Вучоныя запіскі 2017 • Вып. 13
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов
д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАСШИРЕННЫМ НАБОРОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Показано, что использование расширенных наборов неприводимых представлений группы Лоренца открывает новые возможности теории релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы элементарных частиц. Развиваемый в работе подход позволяет также применять методы теории релятивистских волновых уравнений в суперструнных и калибровочных моделях фундаментальных взаимодействий.

1. Основные сведения из теории релятивистских волновых уравнений

Теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) является одним из самых устоявшихся и разработанных в математическом отношении направлений в классической и квантовой теории поля. Она берет начало с уравнения Дирака. Постулативный базис данной теории разрабатывался Дираком [1], Фирцем и Паули [2; 3], Баба [4; 5], Хариш–Чандра [6; 7] и другими авторами. В систематизированном изложении основные положения теории РВУ можно найти, например, в работах [8; 9]. Приведем их в сжатом виде.

Релятивистское квантово-механическое описание свободных элементарных микрообъектов всегда может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В случае микрообъектов с ненулевой массой такая система представима в матрично-дифференциальной форме (здесь и везде далее мы используем метрику $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$, поэтому нет необходимости различать ковариантные и контравариантные лоренцевские индексы. По повторяющимся индексам в соответствии с известным правилом Эйнштейна подразумевается суммирование).

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi(x) = 0, \tag{1.1}$$

где Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ – квадратные матрицы, m – скалярный параметр, связанный с массой. Для микрообъектов с нулевой массой имеем

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0)\Psi(x) = 0, \tag{1.2}$$

где Γ_0 – особенная матрица ($\det \Gamma_0 = 0$), которая может быть и нулевой. Именно эти формы записи ассоциируются с термином «релятивистские волновые уравнения». Отметим еще, что если в форме РВУ (1.2) матрица Γ_0 – неособенная, то форма (1.2) всегда может быть приведена к виду (1.1). Поэтому в дальнейшем в записи (1.2) мы будем подразумевать только особенную матрицу Γ_0, если специально не будет оговорено иное.

Основным и безусловным требованием, предъявляемым к уравнениям (1.1), (1.2), является их инвариантность относительно преобразований собственной группы Лоренца. Отсюда следует, что, во-первых, функция Ψ преобразуется по некоторому представлению

T собственной группы Лоренца (далее будет показано, что представление T должно быть приводимым). Во-вторых, матрицы Γ_μ и Γ_0 должны удовлетворять условиям

$$T^{-1}\Gamma_\mu T = L_{\mu\nu}\Gamma_\nu, \tag{1.3}$$

$$T^{-1}\Gamma_0 T = \Gamma_0, \tag{1.4}$$

где $L_{\mu\nu}$ – матрица Лоренца. Применяя (1.3) к бесконечно малым преобразованиям Лоренца

$$T = 1 + \delta\omega_{[\mu\nu]}J^{[\mu\nu]}, \tag{1.5}$$

придем к соотношению

$$[J^{[\mu\nu]}, \Gamma_\alpha]_- = \delta_{\nu\alpha}\Gamma_\mu - \delta_{\mu\alpha}\Gamma_\nu. \tag{1.6}$$

Полагая в (1.6) $\mu = i$ и $\nu = \alpha = 4$, матрицы $\Gamma_i \, (i = 1, 2, 3)$ можно выразить через Γ_4 и «бусты» $J^{[i4]}$ лоренцевских преобразований:

$$\Gamma_i = [J^{[i4]}, \Gamma_4]_-. \tag{1.7}$$

Таким образом, среди матриц Γ_μ матрица Γ_4 играет выделенную роль.

Теперь напомним, что всякое неприводимое конечномерное представление τ группы Лоренца может быть задано парой чисел l_1, l_2, которые одновременно или порознь принимают целые (включая ноль) либо полуцелые положительные значения [10]. Представление τ, действующее в пространстве R^τ, порождает, вообще говоря, приводимое представление своей подгруппы – группы вращений. Другими словами, пространство R^τ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств R^τ_s, в каждом из которых представление группы вращений, индуцированное представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ группы Лоренца, неприводимо и задается целочисленным либо полуцелочисленным весом s. При этом в представлении τ присутствуют все веса от $|l_1 - l_2|$ до $l_1 + l_2$. Размерность пространства R^τ равна $(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)$.

В зависимости от значений (целочисленность или полуцелочисленность) чисел l_1, l_2 все неприводимые конечномерные представления группы Лоренца удобно разбить на четыре класса:

$$\begin{array}{ll} \text{класс} \ +1: & l_1, l_2 \ \text{оба целые;} \\ \text{класс} \ -1: & l_1, l_2 \ \text{оба полуцелые;} \\ \text{класс} \ +\varepsilon: & l_1 \ \text{целое}, l_2 \ \text{полуцелое;} \\ \text{класс} \ -\varepsilon: & l_1 \ \text{полуцелое}, l_2 \ \text{целое.} \end{array} \tag{1.8}$$

Неприводимые представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$ называются зацепляющимися, если одновременно выполняются условия

$$l'_1 = l_1 \pm \frac{1}{2}, \quad l'_2 = l_2 \pm \frac{1}{2}, \tag{1.9}$$

причем знаки «+» и «–» могут не коррелировать между собой.

Наглядное графическое изображение зацепляющихся неприводимых представлений группы Лоренца удобно осуществлять посредством так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся компоненты соединяются чертой. Очевидно, что зацепляться друг с другом могут только представления классов «+1» с «–1» и «$+\varepsilon$» с «$-\varepsilon$». Таким образом, существуют две несмешивающиеся между собой разновидности схем зацеплений. Наиболее полная их реализация имеет вид

$$\begin{tikzcd}
 & & (0,0) \arrow[d, dash] & & \\
 & (0,1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,0) \arrow[d, dash] & \\
(0,2) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (2,0) \arrow[d, dash] \\
{} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

в первом случае и

$$\begin{tikzcd}
 & & (0,\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},0) \arrow[d, dash] & & \\
 & (0,\frac{3}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{3}{2},0) \arrow[d, dash] & \\
(0,\frac{5}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},2) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,\frac{3}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{3}{2},1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (2,\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{5}{2},0) \arrow[d, dash] \\
{} & {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd} \tag{1.11}$$

во втором.

Важно подчеркнуть, что в обозначенных схемах зацеплений каждая из неприводимых компонент может встречаться более одного раза. Тогда говорят об РВУ с кратными (повторяющимися) представлениями группы Лоренца. Очевидно, что любая схема зацеплений, которая относится к типу (1.10), содержит только целочисленные веса s неприводимых представлений группы вращений и, следовательно, соответствующее ей РВУ описывает микрообъекты с целым спином. Аналогично схемы зацеплений типа (1.11) служат для описания микрообъектов с полуцелым спином.

Рассмотрим сначала, какие ограничения на представление T, действующее в пространстве R волновой функции Ψ, накладывает требование инвариантности РВУ (1.1) относительно преобразований собственной группы Лоренца.

Предположим, что представление T состоит из одного неприводимого представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ собственной группы Лоренца. Тогда слагаемое $m\Psi$ в (1.1) преобразуется по представлению τ. Слагаемое же $\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi$ преобразуется по представлению, которое полностью или частично состоит из неприводимых компонент, содержащихся в прямом произведении представлений

$$\begin{aligned}(l_1, l_2) \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \\ &= (l_1 + \frac{1}{2}, l_2 + \frac{1}{2}) \oplus (l_1 + \frac{1}{2}, l_2 - \frac{1}{2}) \oplus (l_1 - \frac{1}{2}, l_2 + \frac{1}{2}) \oplus (l_1 - \frac{1}{2}, l_2 - \frac{1}{2}).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Но поскольку ни одно из неприводимых представлений, фигурирующих в разложении (1.12), не совпадает с представлением (l_1, l_2), члены $\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi$ и $m\Psi$ в уравнении (1.1) не могут преобразовываться одинаково при преобразованиях Лоренца. Это означает, что РВУ (1.1) не может базироваться на единственном неприводимом представлении группы Лоренца. Подобным образом рассуждая, приходим к выводу, что представление T волновой функции Ψ не может состоять из незацепляющихся неприводимых компонент. Таким образом, представление T должно быть приводимым и состоять из зацепляющихся неприводимых представлений.

Например, наиболее известные простейшие РВУ – уравнение Дирака (спин $\frac{1}{2}$), уравнения Даффина – Кеммера (спины 0 и 1), уравнение Фирца – Паули (спин $\frac{3}{2}$) – базируются соответственно на схемах зацеплений

$$(0, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, 0), \tag{1.13}$$

$$\begin{array}{c} (0,0) \\ | \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array}, \tag{1.14}$$

$$(0,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (1,0), \tag{1.15}$$

и

$$\begin{array}{ccc} (0, \frac{1}{2}) & — & (\frac{1}{2}, 0) \\ | & & | \\ (\frac{1}{2}, 1) & — & (1, \frac{1}{2}) \end{array} . \tag{1.16}$$

Возможен также вариант, когда рассматриваемая схема зацеплений состоит из отдельных фрагментов, каждый из которых удовлетворяет выше сформулированным условиям, но которые не зацепляются друг с другом. В этом случае соответствующее РВУ будет распадающимся в смысле собственной группы Лоренца.

На РВУ (1.1) еще обычно накладывается требование инвариантности относительно операции пространственного отражения, совместно с которой чисто лоренцевские преобразования образуют полную группу Лоренца. Указанное требование приводит к тому, что в используемой схеме зацеплений наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ при $l_1 \neq l_2$ должно присутствовать также представление $\dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$ (его называют сопряженным к τ).

Принципиальным моментом в теории РВУ является положение, согласно которому единый физический микрообъект должен описываться уравнением, не распадающимся в смысле полной группы Лоренца.

Все сказанное выше в отношении РВУ (1.1) остается в силе и для РВУ (1.2), за исключением случая, когда $\Gamma_0 = 0$. РВУ с $\Gamma_0 = 0$ в нашей работе рассматриваться не будут. Поэтому, чтобы не загромождать изложение, на этом случае не останавливаемся. Интересующегося читателя можем отослать, например, к работам [8; 11].

Физический интерес представляют те РВУ, которые могут быть получены на основе вариационного принципа из лоренц-инвариантной функции Лагранжа (плотности лагранжиана). Для ее построения необходимо иметь инвариантные квадратичные комбинации (квадратичные формы), составленные из функций поля, их первых производных и матриц Γ_μ, Γ_0. Проблема здесь заключается в том, что матрицы T конечномерных представлений группы Лоренца не являются унитарными. Вследствие этого обычная квадратичная форма

$$\Psi^\dagger\Psi = (\Psi^T)^*\Psi \tag{1.17}$$

не является лоренцевским инвариантом. Вместо квадратичной формы (1.17) приходится вводить так называемую билинейную форму

$$\overline{\Psi}\Psi = \Psi^\dagger\eta\Psi, \quad \overline{\Psi} = \Psi^\dagger\eta, \tag{1.18}$$

где η – некоторая числовая матрица. Для релятивистской инвариантности формы (1.18) матрица η должна удовлетворять условию

$$T^\dagger\eta T = \eta. \tag{1.19}$$

Условие (1.19) можно представить в ином виде, если в качестве преобразования T использовать бесконечно малое преобразование (1.5). Подставляя (1.5) в (1.19) и ограничиваясь членами первого порядка малости по параметрам $\delta\omega_{[\mu\nu]}$, с учетом независимости этих параметров получим эквивалентные (1.19) условия

$$\eta J^{[ij]} = J^{[ij]}\eta, \tag{1.20}$$

$$\eta J^{[i4]} = -J^{[i4]}\eta. \tag{1.21}$$

Матрица η, фигурирующая в выражении (1.18) и удовлетворяющая условиям (1.20), (1.21), называется матрицей билинейной лоренц-инвариантной формы.

При выполнении условий (1.3), (1.4), (1.20), (1.21) лоренц-инвариантными являются также квадратичные комбинации

$$\partial_\mu(\overline{\Psi}\Gamma_\mu\Psi), \quad (\partial_\mu\overline{\Psi})\Gamma_\mu\Psi, \quad \overline{\Psi}\Gamma_\mu(\partial_\mu\Psi). \tag{1.22}$$

Лагранжиан, приводящий к уравнению (1.1), может быть выбран, например, в виде

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\overline{\Psi}(\Gamma_\mu\partial_\mu + m)\Psi + \frac{1}{2}((\partial_\mu\overline{\Psi})\Gamma_\mu - m\overline{\Psi})\Psi. \tag{1.23}$$

Варьируя в соответствии с принципом наименьшего действия функцию действия (функции Ψ и $\overline{\Psi}$ при этом считаются независимыми), придем к уравнению (1.1) для функции Ψ и уравнению

$$-(\partial_\mu\overline{\Psi})\Gamma_\mu + m\overline{\Psi} = 0 \tag{1.24}$$

для функции $\overline{\Psi}$. Динамические переменные получаются из лагранжиана (1.23) по общим формулам

$$E = -\int \overline{\Psi}\,\Gamma_4\,\partial_4\Psi\,d^3x, \quad P = -\frac{i}{c}\int \overline{\Psi}\,\Gamma_4\,\partial_i\Psi\,d^3x, \tag{1.25}$$

вытекающим из теоремы Нетер.

Часто используется упрощенный вид лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\overline{\Psi}(\Gamma_\mu\partial_\mu + m)\Psi, \tag{1.26}$$

также позволяющий получить РВУ (1.1) и правильные выражения для динамических переменных. Уравнение (1.2) может быть получено из лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\overline{\Psi}(\Gamma_\mu\partial_\mu + \Gamma_0)\Psi. \tag{1.27}$$

Из физических соображений очевидно, что билинейная форма (1.18) должна быть вещественной, то есть

$$(\Psi^\dagger\eta\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger\eta^\dagger\Psi = \Psi^\dagger\eta\Psi,$$

откуда следует

$$\eta^\dagger = \eta. \tag{1.28}$$

Кроме того, в пространстве волновой функции Ψ базис можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\eta^2 = 1, \quad \text{или} \quad \eta^{-1} = \eta.$$

В сочетании с (1.28) это приводит к соотношениям

$$\eta = \eta^T = \eta^* = \eta^\dagger = \eta^{-1}. \tag{1.29}$$

Условия (1.28), (1.29) еще не определяют полностью матрицу η, поскольку они не учитывают того, что функция $\overline{\Psi}(x)$ является решением уравнения (1.24). Чтобы найти дополнительные ограничения, накладываемые благодаря этому на матрицу η, проведем над уравнением (1.1) операции эрмитовского сопряжения и умножения на η. В результате получим

$$(\partial_i\Psi^\dagger\Gamma_i^\dagger - \partial_4\Psi^\dagger\Gamma_4^\dagger + \Psi^\dagger m) = 0. \tag{1.30}$$

Потребуем, чтобы от уравнения (1.30) можно было перейти к уравнению (1.24). Очевидно, что для этого должны выполняться перестановочные соотношения

$$\Gamma_i^\dagger\eta = -\eta\Gamma_i, \quad \Gamma_4^\dagger\eta = \eta\Gamma_4. \tag{1.31}$$

В случае РВУ (1.2) к соотношениям (1.31) надо добавить условие

$$\Gamma_0^\dagger \eta = \eta \Gamma_0, \tag{1.32}$$

которое совместно с (1.31) приводит к уравнению

$$-(\partial_\mu \overline{\Psi}) \Gamma_\mu + \overline{\Psi} \Gamma_0 = 0 \tag{1.33}$$

для функции $\overline{\Psi}$.

На выбор всевозможных РВУ накладывается также условие: среди состояний микрообъекта должны отсутствовать такие, которым соответствует нулевая энергия. Это условие существенно ограничивает возможный вид минимальных полиномов матриц Γ_μ.

Как показано в работе [12], минимальный полином матриц Γ_4 (а также Γ_μ) должен иметь структуру

$$\Gamma_4^n (\Gamma_4^2 - \lambda_1^2)(\Gamma_4^2 - \lambda_2^2) \ldots = 0, \tag{1.34}$$

где все λ_i – вещественные и различные числа, n – целое положительное число либо ноль.

