах с соответствующими значениями интерполируемой функции и её производных. Эта задача с пропусками порядков производных, в отличие от задачи Эрмитова типа, не всегда разрешима [1–3].

В более общей постановке интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа условия совпадения в отдельных узлах производных заменяются на условия совпадения заданного дифференциального или некоторого другого вида оператора. В случае алгебраических многочленов интерполяционные формулы такого типа получены в [4; 5].

1. Явный вид интерполяционного многочлена

Пусть имеется совокупность узлов $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n-1} < t_{2n} < 2\pi$. В этих узлах известны значения 2π-периодической функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_{2n+1}(f;t_j) \equiv L_{2n+1}f(t_j)$, где $L_{2n+1}f(t)$ – дифференциальный оператор вида

$$L_{2n+1}f(t) = (D^2+n^2)\cdots(D^2+1^2)Df(t), \quad D = \frac{d}{dt}.$$

Задача состоит в построении тригонометрического полинома $T_{n+1}(t)$ порядка не выше $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$T_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad (i=\overline{0,2n}); \quad L_{2n+1}(T_{n+1};t_j) = L_{2n+1}(f;t_j). \tag{1}$$

Теорема 1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\Omega_{n+1}(t)L_{2n+1}(f;t_j)}{\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k\right)}, \tag{2}$$

где $H_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(t)}{\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l'_n(t_k)} f(t_k),\ \ l_n(t) = \sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\times\cdots\times\ \times\sin\frac{1}{2}(t-t_{2n}),$

$\Omega_{n+1}(t) = \cos\frac{1}{2}(t-t_j)l_n(t),\ \ \cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k\right) \neq 0,$ *степени не выше* $n+1$ *удовлетворяет условиям* (1).

Доказательство

Очевидно, что $H_n(t_i) = f(t_i)\ \ (i=\overline{0,2n})$. Так как в произведение $\Omega_{n+1}(t)$ входят множители вида $\sin\frac{1}{2}(t-t_k)$, где $k = 0,1,\ldots,2n$, то $\Omega_{n+1}(t_i) = 0\ \ (i=\overline{0,2n})$. Таким образом, первая группа условий (1) выполняется.

Многочлен $H_n(t)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше n. И поскольку $L_{2n+1}\cos kt = L_{2n+1}\sin kt = 0\ \ (k=\overline{0,n})$, то в силу линейности оператора L_{2n+1} будем иметь $L_{2n+1}H_n(t) = 0$.

Методом полной математической индукции покажем, что имеет место равенство

$$\prod_{k=0,\,k\neq j}^{2n} \sin\frac{1}{2}(t-t_k) = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\cos\frac{1}{2}\left(2nt - \sum_{i=0,\,i\neq j}^{2n} t_i\right) + \tilde{T}_{n-1}(t), \qquad (3)$$

где $\tilde{T}_{n-1}(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше $n-1$.

Не ограничивая общности рассуждений, для удобства будем считать, что $j=0$. Тогда при $n=1$ будем иметь

$$\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}(t_2-t_1) - \cos\frac{1}{2}(2t-t_1-t_2)\right) =$$
$$= \frac{(-1)^1}{2^{2\cdot1-1}}\cos\frac{1}{2}(2t-t_1-t_2) + \tilde{T}_0(t).$$

Предположим, что соотношение (3) верно при $n = m-1$, тогда при $n=m$ получим

$$\prod_{k=1}^{2m}\sin\frac{1}{2}(t-t_k) = \prod_{k=1}^{2m-2}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)\sin\frac{1}{2}(t-t_{2m-1})\sin\frac{1}{2}(t-t_{2m}) =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\left(\cos\frac{1}{2}\left(2mt - \sum_{i=1}^{2m} t_i\right) + \cos\frac{1}{2}\left(2(m-2)t - \sum_{i=1}^{2m-2} t_i + t_{2m-1} + t_{2m}\right)\right) =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\cos\frac{1}{2}\left(2mt - \sum_{i=1}^{2m} t_i\right) + \tilde{\tilde{T}}_{m-1}(t),$$

где $\tilde{\tilde{T}}_{m-1}(t)$ – соответствующий тригонометрический многочлен степени не выше $m-1$.

Таким образом, равенство (3) справедливо для любого натурального n.