Условия дефинитности энергии и заряда для микрообъектов с одной массой могут быть представлены соответственно в виде неравенств [13]

$$(-1)^{n+1} \left[(\mathrm{Sp}(\Gamma_4^{n+1} \eta))^2 - (\mathrm{Sp}(\Gamma_4^n \eta))^2 \right] > 0, \tag{1.35}$$

$$(-1)^{n} \left[[(\mathrm{Sp}(\Gamma_4^{n+1} \eta))^2 - (\mathrm{Sp}(\Gamma_4^n \eta))^2 \right] > 0. \tag{1.36}$$

При этом в соответствии с теоремой Паули полагается, что условие (1.35) должно иметь место в случае целого, а (1.36) – в случае полуцелого спина.

Наконец, что касается матрицы Γ_0 в уравнении (1.2), то при выборе соответствующего базиса в пространстве волновой функции она всегда может быть приведена к диагональному виду. При этом матрица Γ_0 состоит из независимых скалярных блоков a_τ, сопоставляемых неприводимым представлениям $\tau \in T$. Часть указанных блоков являются нулевыми. Из требования инвариантности РВУ (1.2) относительно преобразований полной группы Лоренца следует, что ненулевые блоки a_τ удовлетворяют равенству

$$a_\tau = a_{\dot{\tau}}. \tag{1.37}$$

В случае конечномерных РВУ к такому же равенству приводит и условие возможности лагранжевой формулировки РВУ (1.2).

При построении РВУ с заданным спектром массовых и спиновых состояний удобно использовать так называемый канонический базис, или базис Гельфанда – Яглома [8]. В этом базисе компоненты волновой функции ψ_{sk}^τ описывают «чистые» состояния, то есть состояния с определенным значением спина s и его проекции k; верхний индекс указывает на принадлежность данного состояния к неприводимому представлению τ. В базисе Гельфанда – Яглома матрица Γ_4 имеет квазидиагональный вид

$$\Gamma_4 = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2s+1}, \tag{1.38}$$

где I_{2s+1} – единичная матрица размерности $2s+1$; C^s – матричный блок, отвечающий спину s, в том смысле, что если матрица C^s имеет ненулевые корни (собственные значения), то частица обладает спином s. Возможные значения массы микрообъекта в случае РВУ (1.1) выражаются через ненулевые корни λ_i блока C^s по формуле

$$m_i^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_i^{(s)}|}. \tag{1.39}$$

Спиновый блок C^s строится следующим образом. Из схемы зацеплений, на которой базируется РВУ, выбираются все неприводимые компоненты $\tau \sim (l_1, l_2)$, удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \tag{1.40}$$

О таких представлениях говорят, что они формируют блок C^s. Затем эти компоненты для удобства нумеруются. Матрица C^s состоит из элементов $c^s_{\tau\tau'}$, в обозначении которых номера представлений τ, τ' играют роль матричных индексов. При этом незацепляющимся компонентам τ, τ' соответствуют нулевые элементы $c^s_{\tau\tau'}$. Отсюда следует, что в схеме зацеплений, предназначенной для описания спина s, должно содержаться, как минимум, два зацепляющихся неприводимых представления, которые удовлетворяют условию (1.40).

Требование релятивистской инвариантности РВУ (1.1), (1.2) накладывает следующие ограничения на элементы $c^s_{\tau\tau'}$:

$$\begin{aligned}
&c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}\sqrt{(s+l_+ +2)(s-l_+ -1)} \quad \text{если} \quad l'_+ = l_+ + 1, \quad l'_- = l_-,\\
&c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}\sqrt{(s+l_- +1)(s-l_-)} \quad \text{если} \quad l'_+ = l_+, \quad l'_- = l_- + 1,\\
&c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}(s+\frac{1}{2}) \quad \text{если} \quad l'_+ = l_+, \quad l'_- = l_-,
\end{aligned} \tag{1.41}$$

где $l_+ = l_1 + l_2$, $l_- = |l_1 - l_2|$, $l'_+ = l'_1 + l'_2$, $l'_- = |l'_1 - l'_2|$; $c_{\tau\tau'}$ – произвольные комплексные числа в указанных случаях, а в остальных случаях – равные нулю.

Инвариантность РВУ относительно операции пространственного отражения, задаваемой матрицей P, налагает на числа $c_{\tau\tau'}$ ограничения

$$c_{\tau\tau'} = c_{\dot\tau\dot\tau'} \quad \text{если} \quad \dot\tau \neq \tau, \ \dot\tau' \neq \tau'; \tag{1.42}$$

$$c_{\tau\tau'} = \pm c_{\dot\tau\dot\tau'} \quad \text{если} \quad \dot\tau = \tau, \ \dot\tau' \neq \tau' \quad \text{или} \quad \dot\tau \neq \tau, \ \dot\tau' = \tau'. \tag{1.43}$$

Знак «+» в условии (1.43) (для определенности берем первый вариант) соответствует случаю, при котором оператор P действует в подпространствах R^τ и $R^{\tau'}$ одинаково, то есть

$$P\psi^\tau_{sk} = (-1)^{[s]}\psi^\tau_{sk}, \quad P\psi^{\tau'}_{sk} = (-1)^{[s]}\psi^{\dot\tau'}_{sk}. \tag{1.44}$$

Если же оператор P действует в R^τ и $R^{\tau'}$ по-разному

$$P\psi^\tau_{sk} = (-1)^{[s]+1}\psi^\tau_{sk}, \quad P\psi^{\tau'}_{sk} = (-1)^{[s]}\psi^{\dot\tau'}_{sk}, \tag{1.45}$$

то в условии (1.43) выбирается знак «–».

При $\tau = \dot{\tau}$, $\tau' = \dot{\tau}'$ имеем $c_{\tau\tau'} \neq 0$ тогда, когда оператор P действует одинаково в пространствах R^{τ}, $R^{\tau'}$; каких-либо других ограничений на числа $c_{\tau\tau'}$ в этом случае не накладывается.

Матрица η билинейной формы (1.17) в базисе Гельфанда – Яглома имеет структуру, аналогичную (1.38):

$$\eta = \bigoplus_{s} \eta^{s} \otimes I_{2s+1}. \tag{1.46}$$

Условия (1.20), (1.21), (1.29) приводят к тому, что отличными от нуля являются лишь элементы $\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}$, причем

$$\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}} = \eta^{s}_{\dot{\tau}\tau} = -\eta^{s+1}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{1.47}$$

Условие (1.31) приводит к соотношению

$$c^{s}_{\tau\tau'}\eta^{s}_{\tau'\dot{\tau}'} = (c^{s}_{\dot{\tau}'\dot{\tau}})^{*}\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{1.48}$$

После наложения на элементы матриц Γ_4, Γ_0, η связей (1.41)–(1.43), (1.47), (1.48) в выборе этих элементов остается, как правило, произвол, который может быть использован для удовлетворения условиям (1.34) и (1.35) (или (1.36)). Если это оказывается невозможным, значит, на основе рассматриваемой схемы зацеплений РВУ для описания микрообъекта с заданным спектром массовых и спиновых состояний построить нельзя.

Перечисленные положения теории РВУ были сформулированы в 20-х – 50-х годах прошлого столетия. Они соответствуют представлениям того времени об элементарных частицах как бесструктурных точечных микрообъектах с единственной внутренней степенью свободы (спином), допускающей пространственно-временную трактовку. Однако, по мере установления новых экспериментальных фактов (существование структуры у некоторых из частиц, наличие у них дополнительных (помимо спина) внутренних степеней свободы и др.) вышеуказанные представления претерпели существенные изменения. Изменилось и само понятие «элементарная частица». В отношении действительно (на сегодняшний день) бесструктурных микрообъектов прочно вошел в обиход термин «фундаментальная частица». Возникло представление о существовании принципиально новых физических объектов, объединяющих качества микрочастиц (полей) с ненулевой и нулевой массой (например, электрослабое поле), а также свойства безмассовых микрообъектов с различными значениями спиральности (поля, осуществляющие взаимодействие незамкнутых струн). Оставались нерешенными и «старые» проблемы теории РВУ. С одной стороны, ее постулативный базис представляется недостаточно полным, поскольку не ограничивает жестко спектр возможных элементарных (либо хотя бы фундаментальных) микрообъектов. С другой, использование в теории РВУ только симметрий пространственно-временного происхождения затрудняет описание дополнительных помимо спина (изоспиновых) внутренних степеней свободы. Вне поля зрения теории РВУ оставался и вопрос о происхождении массы.

Таким образом, теория РВУ столкнулась с вызовами, на которые она, казалось бы, не способна дать адекватные ответы. Поэтому интерес к ней в последние два–три десятилетия существенно снизился.

Одним из научных центров, где исследования по теории РВУ берут начало с работ проф. Ф. И. Федорова [11–14] и активно ведутся до настоящего времени, является белорусская школа теоретической физики. Нынешняя направленность этих исследований состоит в показе того, что при определенной «модернизации» постулативного базиса теории РВУ, но сохранении ее ключевых основ (о чем подробно будет говориться ниже), данная теория способна успешно интерпретировать многие достижения современной физики высоких энергий как теоретического, так и экспериментального характера.

Некоторые интересные, на наш взгляд, в этом отношении результаты, полученные за последние годы, излагаются в настоящей работе.

2. Релятивистские волновые уравнения для частиц с низшими спинами. Подход Гельфанда – Яглома

В дальнейшем мы будем часто применять подход Гельфанда – Яглома, суть которого в общих чертах была изложена в предыдущем разделе. Покажем, как им конкретно пользоваться, на примерах известных простейших РВУ для частиц с низшими спинами.

Рассмотрим сначала схему зацеплений (1.14), в которой неприводимое представление $(0,0)$ соответствует скалярной функции ψ_0, а представление $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ – векторной функции ψ_μ. Матрица Γ_4 РВУ (1.1), базирующегося на данном наборе неприводимых представлений группы Лоренца, в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где C^0 и C^1 – блоки, сопоставляемые спинам 0 и 1. Снабдив рассматриваемые представления номерами

$$(0,0) \sim 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \sim 2, \tag{2.2}$$

играющими роль матричных индексов, получим для матриц C^0, C^1 выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c^0_{12} \\ c^0_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^1 = 0. \tag{2.3}$$

При этом, как нетрудно видеть, соотношения (1.41) – (1.43) никаких ограничений на числа c^0_{12}, c^0_{21} не накладывают.

Элементы матрицы η лоренц-инвариантной билинейной формы

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \begin{pmatrix} \eta^0_{11} & 0 \\ 0 & \eta^0_{22} \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \eta^1_{22} \tag{2.4}$$

выберем следующим образом:

$$\eta^0_{11} = \eta^0_{22} = -\eta^1_{21} = 1. \tag{2.5}$$

При таком выборе условие (1.48) приводит к равенству

$$c^0_{21} = (c^0_{12})^*. \tag{2.6}$$

Полагая $c^0_{12} = 1$, получим для матриц C^0 и Γ_4 окончательно выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Легко убедиться, что минимальное уравнение для матрицы Γ_4 имеет вид

$$\Gamma_4(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{2.8}$$

Вид остальных матриц Γ_i определяется по формуле (1.7).

Для дефинитности энергии должно в данном случае $(n = 1)$ выполняться неравенство

$$(-1)^2 \left[\left(\mathrm{Sp}(\Gamma_4^2\eta)\right)^2 - \left(\mathrm{Sp}(\Gamma_4\eta)\right)^2 \right] > 0, \tag{2.9}$$

справедливость которого легко проверяется.

Из (2.7), (2.8) следует, что состоянию со спином $s = 0$ в силу формулы (1.39) соответствует одно значение массы, а состояние со спином $s = 1$ отсутствует. В литературе такое уравнение называется обычно уравнением Даффина – Кеммера для скалярной частицы.

Тензорная формулировка этого уравнения имеет вид

$$\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0, \quad \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0. \tag{2.10}$$

Отсюда нетрудно получить уравнение второго порядка для скалярной функции ψ_0

$$(\Box - m^2)\psi_0 = 0, \tag{2.11}$$

означающее, что речь действительно идет об описании частицы с ненулевой массой и спином $s = 0$.

Для построения простейшего РВУ для частицы с ненулевой массой и спином $s = 1$ служит схема зацеплений (1.15), где представления $(0, 1)$, $(1, 0)$ в совокупности соответствуют антисимметричному тензору второго ранга $\psi_{[\mu\nu]}$. Матрица Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома в данном случае по-прежнему имеет блочную структуру (2.1), где с учетом нумерации $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim 1$, $(0, 1) \sim 2$, $(1, 0) \sim 3$ для спиновых блоков C^0, C^1 имеют место выражения

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & c^1_{12} & c^1_{13} \\ c^1_{21} & 0 & 0 \\ c^1_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^0 = 0. \tag{2.12}$$

Соотношения (1.41) здесь, как и в случае спина $s = 0$, никаких ограничений на числа c^1_{ij} не накладывают. Инвариантность относительно преобразований пространственных отражений (смотри условия (1.43)) дает

$$c^1_{12} = \pm c^1_{13}, \quad c^1_{21} = \pm c^1_{31}. \tag{2.13}$$

Возможность лагранжевой формулировки теории приводит к условию

$$c^1_{12} = \frac{\eta^1_{11}}{\eta^1_{23}} (c^1_{31})^*. \tag{2.14}$$

Ненулевые элементы матрицы билинейной инвариантной формы

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \eta^0_{11},$$
$$\eta^1 = \begin{pmatrix} \eta^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^1_{23} \\ 0 & \eta^1_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

выберем следующим способом:

$$-\eta^0_{11} = \eta^1_{11} = \pm\eta^1_{23} = \pm\eta^1_{32} = 1. \tag{2.16}$$

Тогда из соотношения (2.14) с учетом (2.13) приходим к равенствам

$$c^1_{21} = (c^1_{12})^*, \quad c^1_{31} = (c^1_{13})^*. \tag{2.17}$$

Выбирая $c^1_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, для блока C^1 получаем выражение

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

где знаки «+» и «–» коррелируют между собой. Блок C^1 (2.18) имеет единственное с точностью до знака ненулевое собственное значение 1, то есть построенное РВУ описывает частицу с ненулевой массой и спином $s = 1$. Соотношения (2.8), (2.9) здесь также выполняются. В литературе данное РВУ называют уравнением Даффина – Кеммера для векторной частицы.

Приведем еще его тензорную формулировку:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \quad -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{2.19}$$

Из системы первого порядка (2.19) получается уравнение второго порядка (уравнение Прока)

$$(\Box - m^2)\psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu = 0. \tag{2.20}$$

Простейшее уравнение для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ (уравнение Дирака) основывается на схеме зацеплений (1.13), соответствующей биспинору первого ранга. Матрица Γ_4 этого уравнения, представленного в стандартной форме (1.1), в базисе Гельфанда – Яглома запишется следующим образом:

$$\Gamma_4 = C^{1/2} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12}^{1/2} \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21}^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

(смысл нижних индексов здесь очевиден: $(0, \frac{1}{2}) \sim 1$, $(\frac{1}{2}, 0) \sim 2$). Применяя к элементам этой матрицы условия (1.41), (1.42), (1.48), будем иметь

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \otimes I_2. \tag{2.22}$$

Остальные матрицы Γ_i имеют при этом вид

$$\Gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \Gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad \Gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \tag{2.23}$$

где σ_i – матрицы Паули. Матрица билинейной формы совпадает с матрицей Γ_4:

$$\eta = \Gamma_4. \tag{2.24}$$

Матрицы Дирака удовлетворяют алгебре

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{2.25}$$

и минимальному уравнению

$$\Gamma_\mu^2 - 1 = 0 \quad \text{(где нет суммирования по } \mu). \tag{2.26}$$

В дальнейшем, следуя сложившейся традиции, матрицы Дирака будем обозначать через γ_μ.

Заметим, что с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

матрицу $\Gamma_4 = \gamma_4$ можно привести к виду

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes I_2, \tag{2.28}$$

не изменяя при этом вида выражений для матриц $\Gamma_i = \gamma_i$.

Условие положительной дефинитности заряда (1.36) имеет в рассматриваемом случае $(n = 0)$ вид

$$(\mathrm{Sp}(\gamma_4 \eta))^2 - (\mathrm{Sp}\, \eta)^2 > 0. \tag{2.29}$$

Поскольку

$$\mathrm{Sp}\,\eta = \mathrm{Sp}\,\gamma_4 = 0, \quad \mathrm{Sp}(\gamma_4\eta) = 4,$$

условие (2.29) выполняется.

Необходимо указать на важное свойство, которое объединяет рассмотренные выше РВУ. Нетрудно видеть, что матрицы Γ_4 в уравнениях Даффина – Кеммера для скалярной и векторной частиц, как и в случае уравнения Дирака, приводимы к диагональному виду.

В работах [8; 9] показано, что из всех конечномерных уравнений с приводимой к диагональному виду матрицей Γ_4 только уравнения Даффина – Кеммера имеют положительно определенную энергию и только уравнение Дирака имеет положительно определенный заряд. Возможны, однако, уравнения с положительной энергией или зарядом, у которых Γ_4 неприводима к диагональному виду. Ниже мы рассмотрим примеры таких уравнений.

Самым простым и известным среди РВУ такого типа является уравнение Фирца – Паули для спина $s = \frac{3}{2}$. Дадим его формулировку в подходе Гельфанда – Яглома. С этой целью возьмем схему зацеплений (1.16) неприводимых представлений группы Лоренца и проанализируем ее с точки зрения возможности построения всевозможных теорий спина $s = \frac{3}{2}$.

Матрица Γ_4 уравнения (1.1), соответствующего набору представлений, содержащихся в (1.16), будет иметь в базисе Гельфанда – Яглома вид

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^{1/2} \otimes I_2 & 0 \\ 0 & C^{3/2} \otimes I_4 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{34}^{3/2} \\ c_{43}^{3/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^{1/2} & c_{13}^{1/2} & 0 \\ c_{21}^{1/2} & 0 & 0 & c_{24}^{1/2} \\ c_{31}^{1/2} & 0 & 0 & c_{34}^{1/2} \\ 0 & c_{42}^{1/2} & c_{43}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

где использована нумерация $(0, \frac{1}{2}) \sim 1$, $(\frac{1}{2}, 0) \sim 2$, $(\frac{1}{2}, 1) \sim 3$, $(1, \frac{1}{2}) \sim 4$. Матрица η имеет аналогичную структуру

$$\eta = (\eta^{1/2} \otimes I_2) \oplus (\eta^{3/2} \otimes I_4),$$

причем отличными от нуля элементами ее блоков $\eta^{1/2}$, $\eta^{3/2}$ являются

$$\eta_{12}^{1/2} = \eta_{21}^{1/2}, \quad \eta_{34}^{1/2} = \eta_{43}^{1/2} = -\eta_{34}^{3/2} = -\eta_{43}^{3/2}.$$

Требование инвариантности теории относительно преобразований собственной группы Лоренца приводит в данном случае к соотношениям

$$c_{34}^{3/2} = 2c_{34}^{1/2}, \quad c_{43}^{3/2} = 2c_{43}^{1/2}. \tag{2.32}$$

Для P-инвариантности строящегося РВУ необходимо выполнение равенств (см. условия (1.42)–(1.45))

$$\begin{aligned} &c_{12}^{1/2} = c_{21}^{1/2}, \quad c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2}, \\ &c_{13}^{1/2} = c_{24}^{1/2}, \quad c_{31}^{1/2} = c_{42}^{1/2}, \quad c_{34}^{3/2} = c_{43}^{3/2}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Наконец, возможность получения искомого РВУ из инвариантной функции Лагранжа в соответствии с (1.48) накладывает на элементы c_{ij}^{s} матрицы Γ_4 ограничения

$$c_{12}^{1/2}, c_{21}^{1/2}, c_{34}^{1/2}, c_{43}^{1/2} \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

и

$$\begin{aligned} c_{42}^{1/2}\eta_{21}^{1/2} &= (c_{13}^{1/2})^{*}\eta_{43}^{1/2}, \\ c_{31}^{1/2}\eta_{12}^{1/2} &= (c_{24}^{1/2})^{*}\eta_{34}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Для удобства дальнейших рассуждений перепишем условия (2.35) следующим образом:

$$c_{42}^{1/2} = (c_{13}^{1/2})^{*}f, \quad c_{31}^{1/2} = (c_{24}^{1/2})^{*}f, \quad f = \frac{\eta_{34}^{1/2}}{\eta_{12}^{1/2}} = \frac{\eta_{43}^{1/2}}{\eta_{21}^{1/2}}. \tag{2.36}$$

Не уменьшая общности, параметр f можно выбрать равным $+1$ или -1, что равносильно двум существенно различным способам задания матрицы η:

$$-\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{34}^{3/2} = 1, \tag{2.37}$$

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{34}^{3/2} = 1. \tag{2.38}$$

На первом этапе рассмотрим всевозможные РВУ для спина $s = \frac{3}{2}$, накладывая лишь ограничения (2.32), (2.34), (2.35), то есть включая в множество полученных таким образом РВУ как P-инвариантные, так и P-неинвариантные уравнения. Для спинового блока $C^{3/2}$ существует, с точностью до эквивалентности, единственный вариант выбора его элементов: $c_{34}^{3/2} = c_{43}^{3/2} = 1$. Отсюда согласно (2.32) имеем $c_{34}^{1/2} = c_{43}^{1/2} = \frac{1}{2}$, и блоки $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ принимают вид

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ fd^{*} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & fc^{*} & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

где для краткости введены обозначения

$$c_{12}^{1/2} = a, \quad c_{21}^{1/2} = b, \quad c_{13}^{1/2} = c, \quad c_{24}^{1/2} = d.$$

Чтобы на основе матриц (2.39) получить РВУ, описывающее чистый спин $s = \frac{3}{2}$, необходимо потребовать обращения в нуль всех корней характеристического уравнения для спинового блока $C^{1/2}$

$$\lambda^4 - \left(fc^*d + fcd^* + ab + \frac{1}{4}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}fa|d|^2 - \frac{1}{2}fb|c|^2 + |c|^2|d|^2\right) = 0. \tag{2.40}$$

Корни этого уравнения будут равными нулю при выполнении условий

$$\begin{gathered}\frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}fa|d|^2 - \frac{1}{2}fb|c|^2 + |c|^2|d|^2 = 0,\\ fc^*d + fcd^* + ab + \frac{1}{4} = 0.\end{gathered} \tag{2.41}$$

Структура (2.39) спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 соответствует некоторому обобщенному РВУ, из которого при определенных способах выбора параметров a, b, c, d получаются формулировки тех или иных конкретных уравнений для частицы со спином $\frac{3}{2}$. Учитывая возможности (2.37) и (2.38) задания матрицы билинейной формы η, целесообразно ввести классы РВУ первого типа с матрицами

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ d^* & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & c^* & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad f = +1, \tag{2.42}$$

и РВУ второго типа с матрицами

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & a & c & 0 \\ b & 0 & 0 & d \\ -d^* & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -c^* & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad f = -1. \tag{2.43}$$

В случае РВУ второго типа система (2.41) допускает решение

$$a = b = -\frac{1}{2}, \quad c = d = \frac{1}{2},$$

которое приводит к матрице Γ_4 с блоками

$$C^{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Нетрудно убедиться, что при этом условия (2.33) также выполняются. Таким образом, получается P-инвариантное РВУ, которое представляет собой уравнение Фирца – Паули в формализме Гельфанда – Яглома.

Матрица Γ_4 (2.30), (2.43) уравнения Фирца – Паули удовлетворяет минимальному уравнению

$$\Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0 \tag{2.45}$$

и, следовательно, неприводима к диагональному виду. Условие дефинитности заряда (1.36) принимает в данном случае вид

$$\left(\mathrm{Sp}(\Gamma_4^3\eta)\right)^2 - \left(\mathrm{Sp}(\Gamma_4^2\eta)\right)^2 > 0. \tag{2.46}$$

Учитывая явные выражения для блоков $\eta^{1/2}$, $\eta^{3/2}$ матрицы η

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

получаем

$$\mathrm{Sp}(\Gamma_4^2\eta) = 0, \quad \mathrm{Sp}(\Gamma_4^3\eta) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{2.48}$$

Таким образом, условие (2.46) выполняется.

В рамках РВУ первого типа построить P-инвариантное РВУ, допускающее лагранжеву формулировку, нельзя. Действительно, условия (2.33) означают (в случае $f = +1$), что $a = b$, $c = d$, и тогда из (2.41) имеем $2|c|^2 + a^2 + \frac{1}{4} = 0$. Но это соотношение не может быть выполнено, поскольку параметр $a = c_{12}^{1/2}$, согласно (2.34), является вещественным.

Если же требование (2.33) не накладывать, то у системы (2.41) при $f = -1$ имеются решения

$$a = b = c = -d = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad a = b = -c = d = \frac{1}{2},$$

которые приводят к спиновым блокам

$$C^{1/2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

где знаки «+» и «–» соответствуют первому и второму решениям соответственно. Полученные указанным способом РВУ описывают частицу со спином $s = \frac{3}{2}$, допускают лагранжеву формулировку, но не являются инвариантными по отношению к операции пространственного отражения.

Анализ схемы зацеплений (1.16) в подходе Гельфанда – Яглома позволяет сделать одно важное заключение. В рамках РВУ первого типа, полагая

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = d = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{2.50}$$

приходим к матрице Γ_4, минимальный полином которой имеет вид (2.26). Такой выбор согласуется с условиями (2.32)–(2.35) и приводит к РВУ дираковского типа, описывающему *переменный спин* $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. В спин-тензорной форме оно имеет хорошо известный вид

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)_{\alpha\beta} \psi_\nu^\beta = 0, \tag{2.51}$$

являясь исходным для получения уравнения Рариты – Швингера путем наложения условий

$$\gamma_\nu \psi_\nu^\beta = 0, \quad \partial_\nu \psi_\nu^\beta = 0. \tag{2.52}$$

Поскольку эти условия, вырезающие лишний спин $\frac{1}{2}$, P-инвариантны и не изменяют структуры (2.37) матрицы билинейной формы, то очевидно, что уравнение Рариты – Швингера относится к РВУ первого типа. Уравнение же Фирца – Паули относится ко второму типу. Таким образом, обычно встречающееся в литературе [15; 16] отождествление этих уравнений нуждается в критическом переосмыслении.

3. РВУ с расширенным набором представлений группы Лоренца и внутренняя структура микрообъектов

Характерной особенностью всех рассмотренных выше РВУ является то, что в них используется набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для построения теории данного спина. При этом, в соответствии с идеологией релятивистской квантовой механики, трактующей элементарные частицы как точечные бесструктурные объекты, такие РВУ учитывают только спиновые свойства частиц. Возможность описания иных внутренних свойств частиц в ортодоксальном варианте теории РВУ не предусматривается.

Отказ от требования минимальности используемых наборов представлений группы Лоренца открывает новые возможности метода теории РВУ с точки зрения пространственно-временного (геометризованного) описания внутренних свойств частиц. Получение нераспадающихся по группе Лоренца уравнений, способных отображать внутреннюю структуру частицы с заданным спином s, возможно либо за счет включения в схему зацеплений представлений с более высокими весами, либо за счет использования кратных представлений группы Лоренца. В настоящей главе мы покажем, как в рамках подхода теории РВУ с расширенными наборами представлений группы Лоренца может осуществляться описание внутренней электромагнитной структуры частиц с низшими спинами.

Впервые РВУ для частицы со спином $s = \frac{1}{2}$, которое возникает за счет привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представления волновой функции, было предложено Петрашем [17]. Дадим сжатое изложение теории уравнения Петраша в подходе Гельфанда – Яглома. Для этого рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{tikzcd}
(0,\frac{1}{2})' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (\frac{1}{2},0)' \arrow[d, dash] \\
(\frac{1}{2},1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,\frac{1}{2}) \arrow[d, dash] \\
(0,\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (\frac{1}{2},0)\,.
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Пронумеруем неприводимые представления, содержащиеся в (3.1):

$$\begin{aligned}
&(0,\frac{1}{2}) \sim 1, \quad (0,\frac{1}{2})' \sim 2, \quad (1,\frac{1}{2}) \sim 3,\\
&(\frac{1}{2},0) \sim 4, \quad (\frac{1}{2},0)' \sim 5, \quad (\frac{1}{2},1) \sim 6.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда для спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4

$$\Gamma_4 = (C^{1/2} \otimes I_2) \oplus (C^{3/2} \otimes I_4) \tag{3.3}$$

получим выражения

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c^{1/2}_{14} & 0 & c^{1/2}_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^{1/2}_{25} & c^{1/2}_{26} \\ 0 & 0 & 0 & c^{1/2}_{34} & c^{1/2}_{35} & c^{1/2}_{36} \\ c^{1/2}_{41} & 0 & c^{1/2}_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^{1/2}_{52} & c^{1/2}_{53} & 0 & 0 & 0 \\ c^{1/2}_{61} & c^{1/2}_{62} & c^{1/2}_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & c^{3/2}_{36} \\ c^{3/2}_{63} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Для исключения спина $\frac{3}{2}$ надо положить

$$c^{3/2}_{36} = c^{3/2}_{63} = 0, \quad \text{или} \quad C^{3/2} = 0. \tag{3.5}$$

Отсюда в силу (1.41) следует

$$c^{1/2}_{36} = c^{1/2}_{63} = 0. \tag{3.6}$$

Условие (1.42) P-инвариатности теории приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
&c^{1/2}_{14} = c^{1/2}_{14}, \quad c^{1/2}_{25} = c^{1/2}_{52}, \quad c^{1/2}_{16} = c^{1/2}_{43},\\
&c^{1/2}_{26} = c^{1/2}_{53}, \quad c^{1/2}_{34} = c^{1/2}_{61}, \quad c^{1/2}_{35} = c^{1/2}_{62}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Возможность лагранжевой формулировки (формула (1.48)) дает

$$c^{1/2}_{14},\ c^{1/2}_{25} \in \mathbb{R}; \quad c^{1/2}_{34} = \frac{\eta^{1/2}_{63}}{\eta^{1/2}_{14}}(c^{1/2}_{16})^*, \quad c^{1/2}_{35} = \frac{\eta^{1/2}_{63}}{\eta^{1/2}_{25}}(c^{1/2}_{26})^*. \tag{3.8}$$

С учетом ограничений (3.5)–(3.8) для спинового блока $C^{1/2}$ получится выражение

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где для упрощения записи использованы обозначения

$$\begin{gathered} c_1 = c_{14}^{1/2}, \quad c_2 = c_{25}^{1/2}, \quad c_3 = c_{16}^{1/2}, \quad c_4 = c_{26}^{1/2}, \\ f_1 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{14}^{1/2}}, \quad f_2 = \frac{\eta_{63}^{1/2}}{\eta_{25}^{1/2}}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Характеристическое уравнение для блока C имеет вид

$$\lambda^3 - (c_1 + c_2)\lambda^2 + (c_1 c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2)\lambda + f_1 c_2|c_3|^2 + f_2 c_1|c_4|^2 = 0. \tag{3.11}$$

Чтобы получить одно значение массы, надо наложить условия

$$\begin{gathered} c_1 c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2 = 0, \\ f_1 c_2|c_3|^2 + f_2 c_1|c_4|^2 = 0. \end{gathered} \tag{3.12}$$

При этом ненулевое собственное значение блока C, не уменьшая общности, можно выбрать равным единице:

$$\lambda = c_1 + c_2 = 1. \tag{3.13}$$

Такой выбор приводит к следующим минимальным полиномам для спинового блока $C^{1/2}$ и матрицы Γ_4

$$(C^{1/2})^2[(C^{1/2})^2 - 1] = 0, \quad \Gamma_4^2(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{3.14}$$

Остается наложить условие дефинитности заряда (1.36), которое в рассматриваемом случае ($C^{3/2} = 0$, $n = 2$) принимает вид

$$\mathrm{Sp}\ \left((C^{1/2})^3 \eta^{1/2}\right) \neq 0, \tag{3.15}$$

где

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & \eta' \\ \eta' & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} \eta_{14}^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{36}^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Отсюда с учетом выражения (3.9) получаем неравенство

$$\eta_{14}^{1/2} c_1^3 + \eta_{25}^{1/2} c_2^3 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{14}^{1/2}) c_1|c_3|^2 + (2\eta_{63}^{1/2} + \eta_{25}^{1/2}) c_2|c_4|^2 \neq 0. \tag{3.17}$$

Совместное выполнение условий (3.12), (3.13), (3.17) можно обеспечить, выбирая, например

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad c_4 = \frac{2}{3}, \tag{3.18}$$

$$\eta_{14}^{1/2} = -1, \quad \eta_{25}^{1/2} = 1, \quad \eta_{36}^{1/2} = 1. \tag{3.19}$$

При этом матрицы C и η' принимают вид

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \\ -\sqrt{2}/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Таким образом, мы получили 20–компонентное РВУ со схемой зацеплений (3.1), с недиагонализируемой матрицей Γ_4, которое описывает частицу со спином $s = \frac{1}{2}$ и удовлетворяет необходимым физическим требованиям.