Используя соотношение (3), преобразуем далее функцию $\Omega_{n+1}(t)$.

$$\Omega_{n+1}(t)=\frac{1}{2}\sin(t-t_j)\prod_{k=0,\,k\neq j}^{2n}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(-\sin\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\cos(n+1)t+\cos\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\sin(n+1)t\right)+\tilde{T}_n(t).$$

Так как $D\cos(n+1)t=-(n+1)\sin(n+1)t$ и при $k=1,2,\ldots,n$;

$$(D^2+k^2)\sin(n+1)t=-[(n+1)^2-k^2]\sin(n+1)t,$$

получаем, что $L_{2n+1}\cos(n+1)t=(-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)t.$

Аналогично показываем, что, поскольку $D\sin(n+1)t=(n+1)\cos(n+1)t$ и $(D^2+k^2)\cos(n+1)t=-[(n+1)^2-k^2]\cos(n+1)t,$ то $L_{2n+1}\sin(n+1)t=(-1)^n(2n+1)!\cos(n+1)t.$ Кроме того, справедливо равенство $L_{2n+1}\tilde{T}_n(t)=0.$ Таким образом, получаем

$$L_{2n+1}\Omega_{n+1}(t)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left(\sin\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\sin(n+1)t+\right.$$

$$\left.+\cos\frac{1}{2}\left(t_j+\sum_{i=0}^{2n}t_i\right)\cos(n+1)t\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+2)t-t_j-\sum_{i=0}^{2n}t_i\right).\qquad(4)$$

Окончательно, при подстановке узла t_j вместо t в формулу (4), с учетом предыдущих формул получим, что и вторая группа равенств (1) справедлива. Теорема 1 доказана.

2. Частные случаи для небольшого числа узлов

Приведем явный вид тригонометрического полинома (2) для $n=1,2$.

1. Пусть в узлах $0=t_0<t_1<t_2<2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. Кроме этого, в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_3(f;t_j)$, где оператор $L_3f(t)=(D^2+1)Df(t)=f'''(t)+f'(t)$.

Тригонометрическим полиномом $T_2(t)$ второй степени, для которого выполнялись бы условия $T_2(t_i)=f(t_i)\quad(i=0,1,2);$ $L_3(T_2;t_j)=L_3(f;t_j)$, будет

$$T_2(t)=H_1(t)+\frac{4\Omega_2(t)L_3(f;t_j)}{3\cos\frac{1}{2}(3t_j-t_0-t_1-t_2)},$$

где

$$H_1(t)=\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_0-t_1)\sin\frac{1}{2}(t_0-t_2)}f(t_0)+\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_2)}{\sin\frac{1}{2}(t_1-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_1-t_2)}f(t_1)+$$

$$+\frac{\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)}{\sin\frac{1}{2}(t_2-t_0)\sin\frac{1}{2}(t_2-t_1)}f(t_2),$$

$$\Omega_2(t) = \cos\frac{1}{2}(t-t_j)\sin\frac{1}{2}(t-t_0)\sin\frac{1}{2}(t-t_1)\sin\frac{1}{2}(t-t_2).$$

2. Пусть в узлах $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < 2\pi$ известны значения $f(t_i)$ функции $f(t)$. А также в одном из узлов t_j известно значение оператора $L_5(f;t_j)$, имеющего вид

$$L_5 f(t) = (D^2+4)(D^2+1)Df(t) = f^{(V)}(t) + 5f'''(t) + 4f'(t).$$

Полиномом $T_3(t)$ третьей степени, для которого выполняются условия $T_3(t_i) = f(t_i)$ $(i = \overline{0,4})$; $L_5(T_3;t_j) = L_5(f;t_j)$, является

$$T_3(t) = H_2(t) + \frac{4\Omega_3(t)L_5(f;t_j)}{15\cos\frac{1}{2}\left(5t_j - \sum_{k=0}^{4} t_k\right)},$$

где $H_2(t) = \sum_{k=0}^{4}\frac{l_2(t)}{2\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l_2'(t_k)}f(t_k)$, $l_2(t) = \prod_{k=0}^{4}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)$, $\Omega_3(t) = \cos\frac{1}{2}(t-t_j)\prod_{k=0}^{4}\sin\frac{1}{2}(t-t_k)$.