Теперь покажем, что на основе схемы зацеплений (3.1) можно построить также РВУ для частицы со спином $s = \frac{3}{2}$ [18]. Сохраняя прежнюю нумерацию неприводимых представлений, содержащихся в (3.1), опять приходим к общему виду (3.4) спиновых блоков $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ матрицы Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома.

Условия (1.41) релятивистской инвариантности приводят к ограничениям

$$c_{36}^{3/2} = 2c_{36}^{1/2}, \quad c_{63}^{3/2} = 2c_{63}^{1/2}. \tag{3.21}$$

Инвариантность РВУ относительно пространственных отражений помимо соотношений (3.7) дает

$$c_{36}^{1/2} = c_{63}^{1/2}, \quad c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2}. \tag{3.22}$$

Возможность лагранжевой формулировки теории дополняет условия (3.8) ограничением

$$c_{36}^{1/2} \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Поскольку нас в данном случае интересует спин $\frac{3}{2}$, не уменьшая общности, можно положить

$$c_{36}^{3/2} = c_{63}^{3/2} = 1. \tag{3.24}$$

При таком выборе условия (3.21)–(3.23) приводят к спиновым блокам $C^{1/2}$, $C^{3/2}$ вида

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ f_1 c_3^* & f_2 c_4^* & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

$$C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.26}$$

где использованы обозначения (3.10).

Характеристическое уравнение для матрицы C имеет вид

$$\lambda^3 - \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda^2 + \left(\frac{c_1 + c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1|c_3|^2 - f_2|c_4|^2\right)\lambda \\ - \frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 = 0. \tag{3.27}$$

Для исключения состояний со спином $\frac{1}{2}$ надо потребовать, чтобы все собственные значения блока $C^{1/2}$ были равными нулю. Это требование приводит к условиям

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} &= 0, \\ \frac{c_1 + c_2}{2} + c_1 c_2 - f_1 |c_3|^2 - f_2 |c_4|^2 &= 0, \\ -\frac{c_1 c_2}{2} + f_1 c_2 |c_3|^2 + f_2 c_1 |c_4|^2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

в которых числа f_1, f_2 могут независимо друг от друга принимать значения $+1$ или -1.

Нетрудно видеть, что условия (3.28) совместны, причем здесь (как и для спина $\frac{1}{2}$) в выборе параметров c_1, c_2, c_3, c_4, f_1, f_2 существует достаточно широкий произвол. Но при этом во всех случаях минимальные уравнения для спиновых блоков $C^{1/2}$ (3.25), $C^{3/2}$ (3.26) и матрицы Γ_4 имеют один и тот же вид

$$(C^{1/2})^3 = 0, \quad (C^{3/2})^2 - 1 = 0, \tag{3.29}$$

$$\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{3.30}$$

Поскольку в данной работе мы не ставим цель рассмотреть все имеющиеся возможности построения РВУ для спина $\frac{3}{2}$ на основе схемы зацеплений (3.1), то положим, например:

$$f_1 = -1, \quad f_2 = -1, \tag{3.31}$$

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -1, \quad |c_3| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |c_4| = \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{3.32}$$

Такой выбор приводит к матрице билинейной формы с блоками

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

и спиновому блоку $C^{1/2}$ матрицы Γ_4

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Условие дефинитности заряда в соответствии с (3.30) ($n = 3$) принимает вид

$$\left(\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^4\eta)\right)^2 - \left(\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^3\eta)\right)^2 < 0. \tag{3.35}$$

Используя полученные явные выражения для матриц Γ_4 и η, находим

$$\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^4\eta) = 0, \quad \mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^3\eta) = 8, \tag{3.36}$$

откуда следует, что неравенство (3.35) выполняется.

Для построения РВУ, описывающих микрообъекты со спинами $s = 0, 1$ и отличающихся от известных уравнений Даффина – Кеммера, рассмотрим набор неприводимых представлений группы Лоренца [19; 20]

$$(0,0) \oplus 2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0,1) \oplus (1,0), \tag{3.37}$$

образующих схему зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} & & (0,0) & & \\ & & | & & \\ (0,1) & — & 2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & — & (1,0), \end{array} \tag{3.38}$$

где векторное представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ имеет кратность, равную двум (в дальнейшем для различения этих представлений одно из них будем помечать штрихом).

Блочная структура матрицы Γ_4 РВУ, соответствующего схеме (3.37), в базисе Гельфанда – Яглома имеет вид (2.1). Пронумеровав содержащиеся в (3.37) неприводимые компоненты способом

$$(0,0) \sim 1, \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \sim 2, \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \sim 3, \quad (0,1) \sim 4, \quad (1,0) \sim 5, \tag{3.39}$$

после применения условий релятивистской и P-инвариантности теории получим для блоков C^0, C^1 выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 & c_{13}^0 \\ c_{21}^0 & 0 & 0 \\ c_{31}^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{24}^1 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{34}^1 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Ненулевые элементы матрицы билинейной формы η, которая в базисе Гельфанда – Яглома имеет вид

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 & 0 \\ 0 & \eta^1 \otimes I_3 \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} \eta_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta_{22}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{33}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{45}^1 \\ 0 & 0 & \eta_{54}^1 & 0 \end{pmatrix},$$

выберем следующим образом:

$$\eta^0_{11} = -\eta^0_{22} = \eta^0_{33} = \eta^1_{22} = -\eta^1_{33} = -\eta^1_{45} = -\eta^1_{54} = 1. \tag{3.42}$$

Тогда условие (1.48) возможности лагранжевой формулировки строящегося РВУ приводит к соотношениям

$$c^0_{21} = -(c^0_{12})^*, \quad c^0_{31} = (c^0_{13})^*, \quad c^1_{42} = -(c^1_{24})^*, \quad c^1_{43} = (c^1_{34})^*. \tag{3.43}$$

Остающийся произвол в выборе элементов матрицы Γ_4 можно использовать для получения РВУ с требуемым значением спина.

Так, полагая

$$c^0_{12} = 0, \quad c^0_{13} = c^1_{24} = c^1_{34} = 1, \tag{3.44}$$

придем к спиновым блокам

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Нетрудно убедиться в справедливости минимальных уравнений

$$(C^1)^3 = 0, \quad C^0[(C^0)^2 - 1] = 0, \tag{3.46}$$

$$\Gamma_4^3(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{3.47}$$

Из (3.46) вытекает, что состоянию со спином $s = 0$ соответствует одно значение массы, а все собственные значения блока C^1 равны нулю, то есть состояния со спином $s = 1$ отсутствуют. Таким образом, получаем РВУ для микрообъекта со спином $s = 0$ и одним значением массы.

Используя выражения (3.41), (3.42), (3.45) для матриц Γ_4 и η, нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^3\eta) = 0, \quad \mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^4\eta) = 2. \tag{3.48}$$

Отсюда вытекает справедливость условия дефинитности энергии, имеющего для данного РВУ вид неравенства (смотри (1.35), $n = 3$)

$$(-1)^4\left[\left(\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^4\eta)\right)^2 - \left(\mathrm{Sp}\,(\Gamma_4^3\eta)\right)^2\right] > 0. \tag{3.49}$$

Тензорная формулировка построенного РВУ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu\psi_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + m\psi'_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu - \partial_\mu\psi'_\nu + \partial_\nu\psi'_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где ψ_0 – скаляр, ψ_μ и ψ'_μ – 4-векторы, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга. Из (3.50) нетрудно получить уравнение второго порядка

$$(\Box - m^2)\psi_0 = 0, \tag{3.51}$$

означающее, что система (3.50) действительно описывает микрочастицу с ненулевой массой и спином $s = 0$.

Для построения на основе схемы зацеплений (3.37) РВУ для микрочастицы со спином $s = 1$ выберем элементы матрицы (3.41) следующим образом:

$$\eta^0_{11} = \eta^0_{22} = -\eta^0_{33} = -\eta^1_{22} = \eta^1_{33} = \eta^1_{45} = \eta^1_{54} = 1. \tag{3.52}$$

Тогда в соответствии с условиями (1.48) будем иметь

$$c^0_{21} = (c^0_{12})^*, \quad c^0_{31} = -(c^0_{13})^*, \quad c^1_{42} = -(c^1_{24})^*, \quad c^1_{43} = (c^1_{34})^*. \tag{3.53}$$

В рамках остающегося произвола в выборе элементов спиновых блоков C^0, C^1 (3.40) возьмем

$$\begin{gathered} c^0_{12} = c^0_{13} = c^0_{21} = -c^0_{31} = 1, \\ c^1_{24} = c^1_{42} = 0, \quad c^1_{34} = c^1_{43} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{gathered} \tag{3.54}$$

В результате получаем для матриц η^0, η^1, C^0, C^1 окончательные выражения

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Легко убедиться, что минимальные уравнения для спиновых блоков (3.56) матрицы Γ_4 имеют вид

$$(C^0)^3 = 0, \quad C^1[(C^1)^2 - 1] = 0, \tag{3.57}$$

то есть данное РВУ действительно описывает микрочастицу со спином $s = 1$.

Из (3.57) следует, что минимальное уравнение для матрицы Γ_4 совпадает с аналогичным по смыслу уравнением (3.47) для скалярной частицы. Поэтому и условие дефинитности энергии совпадает здесь с (3.49). Используя определения (3.55), (3.56), убеждаемся в справедливости условия (3.49) и в случае обсуждаемого РВУ для векторной частицы.

Тензорная формулировка полученного РВУ с расширенным набором представлений для частицы со спином 1 такова:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + \partial_\mu \psi'_\mu + m\psi_0 &= 0, \\ \partial_\lambda \psi_{[\mu\lambda]} - \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu &= 0, \\ \partial_\mu \psi_0 + m\psi'_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi'_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} &= 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Из системы (3.58) вытекают уравнения

$$(\Box - m^2)(\psi_\mu + \psi'_\mu) = 0, \quad \partial_\mu(\psi_\mu + \psi'_\mu) = 0, \tag{3.59}$$

которые однозначно указывают на то, что данная система действительно описывает векторную частицу с ненулевой массой.

Иные варианты расширенных РВУ для частиц с низшими спинами предлагаются в работах [21] (спин $\frac{1}{2}$), [22] (спин 0), [23] (спин 1).

Вопрос о физической неэквивалентности РВУ с минимальным и расширенным наборами представлений группы Лоренца для конкретных уравнений впервые был рассмотрен в работах [24; 25] (спин $\frac{1}{2}$), [19; 20] (спины $0, 1$), [26] (спин $\frac{3}{2}$). Общее исследование этого вопроса для частиц с произвольным спином s и одной массой, взаимодействующих с электромагнитным полем, проведено в работах [27; 28].

Суть и основные результаты проведенного в [27; 28] исследования заключаются в следующем.

Сначала рассматриваются минимальное и расширенное уравнения для свободных частиц

$$(\Gamma_\mu^{(0)} \partial_\mu + m)\Psi_0(x) = 0, \tag{3.60}$$

$$(\Gamma_\mu^{(1)} \partial_\mu + m)\Psi_1(x) = 0, \tag{3.61}$$

заданные в пространствах неприводимых представлений группы Лоренца T_0 и $T_1 = T_0 + T'$ соответственно. Далее находится вид операторов R и K, переводящих ψ_0 в ψ_1 и обратно:

$$R = (A, 0), \quad K = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \tag{3.62}$$

$$R\Psi_1 = (A, 0)\begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = A\Psi_1^0 = \Psi_0, \tag{3.63}$$

$$K\Psi_0 = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}\Psi_0 = \begin{pmatrix} F\Psi_0 \\ G\Psi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1^0 \\ \Psi_1^1 \end{pmatrix} = \Psi_1. \tag{3.64}$$

Здесь A, F – прямоугольные числовые матрицы, удовлетворяющие условию

$$AF = I, \tag{3.65}$$

матрица G в общем случае содержит операторы дифференцирования. При этом для операторов R и K будем иметь

$$R\Gamma_{\mu}^{(1)}K = \Gamma_{\mu}^{(0)} + B_{\mu}, \tag{3.66}$$

где матрицы B_{μ} удовлетворяют уравнению

$$B_{\mu}\partial_{\mu}\Psi_{0}(x) = 0. \tag{3.67}$$

Затем рассматриваются уравнения

$$(\Gamma_{\mu}^{(0)}\mathcal{D}_{\mu} + m)\Phi_{0}(x) = 0, \tag{3.68}$$
$$(\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu} + m)\Phi_{1}(x) = 0, \tag{3.69}$$

которые описывают частицы, взаимодействующие с электромагнитным полем $A_{\mu}(x)$, введенным минимальным образом:

$$\partial_{\mu} \to \mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}. \tag{3.70}$$

Оператор R, осуществляющий переход от функции $\Phi_{1}(x)$ к $\Phi_{0}(x)$, имеет тот же вид, что и в случае свободной частицы. Для оператора K', осуществляющего обратный переход в случае взаимодействующей частицы, получим

$$K' = \begin{pmatrix} F \\ G + G' \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

где добавка G' обусловлена подстановкой (3.70). Уравнение (3.68) при этом приводится к виду

$$(R\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu}K' + m)\Phi_{0}(x) = 0, \tag{3.72}$$

или

$$(\Gamma_{\mu}^{(0)}\mathcal{D}_{\mu} + Q + m)\Phi_{0}(x) = 0, \tag{3.73}$$

где

$$Q \sim R\Gamma_{\mu}^{(1)}\mathcal{D}_{\mu}G' + B_{\mu}\mathcal{D}_{\mu}. \tag{3.74}$$

Таким образом, после приведения уравнения (3.69) к уравнению типа (3.68) относительно волновой функции с минимально необходимым числом компонент в последнем появляется дополнительное слагаемое Q (3.74). Для частиц со спинами $s = \frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$, описываемых рассмотренными выше РВУ с расширенными наборами представлений, данное слагаемое принимает вид

$$Q \sim \frac{ie}{m}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})J^{[\mu\nu]} = \frac{ie}{m}F_{[\mu\nu]}J^{[\mu\nu]}, \tag{3.75}$$

где $J^{[\mu\nu]}$ – генераторы представлений группы Лоренца в пространствах представлений (1.13) и (1.16), соответственно. В нерелятивистском приближении оно описывает дополнительный (аномальный) магнитный момент и приводит в лагранжиане к члену взаимодействия типа Паули.