3. Тригонометрический аналог формулы Тейлора

Введем в рассмотрение тригонометрические многочлены вида:

$$C_n(t) = 2^n(1-\cos t)^n \quad (n = 0,1,2,\ldots);$$
$$S_n(t) = 2^{n-1}\sin t\,(1-\cos t)^{n-1} = \frac{1}{2n}C_n'(t) \quad (n = 1,\ 2,\ldots).$$

Определим дифференциальный оператор $L_{2n}(f;t)$ следующим образом:

$$L_{2n}(f;t) = (D^2+(n-1)^2)\cdots(D^2+2^2)(D^2+1^2)D^2 f(t) \equiv$$
$$\equiv D\big(L_{2n-1}(f;t)\big) \quad (n = 1,2,3,\ldots),$$

где $D = \frac{d}{dt}$. Причем будем считать, что $L_0(f;t) \equiv f(t)$.

Построим тригонометрический аналог формулы Тейлора.

Теорема 2. *Если функция $f(t)$ имеет на отрезке $[0,2\pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ $(r \ge 1)$, то справедлив тригонометрический аналог формулы Тейлора вида*

$$f(t) = T_n(t) + R_{n+1}(t), \tag{5}$$

где при $r = 2n+1$

$$T_n(t) = f(a) + \frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a) + \frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a) +$$
$$+ \ldots + \frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!}L_{2n-1}(f;a) + \frac{C_n(t-a)}{(2n)!}L_{2n}(f;a);$$

$$R_{n+1}(t)=\frac{1}{(2n)!}\int_a^t C_n(t-s)L_{2n+1}(f;s)ds,$$

а при $r=2n$

$$T_n(t)=f(a)+\frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a)+\frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a)+\cdots+\frac{S_n(t-a)}{(2n-1)!}L_{2n-1}(f;a);$$

$$R_{n+1}(t)=\frac{1}{(2n-1)!}\int_a^t\left[S_n(t-s)L_{2n}(f;s)+\frac{n}{2}C_n(t-s)L_{2n-1}(f;s)\right]ds.$$

Доказательство

Докажем формулу методом математической индукции. При $r=1$ имеем

$$f(t)=T_0(t)+R_1(t)=f(a)+\int_a^t f'(s)ds=f(t).$$

Далее, при $r=2$ имеем

$$f(t)=T_1(t)+R_2(t)=f(a)+\sin(t-a)f'(a)+$$
$$+\int_a^t\left[\sin(t-s)f''(s)+\left(1-\cos(t-s)\right)f'(s)\right]ds. \qquad (6)$$

Вычислив по частям интеграл в (6), будем иметь

$$\int_a^t\left[\sin(t-s)f''(s)+\left(1-\cos(t-s)\right)f'(s)\right]ds=-\sin(t-a)f'(a)+f(t)-f(a).$$

Подставляя данное выражение в (6), получим верное тождество. Таким образом, при $r=2$ формула (5) справедлива.

Пусть формула (5) верна для $r=m\geq 1$. Рассмотрим два случая: $m=2k+1$ и $m=2k$.

1) $m=2k+1$. Тогда по предположению справедлива формула:

$$f(t)=f(a)+\frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a)+\frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a)+\cdots+$$
$$+\frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!}L_{2k-1}(f;a)+\frac{C_k(t-a)}{(2k)!}L_{2k}(f;a)+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds. \qquad (7)$$

Докажем справедливость формулы (5) для $r=m+1=2k+2$. Разобьем интеграл в (7) на два

$$\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds=$$
$$=\frac{1}{(2k)!}\int_a^t 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]L_{2k+1}(f;s)ds+$$

$$+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\left(1-\cos(t-s)\right)\right]L_{2k+1}(f;s)ds,$$

а затем проинтегрируем первый из них по частям. Обозначим

$$u=L_{2k+1}(f;s);\quad dv=2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]ds.$$

Продифференцировав по s левую и правую части выражения

$$\int 2^k\left(1-\cos(t-s)\right)^k\left[\frac{k+1}{2k+1}\cos(t-s)+\frac{k}{2k+1}\right]ds=$$

$$=-\frac{2^k\sin(t-s)\left(1-\cos(t-s)\right)^k}{2k+1}+c_k,\ c_k=const,\ k=0,1,2,...,$$

можно показать, что оно является тождеством. Тогда

$$du=L_{2k+2}(f;s)ds;\quad v=-\frac{2^k\sin(t-s)\left(1-\cos(t-s)\right)^k}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)ds=\frac{S_{k+1}(t-a)}{(2k+1)!}L_{2k+1}(f;a)+$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}\int_a^t\left(S_{k+1}(t-s)L_{2k+2}(f;s)+\frac{k+1}{2}C_{k+1}(t-s)L_{2k+1}(f;s)\right)ds. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует равенство (5) при $r=2k+2$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $m=2k$. Тогда также по предположению будет справедлива формула:

$$f(t)=f(a)+\frac{S_1(t-a)}{1!}L_1(f;a)+\frac{C_1(t-a)}{2!}L_2(f;a)+\cdots+\frac{S_k(t-a)}{(2k-1)!}L_{2k-1}(f;a)+$$

$$+\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)L_{2k-1}(f;s)\right]ds. \qquad (9)$$

Докажем справедливость формулы (5) для $r=m+1=2k+1$. Аналогично, разобьем интеграл в (9) на два

$$\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)L_{2k-1}(f;s)\right]ds=$$

$$=\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t 2^{k-1}\sin(t-s)\left(1-\cos(t-s)\right)^{k-1}L_{2k}(f;s)ds+$$

$$+\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t 2^{k-1}k\left(1-\cos(t-s)\right)^k L_{2k-1}(f;s)ds,$$

а затем проинтегрируем первый из них по частям. Имеем

$$u = L_{2k}(f;s); \quad dv = 2^{k-1}\sin(t-s)\big(1-\cos(t-s)\big)^{k-1}ds;$$

$$du = DL_{2k}(f;s)ds; \quad v = -\frac{2^{k-1}}{k}\big(1-\cos(t-s)\big)^{k}.$$

Тогда

$$\frac{1}{(2k-1)!}\int_a^t\left[S_k(t-s)\,L_{2k}(f;s)+\frac{k}{2}C_k(t-s)\,L_{2k-1}(f;s)\right]ds = \frac{1}{(2k)!}C_k(t-a)\times$$

$$\times L_{2k}(f;a)+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t\left[C_k(t-s)DL_{2k}(f;s)+k^2C_k(t-s)L_{2k-1}(f;s)\right]ds =$$

$$= \frac{1}{(2k)!}C_k(t-a)L_{2k}(f;a)+\frac{1}{(2k)!}\int_a^t C_k(t-s)L_{2k+1}(f;s)\,ds. \qquad (10)$$

Аналогично, объединяя (9) и (10), получим равенство (5) при $r = 2k+1$. Таким образом, формула (5) верна для $r = m+1$. Следовательно, по методу математической индукции она справедлива для любого $r \in \mathbb{N}$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что другие виды формулы Тейлора рассмотрены в [6–8].

4. Оценка погрешности интерполяционного многочлена

Многочлен $H_n(t)$ из теоремы 1 можно представить в виде

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} f(t_k)\omega_{nk}(t), \qquad (11)$$

где $\omega_{nk}(t)$ $\left(k=\overline{0,2n}\right)$ – фундаментальные полиномы тригонометрического интерполирования: $\omega_{nk}(t) = \dfrac{l_n(t)}{2\sin\frac{1}{2}(t-t_k)l_n'(t_k)}$, где $l_n(t)$ – тригонометрический многочлен, определенный в теореме 2.1.

Построим представление остаточного члена для формулы (2).

Теорема 3. *Если* $f(t)$ *имеет на* $[0,2\pi]$ *абсолютно непрерывную производную порядка* $2n$, *то остаточный член формулы* (2) *имеет вид*

$$f(t)-T_{n+1}(t) = \frac{1}{(2n)!}\int_0^{2\pi}\left[K_n(t-s)-\sum_{k=0}^{2n}K_n(t_k-s)\omega_{nk}(t)\right]L_{2n+1}(f;s)ds -$$

$$-\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{\Omega_{n+1}(t)\,L_{2n+1}(f;t_j)}{\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j-\sum\limits_{k=0}^{2n}t_k\right)}, \qquad (12)$$

где $K_n(u) = \begin{cases} 2^n(1-\cos u)^n, & u \ge 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$

Доказательство

По формуле (5) для $r = 2n+1$ и $a = 0$ имеем

$$f(t) = P_{2n}(t) + R_{2n+1}(t) = f(0) + \frac{S_1(t)}{1!} L_1(f;0) + \frac{C_1(t)}{2!} L_2(f;0) +$$

$$+ \cdots + \frac{S_n(t)}{(2n-1)!} L_{2n-1}(f;0) + \frac{C_n(t)}{(2n)!} L_{2n}(f;0) + \frac{1}{(2n)!}\int_0^t C_n(t-s)\, L_{2n+1}(f;s)ds.$$

В силу того, что функции $S_k(t)$ и $C_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами степени k $(k = \overline{1,n})$, соответственно, по синусам и косинусам будем иметь

$$f(t) = \widetilde{T}_n(t) + \frac{1}{(2n)!}\int_0^{2\pi} K_n(t-s) L_{2n+1}(f;s)ds = \widetilde{T}_n(t) + R_{2n+1}(t), \tag{13}$$

где $\widetilde{T}_n(t)$ – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше n.