В случае рассмотренных выше расширенных РВУ для частиц с целыми низшими спинами дополнительное слагаемое Q имеет вид

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\mu\nu]} e^{00}, \tag{3.76}$$

$$Q \sim \frac{e^2}{m} F_{[\mu\nu]} F_{[\rho\sigma]} e^{[\mu\nu],[\rho\sigma]}, \tag{3.77}$$

где e^{AB} – обобщенные символы Кронекера, определяемые по формулам [29]

$$(e^{AB})_{CD} = \delta_{AC}\delta_{BD}. \tag{3.78}$$

В случае частицы со спином $s = 0$ член Q (3.76) в нерелятивистском приближении описывает наведенные во внешнем электромагнитном поле дипольные электрическую и магнитную поляризуемости этой частицы. Для частицы со спином $s = 1$ аналогичный член (3.77) описывает ее статическую тензорную электрическую поляризуемость.

Очевидно, что дополнительное взаимодействие с внешним электромагнитным полем должно влиять на вид матричных элементов конкретных процессов рассеяния. Подробные расчеты некоторых таких процессов проделаны в работах [19–28]. Показано, что в первом порядке теории возмущений указанное взаимодействие не проявляется. Например, рассеяние на кулоновском центре происходит одинаковым образом как в случае РВУ с минимальным, так и расширенным набором представлений группы Лоренца. Расчет сечений типичного процесса второго порядка – комптоновского рассеяния света на частицах, описываемых РВУ с расширенными наборами представлений – приводит во всех случаях к матричным элементам вида

$$M_1 = M_0 + M'. \tag{3.79}$$

Здесь M_0 – матричный элемент, отвечающий частице, которая описывается РВУ с минимальным набором представлений; M' – добавка, обусловленная наличием у частицы внутренней электромагнитной структуры. Явные выражения для этих добавок можно найти в вышеуказанных работах.

Таким образом, простое расширение используемого набора представлений, в том числе за счет включения в него повторяющихся неприводимых компонент, позволяет отразить внутреннюю структуру частиц в рамках обычного пространственно-временного описания методами теории РВУ. Очевидно, что в принципиальном отношении такой подход обладает преимуществом по сравнению с распространенным феноменологическим подходом, при котором дополнительные члены, описывающие специфические структурные эффекты, вводятся в лагранжиан вручную.

В заключение отметим немаловажное обстоятельство: все рассмотренные в данном параграфе «расширенные» РВУ для низших спинов свободны от трудностей, имеющих место при введении электромагнитного взаимодействия минимальным образом в теориях высших спинов. Они являются перенормируемыми и не содержат непричинных решений, несмотря на недиагонализируемый характер матрицы Γ_4 (см. в этой связи, например, [22; 30]).

4. РВУ для киральной частицы со спином 1

В предыдущем параграфе было показано, что РВУ с расширенным наборами неприводимых представлений группы Лоренца (включая кратные) позволяют учитывать внутреннюю структуру элементарных частиц в рамках не распадающихся в релятивистски-инвариантном смысле уравнений. Вместе с тем использование кратных представлений в теории РВУ позволяет осуществлять также пространственно-временное описание дополнительных (помимо спина) внутренних степеней свободы частиц. Во избежание недопонимания отметим, что под пространственно-временным описанием в данном контексте понимается использование РВУ, не распадающихся в смысле полной группы Лоренца. Иными словами, речь идет об описании внутренних свойств элементарных частиц без включения в рассмотрение полевых индексов нелоренцевского происхождения.

Продемонстрируем сказанное на примере киральности – степени свободы, которая связана с двукратным вырождением состояний, сопряженных относительно операции пространственной инверсии. Понятие киральности в настоящее время широко используется в адронной физике, в которой оно появляется при пренебрежении массами легких u- и d-кварков. Уже существует ряд экспериментов при низких энергиях, результаты которых свидетельствуют в пользу существования взаимодействий, переносимых киральными частицами со спином 1. Подробный обзор по всем этим вопросам можно найти в [31].

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$\begin{tikzcd} & (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \arrow[dr, dash] & \\ (0,1) \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & (1,0), \\ & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

которая содержит двукратное представление $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (как и в (3.38), штрих здесь введен для различения одинаковых компонент). Матрица Γ_4 РВУ, отвечающего схеме (4.1), имеет в базисе Гельфанда – Яглома квазидиагональную форму (2.1). Введем, как обычно, нумерацию представлений

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \sim 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \sim 2, \quad (0,1) \sim 3, \quad (1,0) \sim 4. \tag{4.2}$$

Поскольку компоненты 1 и 2, формирующие спиновый блок C^0, не зацепляются, получаем

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

то есть спин $s = 0$ здесь отсутствует.

Для блока C^1 имеем следующее общее выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{13} & c^1_{14} \\ 0 & 0 & c^1_{23} & c^1_{24} \\ c^1_{31} & c^1_{32} & 0 & 0 \\ c^1_{41} & c^1_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.4)$$

Требование инвариантности строящегося РВУ относительно преобразований собственной группы Лоренца в данном случае на элементы c^1_{ij} никаких ограничений не накладывает. Инвариантность относительно операции P-инверсии приводит к условиям

$$c^1_{14} = \pm c^1_{13}, \quad c^1_{41} = \pm c^1_{31}, \quad c^1_{24} = \pm c^1_{23}, \quad c^1_{42} = \pm c^1_{32}. \qquad (4.5)$$

При этом в соответствии с формулами (1.43)–(1.45) знак «+» («–») здесь берется тогда, когда оба представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ в схеме (4.1) являются истинно векторными (псевдовекторными). В указанных случаях получаем для спинового блока C^1 выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{13} & \pm c^1_{13} \\ 0 & 0 & c^1_{23} & \pm c^1_{23} \\ c^1_{31} & c^1_{32} & 0 & 0 \\ \pm c^1_{31} & \pm c^1_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

где одновременно берутся верхние либо нижние знаки.

Характеристическое уравнение блока C^1 имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c^1_{13}c^1_{31} + c^1_{23}c^1_{32}) = 0. \qquad (4.7)$$

Отсюда следует, что этот блок имеет единственное с точностью до знака ненулевое собственное значение

$$\lambda = \pm\sqrt{2(c^1_{13}c^1_{31} + c^1_{23}c^1_{32})}. \qquad (4.8)$$

Другими словами, состояние со спином 1 не содержит дополнительных внутренних степеней свободы. Очевидно, что полученное таким образом РВУ сводится к уравнению Дирака – Кэлера для векторной частицы.

Иначе обстоит дело, когда одно из векторных представлений в схеме (4.1) – векторное, а второе – псевдовекторное. В этом случае требование P-инвариантности теории приводит к условиям

$$c^1_{14} = c^1_{13}, \quad c^1_{41} = c^1_{31}, \quad c^1_{24} = -c^1_{23}, \quad c^1_{42} = -c^1_{32} \qquad (4.9)$$

и соответственно к спиновому блоку C^1

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{13} & c^1_{13} \\ 0 & 0 & c^1_{23} & -c^1_{23} \\ c^1_{31} & c^1_{32} & 0 & 0 \\ c^1_{31} & -c^1_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.10)$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(c^1_{13}c^1_{31} + c^1_{23}c^1_{32}) + 4c^1_{13}c^1_{31}c^1_{23}c^1_{32} = 0. \tag{4.11}$$

Решения уравнения (4.11) $\lambda_1 = \pm\sqrt{2c^1_{13}c^1_{31}}$ и $\lambda_2 = \pm\sqrt{2c^1_{23}c^1_{32}}$ означают, что речь может идти о частице со спином $s = 1$ и, вообще говоря, двумя значениями массы

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{2c^1_{13}c^1_{31}}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{2c^1_{23}c^1_{32}}}. \tag{4.12}$$

Однако, если положить

$$c^1_{13}c^1_{31} = c^1_{23}c^1_{32}, \tag{4.13}$$

мы приходим к РВУ для частицы с одной массой, но двукратным вырождением состояний по некоторому дополнительному квантовому числу.

Произвол, остающийся в выборе элементов c^1_{ij} блока C^1 (4.10) после наложения на них условия (4.13), используем для получения лагранжевой формулировки интересующего нас РВУ. Для этого элементы η^0_{ij}, η^1_{ij} матрицы билинейной формы η зададим следующим образом:

$$-\eta^0_{11} = \eta^0_{22} = \eta^1_{11} = -\eta^1_{22} = \eta^1_{34} = \eta^1_{43} = 1. \tag{4.14}$$

Тогда требование (1.48) релятивистской инвариантности лагранжиана теории приводит к равенствам

$$c^1_{31} = (c^1_{13})^*, \quad c^1_{32} = -(c^1_{23})^*. \tag{4.15}$$

Не уменьшая общности, все еще остающиеся произвольными элементы c^1_{13}, c^1_{23} можно выбрать, например, так:

$$c^1_{13} = c^1_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.16}$$

(при этом собственные значения блока C^1 будут равными ± 1).

Таким образом, для ненулевого блока C^1 матрицы Γ_4 и блоков η^0, η^1 матрицы η находим окончательно вид

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Для выяснения смысла двукратного вырождения состояний микрообъекта, описываемого полученным РВУ, удобно использовать его тензорную формулировку

$$\begin{aligned}&\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]}+m\psi_\mu=0,\\&\partial_\nu\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}+m\tilde{\psi}_\mu=0,\\-&\partial_\mu\psi_\nu+\partial_\nu\psi_\mu+\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{\psi}_\beta+m\psi_{[\mu\nu]}=0,\end{aligned}\tag{4.19}$$

где величины ψ_μ, $\tilde{\psi}_\mu$, $\psi_{[\mu\nu]}$ сопоставляются представлениям $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$, $(0,1)\oplus(1,0)$ соответственно,

$$\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\alpha\beta]},\tag{4.20}$$

и $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви–Чивита ($\varepsilon_{1234}=-i$).

Осуществляя в системе (4.19) подстановки

$$\begin{aligned}\varphi_\mu&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\mu-i\tilde{\psi}_\mu),\quad \varphi_{[\mu\nu]}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{[\mu\nu]}-i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}),\\\chi_\mu&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_\mu+i\tilde{\psi}_\mu),\quad \chi_{[\mu\nu]}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{[\mu\nu]}+i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}),\end{aligned}\tag{4.21}$$

преобразуем ее к прямой сумме двух семикомпонентных подсистем:

$$\begin{aligned}&\partial_\nu\varphi_{[\mu\nu]}+m\varphi_\mu=0,\\-&\partial_\mu\varphi_\nu+\partial_\nu\varphi_\mu+i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi_\beta+m\varphi_{[\mu\nu]}=0\end{aligned}\tag{4.22}$$

и

$$\begin{aligned}&\partial_\nu\chi_{[\mu\nu]}+m\chi_\mu=0,\\-&\partial_\mu\chi_\nu+\partial_\nu\chi_\mu-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\chi_\beta+m\chi_{[\mu\nu]}=0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Подсистемы (4.22), (4.23) инвариантны в смысле преобразований собственной группы Лоренца. Однако при операции пространственного отражения они переходят друг в друга. Так что по отношению к преобразованиям полной группы Лоренца система (4.22), (4.23), а значит и система (4.19), является нераспадающейся. Кроме того, заметим, что подсистемам (4.22), (4.23) по отдельности нельзя сопоставить удовлетворяющий стандартным требованиям лагранжиан. Корректная лагранжева формулировка возможна только для системы (4.22), (4.23), рассматриваемой в целом.

Итак, двукратно вырожденные состояния векторной частицы, описываемой построенным РВУ, связаны между собой операцией P-инверсии. Следовательно, дополнительное квантовое число, о котором идет речь, различает указанные P- сопряженные состояния и может трактоваться как киральность по аналогии с понятием киральности для безмассовых частиц.

Здесь важно отметить следующее. Как известно, для построения теории безмассовых частиц с киральностью S достаточно использования только представлений $(0,S)$ и $(S,0)$, причем понятия киральности и спиральности (проекции спина на направление импульса) в этом случае, по существу, совпадают. В случае частиц с ненулевой массой это уже не так: во-первых, понятия киральности и спиральности для них не совпадают; во-вторых, теория таких частиц, как ясно из вышеизложенного, с необходимостью базируется на наборе *зацепляющихся* неприводимых представлений группы Лоренца, включая кратные компоненты. Возможный физический смысл киральности применительно к обладающим массой виртуальным частицам будет обсужден в главе 7.

5. Тензорные РВУ дираковского типа и геометризованное описание внутренних степеней свободы фундаментальных частиц

Поскольку существование дополнительных внутренних квантовых чисел у фундаментальных частиц является в настоящее время твердо установленным фактом, возникает вопрос о возможности применения теории РВУ к описанию степеней свободы, связанных с внутренними, в том числе калибровочными, симметриями. Традиционные калибровочные теории фундаментальных частиц и их взаимодействий базируются, как правило, на уравнении Дирака, волновая функция которого снабжается свободным нелоренцевским индексом, играющим роль внутренней переменной. С точки зрения теории РВУ, такой подход означает фактически использование распадающихся по группе Лоренца уравнений. На этой основе строятся известные модели электрослабых и сильных взаимодействий, стандартная $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ модель.

Однако данный подход не в состоянии решить ряд проблем, в частности, он оказывается малоэффективным при включении в общую схему гравитационного взаимодействия. Решение этой и многих других проблем в настоящее время связывается, главным образом, с использованием групп симметрии, преобразования которых содержали бы на равных пространственно-временные и внутренние переменные. Иначе говоря, речь идет о возможности геометризованного введения внутренних степеней свободы.

Перечислим вкратце наиболее известные подходы в этом направлении:

– теории типа Калуцы – Клейна, в которых пространство–время имеет размерность, большую четырех, причем дополнительные измерения рассматриваются как равноправные с четырьмя наблюдаемыми. Компактификация «лишних» измерений приводит к выделению внутренних степеней свободы, сохраняя их геометрический статус;

– суперсимметрия–супергравитация, объединяющая частицы с разными спинами и статистикой в единые супермультиплеты. Одна из исходных посылок здесь заключается в том, что существует новая математическая структура – преобразования суперсимметрии, которые перемешивают бозонные и фермионные поля. В результате точно так же, как преобразования Лоренца обнаруживают связь между собственно пространством и временем, преобразования суперсимметрии связывают в одно целое пространство–время и внутренние степени свободы частиц;

– струнные и суперструнные модели, включающие в себя идеи Калуцы – Клейна и суперсимметрии, калибровочного подхода и теории относительности.

Однако можно предложить и иной способ геометризованного описания внутренних степеней свободы, основанный на применении расширенного (включая кратные) набора неприводимых представлений группы Лоренца в подходе теории РВУ. Естественной возможностью в этом плане является использование не распадающихся по полной группе Лоренца уравнений, волновая функция которых обладает трансформационными свойствами прямого произведения (полного или усеченного) дираковских биспиноров, а матрицы Γ_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака. В дальнейшем такие РВУ будем называть диракоподобными, или уравнениями дираковского типа.

Наиболее известным РВУ указанного типа является уравнение Дирака – Кэлера (ДК), которое представляет собой максимально общее дифференциальное уравнение (систему уравнений) первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. С другой стороны, в соответствующем базисе (будем называть его фермионным) волновая функция уравнения ДК обладает лоренцевскими трансформационными свойствами прямого произведения дираковского биспинора на зарядово-сопряженный биспинор. В тензорной формулировке уравнение ДК может быть представлено в виде системы

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0,\\
&\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0,\\
-&\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + m\psi_{[\mu\nu]} = 0,\\
&\partial_\mu \tilde{\psi}_\mu + m\tilde{\psi}_0 = 0,\\
&\partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu = 0,\\
&\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \partial_\mu \tilde{\psi}_0 + m\tilde{\psi}_\mu = 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь ψ_0 – скаляр, ψ_μ – вектор, $\psi_{[\mu\nu]}$ – антисимметричный тензор второго ранга, $\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – псевдовектор, дуально сопряженный антисимметричному тензору третьего ранга $\psi_{[\nu\alpha\beta]}$, и $\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, дуально сопряженный антисимметричному тензору четвертого ранга $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$.

Система (5.1) является не распадающейся в смысле полной группы Лоренца. Она может быть записана в стандартной для теории РВУ матрично-дифференциальной форме (1.1), где волновая функция Ψ представляет собой столбец с тензорными компонентами

$$\Psi = (\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]})^T, \tag{5.2}$$

а матрицы Γ_μ размерности 16×16 имеют вид

$$\begin{aligned}
&\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{(+)} + \Gamma_\mu^{(-)},\\
&\Gamma_\mu^{(+)} = e^{\tilde{0}\tilde{\mu}} + e^{\tilde{\mu}\tilde{0}} + e^{\lambda,[\lambda\mu]} + e^{[\lambda\mu],\lambda},\\
&\Gamma_\mu^{(-)} = e^{0\mu} + e^{\mu 0} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}(e^{\tilde{\lambda},[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta],\tilde{\lambda}}).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Используя известные правила перемножения обобщенных символов Кронекера [29], можно убедиться, что матрицы Γ_μ (5.3) удовлетворяют алгебре матриц Дирака

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

Для установления группы внутренней симметрии поля ДК удобно от тензорного базиса (5.2) перейти к фермионному базису, в котором матрицы Γ_μ и матрица η лоренц-инвариантной билинейной формы имеют вид

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_4, \tag{5.5}$$

$$\eta = \gamma_4 \otimes \gamma_4. \tag{5.6}$$

Напомним, что под преобразованием внутренней симметрии РВУ (1.1) понимаются линейные преобразования волновой функции

$$\Psi'(x) = Q\Psi(x), \tag{5.7}$$

не затрагивающие пространственно-временных координат и оставляющие инвариантным уравнение (1.1) и его лагранжиан (1.26). Для этого матрицы Q должны удовлетворять условиям

$$[\Gamma_\mu, Q]_- = 0, \tag{5.8}$$

$$Q^+\eta Q = \eta. \tag{5.9}$$

Применение условий (5.8), (5.9) к матрицам Γ_μ и η приводит к некомпактной 15-параметрической группе $SU(2,2)$, генераторами которой могут служить эрмитовые матрицы

$$\Gamma'_\mu, \quad \Gamma'_5, \quad i\Gamma'_\mu\Gamma'_5, \quad i\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{i}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu). \tag{5.10}$$

Здесь

$$\Gamma'_5 = \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4 \tag{5.11}$$

и

$$\Gamma'_\mu = \Gamma^{(+)}_\mu - \Gamma^{(-)}_\mu \tag{5.12}$$

второй набор матриц размерности 16×16, удовлетворяющих, как и Γ_μ, алгебре матриц Дирака и коммутирующих с матрицами Γ_μ. В фермионном базисе эти матрицы имеют вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \tag{5.13}$$

Отличительной особенностью группы внутренней симметрии уравнения ДК является то, что ее генераторы (5.10) не коммутируют с лоренцевскими генераторами

$$J_{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}) \tag{5.14}$$

представления волновой функции Ψ. При этом группа G алгебры полной инвариантности уравнения ДК является полупрямым произведением группы лоренцевских преобразований Λ и группы внутренней симметрии Q: $G = \Lambda \oslash Q$. С другой стороны, группу

G можно представить в виде прямого произведения $G = \Lambda' \otimes Q$, где Λ' – переопределенная группа Лоренца, по отношению к которой волновая функция Ψ характеризует уже не совокупность тензорных величин, а набор четырех дираковских полей с обычной, то есть коммутирующей с преобразованиями группы Лоренца, внутренней симметрией.

Приведенные соображения сохраняют силу для всех взаимодействий (в том числе калибровочных), не нарушающих внутреннюю симметрию свободного лагранжиана. Они означают принципиальную применимость уравнения ДК для описания частиц со спином $s = \frac{1}{2}$ и внутренними степенями свободы, имеющими, таким образом, геометрическое происхождение (более подробно по этому поводу см. [32]). Так, идея о том, что уравнение ДК может выступать, например, в качестве геометрической модели поколений кварков (или лептонов), впервые была выдвинута в работах [33; 34].

Теперь дадим матричную формулировку уравнения ДК в базисе Гельфанда – Яглома, которая нам понадобится в дальнейшем.

Возьмем в качестве исходного набор неприводимых представлений собственной группы Лоренца

$$\begin{tikzcd}
 & 2(0,0) \arrow[d, dash] & \\
(0,1) \arrow[r, dash] & 2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (1,0),
\end{tikzcd} \tag{5.15}$$

содержащий двукратные компоненты компоненты $(0,0)$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Матрица Γ_4 соответствующего РВУ в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид (2.1), где

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^0_{13} & c^0_{14} \\ 0 & 0 & c^0_{23} & c^0_{24} \\ c^0_{31} & c^0_{32} & 0 & 0 \\ c^0_{41} & c^0_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{35} & c^1_{36} \\ 0 & 0 & c^1_{45} & c^1_{46} \\ c^1_{53} & c^1_{54} & 0 & 0 \\ c^1_{63} & c^1_{64} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

и принята следующая нумерация содержащихся в наборе (5.15) неприводимых представлений:

$$(0,0) \sim 1, \quad (0,0)' \sim 2, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \sim 3, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \sim 4, \quad (0,1) \sim 5, \quad (1,0) \sim 6. \tag{5.17}$$

Здесь, как и ранее, штрих используется для различения кратных представлений.

Рассмотрим сначала спиновый блок C^1. Условия релятивистской и P- инвариантности теории накладывают на элементы c^1_{ij} в общем случае ограничения

$$c^1_{35} = \pm c^1_{36}, \quad c^1_{45} = \pm c^1_{46}, \quad c^1_{53} = \pm c^1_{63}, \quad c^1_{54} = \pm c^1_{64}. \tag{5.18}$$

При этом выбор знаков «+» или «–» в (5.18) зависит от определения оператора пространственного отражения, согласно формулам (1.44) или (1.45). Применительно к рассматриваемому случаю сказанное означает, что знак «+» («–») в (5.18) имеет место при истинно векторном (псевдовекторном) характере кратных представлений $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Удовлетворяющее всем необходимым физическим требованиям РВУ можно построить, если выбрать одно из представлений $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ истинно векторным, а второе – псевдовекторным (в дальнейшем будем обозначать его $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$). Тогда соотношения (5.18) принимают вид

$$c^1_{35} = c^1_{36}, \quad c^1_{45} = -c^1_{46}, \quad c^1_{53} = c^1_{63}, \quad c^1_{54} = -c^1_{64}, \tag{5.19}$$

и для блока C^1 получается выражение

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{35} & c^1_{35} \\ 0 & 0 & c^1_{45} & -c^1_{45} \\ c^1_{53} & c^1_{54} & 0 & 0 \\ c^1_{53} & -c^1_{54} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Аналогичным образом, одно из представлений $(0,0)$ в (5.15) выберем скалярным, а второе – псевдоскалярным (будем также помечать его штрихом). И поскольку в P-инвариантном РВУ векторное (псевдовекторное) представление не может зацепляться с псевдоскалярным (скалярным), то будут иметь место равенства

$$c^0_{14} = c^0_{23} = c^0_{41} = c^0_{32} = 0. \tag{5.21}$$

Блок C^0 (5.18) при этом преобразуется к виду

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^0_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^0_{24} \\ c^0_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^0_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

а представления (5.15) образуют схему зацеплений

$$\begin{tikzcd} & & (0,1) \arrow[dr, dash] & & \\ (0,0)' \arrow[r, dash] & (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (0,0)\,. \\ & & (1,0) \arrow[ur, dash] & & \end{tikzcd} \tag{5.23}$$

Блоки η^0, η^1 матрицы билинейной инвариантной формы η (2.4), имеют в данном случае вид

$$\begin{gathered} \eta = \eta^0 \oplus (\eta^1 \otimes I_3), \\ \eta^0 = \begin{pmatrix} \eta^0_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^0_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^0_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^0_{44} \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} \eta^1_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^1_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^1_{56} \\ 0 & 0 & \eta^1_{65} & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.24}$$

причем согласно (1.47)

$$\eta^1_{33} = -\eta^0_{33}, \quad \eta^1_{44} = -\eta^0_{44}, \quad \eta^1_{65} = \pm\eta^1_{56}. \tag{5.25}$$

Условия (1.48) совместно с равенствами (5.19) приводят к соотношениям

$$c^0_{31} = \frac{\eta^0_{33}}{\eta^0_{11}}(c^0_{13})^*, \quad c^0_{42} = \frac{\eta^0_{44}}{\eta^0_{22}}(c^0_{24})^*, \quad c^1_{53} = \frac{\eta^1_{56}}{\eta^1_{33}}(c^1_{35})^*, \quad c^1_{54} = \frac{\eta^1_{56}}{\eta^1_{44}}(c^1_{45})^*. \tag{5.26}$$

Выбирая теперь для остающихся произвольными элементов $c^s_{\tau\tau'}$ и $\eta^s_{\tau\dot{\tau}}$, например, значения

$$c^0_{13} = c^0_{24} = 1, \quad c^1_{35} = c^1_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{5.27}$$

$$\eta^0_{11} = -\eta^0_{22} = \eta^0_{33} = -\eta^0_{44} = -\eta^1_{56} = -\eta^1_{65} = 1, \tag{5.28}$$

получим РВУ со спиновыми блоками матриц Γ_4 и η вида

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.30}$$

Построенное таким образом с использованием базиса Гельфанда – Яглома РВУ удовлетворяет условиям инвариантности относительно преобразований полной группы Лоренца и возможности его получения из инвариантной функции Лагранжа. С формальной точки зрения оно описывает микрообъект с ненулевой массой и набором спинов $0, 1$. Минимальные уравнения для спиновых блоков C^0, C^1 и матрицы Γ_4 в целом имеют одинаковый вид

$$(C^0)^2 - 1 = 0, \quad (C^1)^2 - 1 = 0, \quad \Gamma_4^2 - 1 = 0, \tag{5.31}$$

из которого вытекает, что данное РВУ относится к уравнениям дираковского типа с алгеброй (5.4). Наличие повторяющихся корней ± 1 у блоков C^0, C^1 означает наличие дополнительной (помимо спина) внутренней степени свободы.

Отметим, что выбор (5.27) элементов матрицы Γ_4 не является единственно возможным с точки зрения получения диракоподобного РВУ. В общем случае для удовлетворения характеристическим уравнениям (5.31) достаточно выполнения условий

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{5.32}$$

Очевидно, что только за счет изменения знаков у чисел c^0_{13}, c^0_{24}, c^1_{35}, c^1_{45} можно реализовать 16 способов задания спиновых блоков C^0, C^1. Однако очевидно, что все такие (и иные) модификации связаны преобразованием подобия и, следовательно, физически эквивалентны.

Итак, на основе схемы зацеплений (5.23) может быть построено единственное (с точностью до преобразования подобия) РВУ дираковского типа, не распадающееся в смысле полной группы Лоренца и допускающее лагранжеву формулировку.

Приведенное алгебраическое и теоретико-групповое обоснование динамического соответствия (эквивалентности) классического уравнения ДК и $SU(2,2)$-инвариантной теории Дирака является еще недостаточным для геометризованного описания внутренних степеней свободы дираковских частиц посредством тензорных полей. Последовательная реализация возможности такого описания предполагает существование такого соответствия и на квантовом уровне, что равносильно возможности квантования поля ДК по статистике Ферми – Дирака.

Казалось бы, такое допущение противоречит известной теореме Паули о связи спина и статистики [34]. Однако, это не совсем так. Еще в работах [35; 36] на примере простейших уравнений для частиц с целым и полуцелым спином было показано, что при использовании индефинитной метрики в гильбертовом пространстве состояний, в принципе, допускается квантование по аномальной статистике (полуцелый спин – по статистике Бозе – Эйнштейна, целый – по статистике Ферми – Дирака). Но при этом в теории появляются неустранимые отрицательные вероятности.

Существенно иная ситуация возникает в случае полевых систем с дополнительными степенями свободы, соответствующими некомпактным группам внутренней симметрии. В таких теориях имеют место дополнительные законы сохранения (правила запрета), исключающие переходы, сопровождающиеся отрицательными вероятностями при квантовании с индефинитной метрикой. Рассмотрим подробно этот вопрос применительно к уравнению ДК [37; 38].

Сначала с помощью подстановки

$$\Psi(x) = \Psi(p)e^{ip_\mu x_\mu} \tag{5.33}$$

перейдем от матричной формы (1.1) уравнения ДК в координатном представлении к импульсному представлению

$$(\hat{p} + m)\Psi(p) = 0, \tag{5.34}$$

где

$$\hat{p} = ip_\mu \Gamma_\mu \text{ – оператор 4-импульса.} \tag{5.35}$$

Как следует из (5.31), спиновые блоки C^0, C^1 содержат один с точностью до знака ненулевой корень ± 1. Наличие же внутренней степени свободы выражается здесь в том, что в характеристических полиномах этих блоков указанный ненулевой корень имеет кратность, равную двум. Так что, наряду с обычными операторами импульса (5.35), квадрата спина

$$\hat{S}^2 = -[(J^{[12]})^2 + (J^{[23]})^2 + (J^{[31]})^2] \tag{5.36}$$

и проекции спина

$$\hat{S}_n = -i\varepsilon_{ijk} n_i J^{[jk]}, \tag{5.37}$$

где $J^{[\mu\nu]} = \frac{1}{4}(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]})$, этой степени свободы (назовем ее для определенности П-четностью) можно сопоставить некоторый оператор $\hat{\Pi}$, коммутирующий с указанными операторами и образующий вместе с ними полный набор переменных для поля ДК. Дополним это условие естественными требованиями диагонализируемости этого оператора и вещественности его собственных значений, а также по аналогии с операторами $\hat{S}^2$, $\hat{S}_n$ свойством

$$\hat{\Pi}\eta = \eta\hat{\Pi}^{+}. \tag{5.38}$$

Нетрудно убедиться, что релятивистски-инвариантное определение оператора П-четности, удовлетворяющее сформулированным условиям, имеет вид

$$\hat{\Pi} = \frac{p_\mu \Gamma'_\mu}{im}; \tag{5.39}$$

в частности, в системе покоя

$$\hat{\Pi}_0 = \Gamma'_4. \tag{5.40}$$

Собственные значения оператора $\hat{\Pi}$ будем обозначать через λ_i, $i = 1, 2$. В системе покоя $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

При вторичном квантовании существенную роль играет знакоповедение плотности энергии (и заряда) классической полевой системы. Наличие спектра спинов и П-четности приводит к тому, что знаки указанных величин могут зависеть не только от знака массы (под которым понимается знак собственных значений матрицы Γ_4, различающий положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения (5.34)), но и от квантовых чисел i и s. Другими словами, и энергия и заряд в таких теориях являются, вообще говоря, индефинитными. Данное обстоятельство удобно отразить, вводя в рассмотрение переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значения которой, вычисленные в системе покоя, характеризуют знак плотности энергии в состоянии $\psi_{is}^{(\pm)}$. Расчет величин $g_{is}^{(\pm)}$ для уравнения ДК дает [39]:

$$g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1, \quad g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1. \tag{5.41}$$

Теперь приступаем непосредственно к квантованию. Операторные волновые функции Ψ, $\overline{\Psi}$ представим в виде разложений

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[a_{is}(p)\psi_{is}^{(+)}(p)e^{ipx} + \overset{+}{b}_{is}\,(p)\psi_{is}^{(-)}(p)e^{-ipx} \right] d^3p, \tag{5.42}$$

$$\overline{\Psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_i \sum_s \left[\overset{+}{a}_{is}\,(p)\bar{\psi}_{is}^{(+)}(p)e^{-ipx} + b_{is}(p)\bar{\psi}_{is}^{(-)}(p)e^{ipx} \right] d^3p. \tag{5.43}$$

Для операторов рождения и уничтожения постулируем перестановочные соотношения

$$[a_{is}(p), \overset{+}{a}_{i's'}\,(p')]_+ = g_{is}^{(+)}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p - p'), \tag{5.44}$$

$$[b_{is}(p), \overset{+}{b}_{i's'}\,(p')]_+ = -g_{is}^{(-)}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p - p') \tag{5.45}$$

(по индексам i и s суммирования здесь нет; все остальные антикоммутаторы равны нулю), которые соответствуют квантованию поля ДК по статистике Ферми – Дирака. Приводящие к правильным собственным значениям операторы числа частиц и античастиц определим при этом следующим образом:

$$N_{is}^{(+)} = g_{is}^{(+)} \overset{+}{a}_{is}\, a_{is}, \quad N_{is}^{(-)} = -g_{is}^{(-)} \overset{+}{b}_{is}\, b_{is}. \tag{5.46}$$

Подставляем разложения (5.42), (5.43) в выражения для операторов энергии и заряда

$$E = \int \{(\partial_4 \overline{\Psi})\Gamma_4 \Psi - \overline{\Psi}\Gamma_4 \partial_4 \Psi\} d^3x, \tag{5.47}$$

$$Q = e \int \overline{\Psi}\Gamma_4 \Psi d^3x. \tag{5.48}$$

Учитывая соотношения (5.44)–(5.46) и нормировку по заряду

$$\overline{\Psi}\Gamma_4 \Psi = \pm 1, \tag{5.49}$$

получим в конечном счете для операторов E и Q выражения

$$E = \sum_i \sum_s \left(N_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)}\right), \tag{5.50}$$

$$Q = e \sum_i \sum_s \left(N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}\right), \tag{5.51}$$

где $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию.