Подставив (13) в (11), получим $H_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \tilde{T}_n(t_k)\omega_{nk}(t) + \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t).$

Как известно [6], формула (11) инвариантна относительно тригонометрических многочленов степени не выше n, поэтому будем иметь $H_n(t) = \tilde{T}_n(t) + \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t).$

Откуда

$$f(t) - H_n(t) = R_{2n+1}(t) - \sum_{k=0}^{2n} R_{2n+1}(t_k)\omega_{nk}(t). \tag{14}$$

Подставив в (14) интегральное представление для $R_{2n+1}(t)$, получим равенство

$$f(t) - H_n(t) = \frac{1}{(2n)!}\int_0^{2\pi}\left[K_n(t-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(t_k - s)\omega_{nk}(t)\right] L_{2n+1}(f;s)ds. \tag{15}$$

Из (15) и (2) окончательно получим представление остаточного члена для формулы (2) в виде (12). Теорема 3 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$B_k^{(n)} = \left|\sin\frac{t_k - t_0}{2}\cdots\sin\frac{t_k - t_{k-1}}{2}\sin\frac{t_k - t_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{t_k - t_{2n}}{2}\right|, \quad (k = \overline{0,2n});$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{B_k^{(n)}}, \quad C_{n+1} = \frac{\left|L_{2n+1}(f;t_j)\right|}{\left|\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k\right)\right|}, \quad M_{2n+1} = \max_{\theta\in[0,2\pi)}\left|L_{2n+1}(f;\theta)\right|.$$

Теорема 4. *Оценка погрешности формулы* (2) *имеет вид:*

$$\left|f(t) - T_{n+1}(t)\right| \le \frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\left[\pi\left(1 + B_n\right)M_{2n+1} + \frac{C_{n+1}}{2n+1}\right].$$

Доказательство

С учетом обозначений будут справедливы следующие неравенства

$$\left|K_n(u)\right| \le 2^{2n},\ u \in \mathbb{R};\quad \left|\omega_{nk}(t)\right| \le \frac{1}{B_k^{(n)}},\quad \left|\Omega_{n+1}(t)\right| \le 1,\ t \in [0;2\pi). \tag{16}$$

Из (12) и (16) следует

$$\left|f(t) - T_{n+1}(t)\right| \le \frac{2\pi}{(2n)!}\left(2^{2n} + \sum_{k=0}^{2n}\frac{2^{2n}}{B_k^{(n)}}\right)M_{2n+1} + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}C_{n+1} =$$
$$= \frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\left[\pi\left(1+B_n\right)M_{2n+1} + \frac{C_{n+1}}{2n+1}\right].$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жидков, Н. П. Линейные аппроксимации функционалов / Н. П. Жидков. – М. : МГУ, 1977. – 262 с.
2. Ибрагимов, И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения / И. И. Ибрагимов. – М. : Наука, 1971. – 518 с.
3. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск : Выш. шк., 1968. – 320 с.
4. Янович, Л .А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
5. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы современного анализа : сб. науч. тр. / Гродн. гос. ун-т им. Я. Купалы ; отв. ред. Ю. М. Вувуникян. – Гродно, 2009. – С. 198–215.
6. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер ; под ред. Л. А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.
7. Гуло, И. Н. Квадратурные формулы для стохастических интегралов от неслучайных периодических функций. / И. Н. Гуло, Л. А. Янович // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 3. – С. 14–19.
8. Литвин, О. М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. – Київ : Наук. думка, 1973. – 122 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.06.2018

Matysik O.V., Khudyakov A.P. **The Generalized Trigonometric Interpolation of Hermitian Type for Periodic Functions of the Scalar Argument**

The paper is devoted to the study of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff problem. For periodic scalar functions of one variable, new interpolation trigonometric polynomials are constructed. For the constructed interpolation formula, an explicit representation and an error estimate are obtained.