Формулы (5.50), (5.51) означают, что антикоммутационные соотношения (5.44), (5.45) обеспечивают правильную корпускулярную картину поля. Кроме того, нетрудно показать, что они приводят к причинным перестановочным соотношениям для операторных волновых функций [40; 41].

Поскольку правые части некоторых из условий квантования (5.44), (5.45) содержат в правой части «неправильный» знак (минус), соответствующие векторы состояний должны иметь отрицательно определенную норму. Иными словами, квантовое описание поля ДК по статистике Ферми – Дирака предполагает использование пространства состояний H с индефинитной метрикой

$$H = H_+ \oplus H_-, \tag{5.52}$$

где H_+ и H_- – подпространства с положительной и отрицательной нормами векторов состояний соответственно. В рассматриваемом случае в подпространства H_+ и H_- попадают состояния

$$H_+ : \left(\prod_{N_1} \overset{+}{a}_{1s}\right)\left(\prod_{N_2} \overset{+}{b}_{2s}\right)\left(\prod_{N_3} \overset{+}{a}_{2s}\right)\left(\prod_{N_4} \overset{+}{b}_{1s}\right)|0\rangle; \tag{5.53}$$

$$H_- : \left(\prod_{N_5} \overset{+}{a}_{1s}\right)\left(\prod_{N_6} \overset{+}{b}_{2s}\right)\left(\prod_{N_7} \overset{+}{a}_{2s}\right)\left(\prod_{N_8} \overset{+}{b}_{1s}\right)|0\rangle. \tag{5.54}$$

Здесь N_1, N_2, N_5, N_6 – произвольные неотрицательные целые числа, $(N_3 + N_4)$ – четное и $(N_7 + N_8)$ – нечетное числа. Для одночастичных состояний разбиения (5.53), (5.54) принимают соответственно вид

$$H_+ : \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}, \qquad H_- : \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \tag{5.55}$$

$$H_+ : \Psi_{1s}^{(+)}, \Psi_{2s}^{(-)}, \qquad H_- : \Psi_{2s}^{(+)}, \Psi_{1s}^{(-)}. \tag{5.56}$$

При этом для корректной вероятностной интерпретации теории необходимо, чтобы в ней при включении взаимодействия отсутствовали переходы между состояниями H_+ и H_-. Покажем, что здесь такие переходы действительно запрещены.

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\overline{\Psi}(x)(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi(x) + \mathcal{L}_{int}, \tag{5.57}$$

где $\mathcal{L}_{int}$ описывает взаимодействие, которое не нарушает внутренней симметрии, присущей свободному полю. Для электромагнитного взаимодействия, например:

$$\mathcal{L}_{int} = e\overline{\Psi}\Gamma_\mu A_\mu \Psi + \overline{\Psi} F_{\mu\nu} \Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}\Psi. \tag{5.58}$$

Очевидно, что оператор $\hat{\Pi}$ (5.39) содержится среди преобразований группы внутренней симметрии лагранжиана (5.57), (5.58) (сравни (5.39) с генераторами (5.10) этой группы). Инвариантность указанного лагранжиана относительно преобразований

$$\Psi \to e^{i\hat{\Pi}\theta}\Psi \tag{5.59}$$

приводит к сохраняющемуся «заряду»

$$G \sim \int \overline{\Psi}(x)\Gamma_4 \hat{\Pi}\Psi(x) d^3x. \tag{5.60}$$

Заряд G может быть преобразован к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s \lambda_i \left(N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}\right) = \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)}\right), \tag{5.61}$$

где учтено, что $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Перепишем для удобства формулу (5.51) также в развернутом виде

$$Q \sim \sum_s \left(N_{1s}^{(+)} + N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} - N_{2s}^{(-)}\right). \tag{5.62}$$

Сравнивая разбиения (5.55), (5.56) с формулами (5.61), (5.62), приходим к заключению, что одночастичным состояниям, относящимся к подпространствам H_+ и H_-, соответствуют следующие знаки зарядов Q и G:

$$H_+ : \quad (1,1), (-1,1), \qquad H_- : \quad (1,-1), (-1,-1) \tag{5.63}$$

(первая цифра в скобках относится к электрическому заряду Q, вторая – к дополнительному заряду G).

Из (5.63) очевидно, что совместное выполнение законов сохранения для зарядов Q и G приводит к запрету физически неприемлемых переходов между состояниями из подпространств с положительной и отрицательной нормами векторов состояний.

Отметим, что если вместо непрерывных преобразований (5.59) рассмотреть дискретные преобразования

$$\Psi_+ \to \Psi_+, \quad \Psi_- \to -\Psi_-, \tag{5.64}$$

то они сводятся к следующему:

$$\begin{aligned} &a_{1s}, \overset{+}{a}_{1s} \to a_{1s}, \overset{+}{a}_{1s}, \quad b_{1s}, \overset{+}{b}_{1s} \to b_{1s}, \overset{+}{b}_{1s}, \\ &a_{2s}, \overset{+}{a}_{2s} \to -a_{2s}, -\overset{+}{a}_{2s}, \quad b_{2l}, \overset{+}{b}_{2s} \to -b_{2s}, -\overset{+}{b}_{2s}\ . \end{aligned} \tag{5.65}$$

Такая операция носит в математической литературе название канонической, или J-симметрии. Она лежит в основе теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, которое называется еще гильбертовым пространством с J-метрикой, или пространством Крейна [42]. Как показано в [43], J-симметрия соответствует оператору суперотбора, запрещающему переходы из H_+ в H_-, что находится в согласии с установленным выше результатом. При локализации некомпактной группы внутренней симметрии, имеющей пространственно-временное происхождение, и рассмотрении соответствующей калибровочной теории дискретная J-симметрия также позволяет исключить переходы, характеризующиеся отрицательными вероятностями [44].

Таким образом, рассмотренная процедура квантования уравнения ДК по статистике Ферми – Дирака является корректной и с точки зрения вероятностной интерпретации теории. Данный факт в совокупности с другими (алгебраическими, групповыми) выше отмеченными свойствами этого уравнения указывает на то, что на его основе действительно существует принципиальная возможность геометризованного описания внутренних степеней свободы дираковских частиц.

Укажем еще, что в самом общем виде вопрос о возможности физически непротиворечивого квантования РВУ с некомпактными группами внутренней симметрии как по нормальной, так и аномальной статистике с использованием индефинитной метрики подробно рассмотрен в работах [39–41].

6. Алгебраические обобщения уравнения Дирака – Кэлера

Несмотря на ряд привлекательных черт уравнения ДК, вопрос о его способности служить, например, для пространственно-временного описания внутренних квантовых чисел известных фундаментальных частиц до сих пор остается открытым. С одной стороны, если иметь в виду только одно квантовое число – поколение кварков (или лептонов), то число компонент волновой функции в уравнении ДК (равное 16) является слишком большим, поскольку в настоящее время известно всего три поколения этих частиц. С другой, для геометризованного описания с единых позиций всех известных степеней свободы фундаментальных частиц 16-ти компонент волновой функции явно недостаточно. Поэтому последовательная реализация данного подхода в рамках 4-мерного пространства-времени предполагает использование РВУ с большим числом компонент волновой функции и аналогичными уравнению ДК свойствами.

Набор таких РВУ можно получить, если перейти к максимальному тензорному алгебраическому обобщению уравнения ДК в пространстве размерности $d = 4$, заключающемуся в рассмотрении полей $\psi_0, \tilde{\psi}_0, \psi_\mu, \tilde{\psi}_\mu, \psi_{[\mu\nu]}$ как общих элементов алгебры Клиффорда C_4. Этот переход эквивалентен введению наряду с диракоподобным РВУ для функции Ψ (5.2) аналогичных уравнений для функций $\tilde{\Psi}$ и Ψ_A, где A – свободный лоренцевский индекс, принимающий по очереди значения $A = \mu, \tilde{\mu}, [\mu\nu]$ (здесь $\tilde{\mu}$ – псевдовекторный индекс; $\tilde{\Psi}$ характеризует тот же набор антисимметричных тензорных полей, что и Ψ, но с измененными трансформационными свойствами относительно операции пространственной инверсии).

Прежде, чем переходить к указанным алгебраическим обобщениям уравнения ДК, обсудим более подробно вопрос о его замкнутости (нераспадении) в смысле полной группы Лоренца. С этой целью с помощью подстановок

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \psi_0 - i\tilde{\psi}_0, \quad \varphi_\mu = \psi_\mu - i\tilde{\psi}_\mu, \quad \varphi_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} - i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]}, \\ &\dot{\varphi}_0 = \psi_0 + i\tilde{\psi}_0, \quad \dot{\varphi}_\mu = \psi_\mu + i\tilde{\psi}_\mu, \quad \dot{\varphi}_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} + i\tilde{\psi}_{[\mu\nu]} \end{aligned} \tag{6.1}$$

приведем систему (5.1) к виду

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\varphi_\mu + m\varphi_0 = 0, \\ &\partial_\nu\varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\varphi_0 + m\varphi_\mu = 0, \\ -&\partial_\mu\varphi_\nu + \partial_\nu\varphi_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi_\beta + m\varphi_{[\mu\nu]} = 0; \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &\partial_\mu\dot{\varphi}_\mu + m\dot{\varphi}_0 = 0, \\ &\partial_\nu\dot{\varphi}_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\dot{\varphi}_0 + m\dot{\varphi}_\mu = 0, \\ -&\partial_\mu\dot{\varphi}_\nu + \partial_\nu\dot{\varphi}_\mu - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\dot{\varphi}_\beta + m\dot{\varphi}_{[\mu\nu]} = 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

Очевидно, что система (6.2), (6.3) распадается на две инвариантные в смысле собственной группы Лоренца подсистемы (6.2) и (6.3). Однако так же очевидно, что при пространственном отражении эти подсистемы переходят друг в друга, то есть по отдельности каждая из них P-неинвариантна. Таким образом, действительно, по отношению к преобразованиям полной группы Лоренца система ДК является не распадающейся.

Теперь рассмотрим матричное уравнение

$$(\Gamma_\alpha\partial_\alpha + m)\Psi_{[\eta\xi]} = 0, \tag{6.4}$$

которое получается в результате навешивания на волновую функцию Ψ (5.2) уравнения ДК свободного бивекторного индекса. Данное уравнение можно представить в стандартной форме (1.1), где 96-компонентная волновая функция ψ преобразуется согласно представлению группы Лоренца

$$\left[(0,0) \oplus 2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0,1) \oplus (1,0)\right] \otimes [(0,1) \oplus (1,0)]. \tag{6.5}$$

Неприводимые представления, содержащиеся в прямом произведении (6.5), формируют в общем случае схему зацеплений

$$\begin{tikzcd} & 2(0,0) \arrow[d, dash] & \\ 3(0,1) \arrow[r, dash] & 4(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \arrow[r, dash] & 3\,(1,0). \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

Как было показано, уравнение ДК представимо в виде прямой суммы двух диракоподобных 8-компонентных систем (6.2) и (6.3), которые, в свою очередь, можно записать в форме (1.1) с волновыми функциями

$$\Psi^{(8)} = (\varphi_0, \varphi_\mu, \varphi_{[\mu\nu]})^T, \quad \dot{\Psi}^{(8)} = (\dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_\mu, \dot{\varphi}_{[\mu\nu]})^T \tag{6.7}$$

(отметим, что тензоры $\varphi_{[\mu\nu]}$, $\dot{\varphi}_{[\mu\nu]}$, являясь здесь самодуальными, содержат по три независимые компоненты) и схемами зацеплений

$$(0,0) \quad — \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad — \quad (0,1), \tag{6.8}$$

$$(0,0) \quad — \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \quad — \quad (1,0). \tag{6.9}$$

Поэтому уравнение (6.4) распадается на составляющие

$$(\Gamma_\mu^{(8)}\partial_\mu + m)\Psi_{(0,1)}^{(8)} = 0, \tag{6.10}$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)}\partial_\mu + m)\dot{\Psi}_{(0,1)}^{(8)} = 0, \tag{6.11}$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)}\partial_\mu + m)\Psi_{(1,0)}^{(8)} = 0, \tag{6.12}$$

$$(\Gamma_\mu^{(8)}\partial_\mu + m)\dot{\Psi}_{(1,0)}^{(8)} = 0, \tag{6.13}$$

Уравнения (6.10) и (6.12) P-сопряжены по отношению друг к другу. Так же сопряжены уравнения (6.11) и (6.13). Поэтому, рассматривая (6.10), (6.12) и (6.11), (6.13) совместно, получим две инвариантные в смысле полной группы Лоренца системы, преобразующиеся по представлениям

$$\left\{[(0,0) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (0,1)] \otimes (0,1)\right\} \oplus \left\{[(0,0) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (1,0)] \otimes (1,0)\right\}, \tag{6.14}$$

$$\left\{[(0,0) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (0,1)] \otimes (1,0)\right\} \oplus \left\{[(0,0) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (1,0)] \otimes (0,1)\right\}. \tag{6.15}$$

Другими словами, схема зацеплений (6.6) при построении на ее основе диракоподобного РВУ распадается на фрагменты

$$\begin{tikzcd} & & 2(0,0) \arrow[d, dash] & & \\ & 2(0,1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \arrow[r, dash] & 2\,(1,0) \arrow[d, dash] & \\ (0,2) \arrow[r, dash] & (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}) & & (\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (2,0) \end{tikzcd} \tag{6.16}$$

и

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & (1,0) \arrow[d, dash] \\
(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}) \arrow[r, dash] & 2(1,1) \arrow[r, dash] & (\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}).
\end{tikzcd} \tag{6.17}$$

В свою очередь, из неприводимых компонент, входящих в (6.16), можно сформировать две самостоятельные схемы зацеплений: схему (5.15), соответствующую уравнению ДК, и схему

$$\begin{tikzcd}
 & (0,1) \arrow[d, dash] & & (1,0) \arrow[d, dash] & \\
 & & \oplus & & \\
(0,2) \arrow[r, dash] & (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}) & & (\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (2,0).
\end{tikzcd} \tag{6.18}$$

Покажем, что схема зацеплений (6.18) действительно обеспечивает возможность построения удовлетворяющего всем необходимым физическим требованиям РВУ дираковского типа. Пронумеруем содержащиеся (6.18) неприводимые компоненты следующим образом:

$$\begin{aligned} &(0,1) \sim 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) \sim 2, \quad (0,2) \sim 3, \\ &(1,0) \sim 4, \quad (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \sim 5, \quad (2,0) \sim 6. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Тогда в базисе Гельфанда – Яглома для матрицы Γ_4 получим выражение

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & C^2 \otimes I_5 \end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

$$C^1 = \begin{pmatrix} 0 & c^1_{12} & 0 & 0 \\ c^1_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^1_{45} \\ 0 & 0 & c^1_{54} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & c^2_{23} & 0 & 0 \\ c^2_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2_{56} \\ 0 & 0 & c^2_{65} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Требование P-инвариантности теории в соответствии с условиями (1.43), (1.44) накладывает на элементы спиновых блоков C^1, C^2 ограничения

$$c^1_{12} = c^1_{45}, \quad c^1_{21} = c^1_{54}, \quad c^2_{23} = c^2_{56}, \quad c^2_{32} = c^2_{65}. \tag{6.22}$$

Возможность лагранжевой формулировки (см. (1.48)) приводит к соотношениям

$$c^1_{12}\eta^1_{25} = (c^1_{54})^*\eta^1_{14}, \quad c^2_{23}\eta^2_{36} = (c^2_{65})^*\eta^2_{25}. \tag{6.23}$$

Объединяя (6.22) и (6.23), получаем

$$c^1_{21} = c^1_{54} = fa^*, \quad c^2_{32} = c^2_{65} = gb^*, \tag{6.24}$$

где введены обозначения

$$f = \frac{\eta^1_{25}}{\eta^1_{14}}, \quad g = \frac{\eta^2_{36}}{\eta^2_{25}}, \quad a = c^1_{12}, \quad b = c^2_{23}. \tag{6.25}$$

Минимальное уравнение для матрицы Γ_4 будет иметь вид (5.31) при выполнении равенств

$$f|a|^2 = g|b|^2 = 1, \tag{6.26}$$

которым можно удовлетворить, полагая, например,

$$f = g = a = b = 1. \tag{6.27}$$

При этом спиновые блоки C^1, C^2 принимают одинаковый вид

$$C^1 = C^2 = I_2 \otimes \sigma_1. \tag{6.28}$$

Ненулевые элементы η^s_{ij} матрицы билинейной инвариантной формы η, имеющей в рассматриваемом случае в базисе Гельфанда – Яглома структуру

$$\eta = \left(\begin{array}{cc} \eta^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & \eta^2 \otimes I_5 \end{array} \right), \tag{6.29}$$

в соответствии с условиями (6.25), (6.27) могут быть выбраны следующим образом:

$$\eta^1_{14} = \eta^1_{25} = -\eta^2_{25} = -\eta^2_{36} = 1 \tag{6.30}$$

(напомним, что $\eta^s_{ij} = -\eta^{s-1}_{ij}$).

Полученное таким образом 32-компонентное РВУ является по построению уравнением дираковского типа, инвариантно относительно преобразований полной группы Лоренца, допускает лагранжеву формулировку и с точки зрения стандартной трактовки теории РВУ описывает микрообъект с набором спинов 1, 2, одним значением массы и удвоенным набором состояний, вырожденных по некоторому дополнительному квантовому числу. Это уравнение, как и уравнение ДК, не распадается в смысле полной группы Лоренца.

Теперь рассмотрим схему зацеплений (6.17). Если строить на ее основе РВУ дираковского типа, то она распадается в прямую сумму фрагментов [45]

$$\begin{array}{ccc} (0,1) & — & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\ | & & | \\ (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) & — & (1,1) \end{array} \quad \oplus \quad \begin{array}{ccc} (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' & — & (1,0) \\ | & & | \\ (1,1)' & — & (\frac{3}{2},\frac{1}{2}), \end{array} \tag{6.31}$$

где кратные представления $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$, а также $(1,1)$ и $(1,1)'$ P-сопряжены друг другу.

Введем нумерацию содержащихся в схеме (6.31) неприводимых компонент

$$\begin{array}{llll} (\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}) \sim 1, & (\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}) \sim 2, & (1,1) \sim 3, & (0,1) \sim 4, \\ (\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})' \sim 5, & (\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}) \sim 6, & (1,1)' \sim 7, & (1,0) \sim 8. \end{array}$$

Тогда для спиновых блоков C^s $(s = 0, 1, 2)$ матрицы Γ_4

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 & 0 & 0 \\ 0 & C^1 \otimes I_3 & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \otimes I_5 \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

получим общие выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^0_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^0_{57} \\ c^0_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^0_{75} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} (C^1)' & 0 \\ 0 & (C^1)'' \end{pmatrix},$$

$$(C^1)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{13} & c^1_{14} \\ 0 & 0 & c^1_{23} & c^2_{24} \\ c^1_{31} & c^1_{32} & 0 & 0 \\ c^1_{41} & c^1_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{57} & c^1_{58} \\ 0 & 0 & c^1_{67} & c^2_{68} \\ c^1_{75} & c^1_{76} & 0 & 0 \\ c^1_{85} & c^1_{86} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & c^2_{23} & 0 & 0 \\ c^2_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2_{67} \\ 0 & 0 & c^2_{76} & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия релятивистской (1.41) и P-инвариантности (1.42), (1.43) накладывают на элементы блоков (6.33) соответственно ограничения

$$\begin{gathered} c^1_{13} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^0_{13}, \quad c^1_{31} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^0_{31}, \quad c^1_{57} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^0_{57}, \quad c^1_{75} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^0_{75}, \\ c^1_{23} = \sqrt{\frac{1}{3}} c^2_{23}, \quad c^1_{32} = \sqrt{\frac{1}{3}} c^2_{32}, \quad c^1_{67} = \sqrt{\frac{1}{3}} c^2_{67}, \quad c^1_{76} = \sqrt{\frac{1}{3}} c^2_{76}; \end{gathered} \tag{6.34}$$

$$\begin{gathered} c^1_{14} = \pm c^1_{58}, \quad c^1_{23} = \pm c^1_{67}, \quad c^2_{23} = \pm c^2_{67}, \quad c^1_{24} = c^1_{68}, \\ c^1_{41} = \pm c^1_{85}, \quad c^1_{32} = \pm c^1_{76}, \quad c^2_{32} = \pm c^2_{76}, \quad c^1_{42} = c^1_{86}. \end{gathered} \tag{6.35}$$

Условие (1.48) возможности получения РВУ со схемой зацеплений (6.17) из инвариантной функции Лагранжа приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} & c^s_{31} = \frac{\eta^s_{33}}{\eta^s_{11}} (c^s_{13})^*, \quad c^s_{75} = \frac{\eta^s_{77}}{\eta^s_{55}} (c^s_{57})^* \quad (s = 0, 1), \\ & c^s_{76} = \frac{\eta^s_{33}}{\eta^s_{26}} (c^s_{23})^*, \quad c^s_{67} = \frac{\eta^s_{26}}{\eta^s_{77}} (c^s_{32})^* \quad (s = 1, 2), \\ & c^1_{85} = \frac{\eta^1_{48}}{\eta^1_{55}} (c^1_{14})^*, \quad c^1_{58} = \frac{\eta^1_{11}}{\eta^1_{48}} (c^1_{41})^*, \\ & c^1_{86} = \frac{\eta^1_{48}}{\eta^1_{26}} (c^s_{24})^*, \quad c^1_{68} = \frac{\eta^1_{26}}{\eta^1_{48}} (c^1_{42})^*. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Минимальные уравнения

$$(C^0)^2 - 1 = 0, \quad (C^1)^2 - 1 = 0, \quad (C^2)^2 - 1 = 0, \tag{6.37}$$

приводящие к дираковской алгебре матриц Γ_μ, будут иметь место при выполнении равенств

$$\begin{aligned}
&c^0_{13}c^0_{31} = c^2_{23}c^2_{32} = 1,\\
&c^1_{13}c^1_{31} + c^1_{14}c^1_{41} = 1, \quad c^1_{23}c^1_{32} + c^1_{24}c^1_{42} = 1,\\
&c^1_{13}c^1_{32} + c^1_{14}c^1_{42} = 0, \quad c^1_{23}c^1_{31} + c^1_{24}c^1_{41} = 0,\\
&c^1_{13}c^1_{31} + c^1_{23}c^1_{32} = 1, \quad c^1_{14}c^1_{41} + c^1_{24}c^1_{42} = 1,\\
&c^1_{14}c^1_{31} + c^1_{24}c^1_{32} = 0, \quad c^1_{13}c^1_{41} + c^1_{23}c^1_{42} = 0,
\end{aligned} \tag{6.38}$$

плюс аналогичные равенства, которые получаются из (6.38) при замене индексов $1 \to 5$, $2 \to 6$, $3 \to 7$, $4 \to 8$.

Условия (6.34)–(6.38) одновременно выполняются, если положить

$$\begin{aligned}
&c^0_{13} = c^0_{31} = c^0_{57} = c^0_{75} = 1, \quad -c^2_{23} = -c^2_{32} = c^2_{67} = c^2_{76} = 1,\\
&c^1_{13} = c^1_{31} = c^1_{57} = c^1_{75} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -c^1_{23} = -c^1_{32} = c^1_{67} = c^1_{76} = \sqrt{\frac{1}{3}},\\
&c^1_{14} = c^1_{41} = -c^1_{58} = -c^1_{85} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad c^1_{24} = c^1_{42} = c^1_{68} = c^1_{86} = \sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned} \tag{6.39}$$

и

$$\begin{aligned}
\eta^0_{11} &= \eta^0_{33} = \eta^0_{55} = \eta^0_{77} = -\eta^1_{11} = -\eta^1_{33} = -\eta^1_{55} = -\eta^1_{77}\\
&= \eta^1_{26} = \eta^1_{62} = \eta^1_{48} = \eta^1_{84} = -\eta^2_{26} = -\eta^2_{62} = \eta^2_{33} = \eta^2_{77} = 1.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

В результате приходим к следующим выражениям для блоков C^s, η^s матриц Γ_4 и η:

$$C^0 = \sigma_1 \otimes I_2, \quad C^1 = (C^1)' \oplus (C^1)'', \quad C^2 = -\sigma_3 \otimes \sigma_1,$$

$$\begin{aligned}
&(C^1)' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 1\\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 0\\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},\\
&(C^1)'' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -1\\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 0\\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.42}$$

РВУ с матрицами Γ_4 (6.32), (6.41) и η (6.42), базирующееся на схеме зацеплений (6.31), удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в главе 1 (кроме дефинитности энергии), и формально описывает микрообъект с набором спинов $0, 1, 2$ и единственной ненулевой массой. При этом состояния с $s = 0, 2$ двукратно вырождены, а состояния с $s = 1$ вырождены четырехкратно.

Если, наконец, рассмотреть уравнение

$$(\Gamma_\alpha \partial_\alpha + m)\Psi_\mu = 0, \tag{6.43}$$

которое получается в результате навешивания на волновую функцию Ψ уравнения ДК свободного векторного индекса μ, то тут имеет место следующая ситуация. Волновая функция Ψ_μ преобразуется по представлению

$$\left[2(0,0) \oplus 2(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (0,1) \oplus (1,0)\right] \otimes (\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \tag{6.44}$$

соответствующему в общем случае схеме зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} & & 2(0,0) & & \\ & & | & & \\ 2(0,1) & — & 4(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) & — & 2\,(1,0) \\ | & & | & & | \\ (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) & — & 2\,(1,1) & — & (\frac{3}{2},\frac{1}{2})\,. \end{array} \tag{6.45}$$

Как показано в [45], при построении на основе схемы (6.45) РВУ дираковского типа она распадается на две не зацепляющиеся между собой схемы (5.15) и (6.17). Следовательно, с интересующих нас позиций, уравнение (6.44) не дает ничего нового по сравнению с рассмотренными выше РВУ.

Таким образом, обсуждаемые алгебраические обобщения уравнения ДК приводят к двум новым матричным РВУ дираковского типа: 32-компонентному – со схемой зацеплений (6.18) и 48-компонентному – со схемой (6.31).

Тензорная формулировка первого из них имеет вид [46]

$$\begin{aligned}
&\partial_\nu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} + m\varphi_{[\alpha\beta]} = 0,\\
&\frac{1}{2}\left(-\partial_\mu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \varphi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \varphi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \varphi_{\alpha[\mu\nu]} + \right.\\
&\left. +i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi}\partial_\eta \varphi_{\xi[\alpha\beta]} + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi}\partial_\eta \varphi_{\xi[\mu\nu]}\right) + m\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0,\\
&\partial_\nu \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2}\left(\partial_\beta \varphi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \varphi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \varphi_{[\nu\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \varphi_{[\nu\alpha]}\right) +\\
&+ i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu}\partial_\eta \varphi_{[\nu\mu]} + m\varphi_{\mu[\alpha\beta]} = 0,\\
&\partial_\nu \chi_{\nu[\alpha\beta]} + m\chi_{[\alpha\beta]} = 0,\\
&\frac{1}{2}\left(-\partial_\mu \chi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \chi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \chi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \chi_{\alpha[\mu\nu]} - \right.\\
&\left. -i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi}\partial_\eta \chi_{\xi[\alpha\beta]} - i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi}\partial_\eta \chi_{\xi[\mu\nu]}\right) + m\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0,\\
&\partial_\nu \chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2}\left(\partial_\beta \chi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \chi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \chi_{[\nu\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \chi_{[\nu\alpha]}\right) -\\
&- i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu}\partial_\eta \chi_{[\nu\mu]} + m\chi_{\mu[\alpha\beta]} = 0.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Входящие сюда тензоры удовлетворяют условиям самодуальности

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varphi_{[\alpha\beta]} = i\varphi_{[\mu\nu]}, \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\varphi_{\mu[\alpha\beta]} = i\varphi_{\mu[\eta\xi]},\\
\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = i\varphi_{([\mu\nu][\eta\xi])}, \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\chi_{[\alpha\beta]} = -i\varphi_{[\mu\nu]},\\
\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\chi_{\mu[\alpha\beta]} = -i\chi_{\mu[\eta\xi]}, \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = -i\chi_{([\mu\nu][\eta\xi])}.
\end{gathered} \tag{6.47}$$

Кроме того, величины $\varphi_{\mu[\alpha\beta]}$, $\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$, $\chi_{\mu[\alpha\beta]}$, $\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ подчиняются условиям

$$\begin{gathered}
\varphi_{\alpha[\alpha\beta]} = 0, \quad \varphi_{([\alpha\beta][\alpha\nu])} = 0,\\
\chi_{\alpha[\alpha\beta]} = 0, \quad \chi_{([\alpha\beta][\alpha\nu])} = 0.
\end{gathered} \tag{6.48}$$

Иными словами, фигурирующие в системе (6.46) тензорные величины сопоставляются следующим неприводимым представлениям группы Лоренца:

$$\begin{gathered}
\varphi_{[\alpha\beta]} \sim (0,1), \quad \varphi_{\mu[\alpha\beta]} \sim (\frac{1}{2},\frac{3}{2}), \quad \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} \sim (0,2),\\
\chi_{[\alpha\beta]} \sim (1,0), \quad \chi_{\mu[\alpha\beta]} \sim (\frac{3}{2},\frac{1}{2}), \quad \chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} \sim (2,0).
\end{gathered} \tag{6.49}$$

48-компонентная тензорная система, соответствующая РВУ со схемой зацеплений (6.31), имеет вид [47]

$$
\begin{aligned}
&\partial_\nu \varphi_{[\alpha\nu][\alpha\beta]} + \partial_\alpha \varphi_{[\alpha\beta]} + m\varphi_\beta = 0,\\
&\partial_\lambda \varphi_{\lambda[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\partial_\lambda \varphi_\rho) + m\varphi_{[\alpha\beta]} = 0,\\
&\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \partial_\mu \varphi_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha}\partial_\eta \varphi_{[\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\eta \varphi_{[\eta\alpha]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\alpha]} +\\
&+ i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho}\partial_\eta \varphi_{[\eta\rho]} + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho}\partial_\nu \varphi_{[\eta\nu][\eta\rho]}) + m\varphi_{\mu[\alpha\beta]} = 0,\\
-&\partial_\eta \varphi_{\nu[\eta\beta]} + \frac{1}{3}(2\partial_\nu \varphi_\beta + 2\partial_\beta \varphi_\nu - \delta_{\nu\beta}\partial_\rho \varphi_\rho) - i\varepsilon_{\rho\nu\eta\xi}\partial_\eta \varphi_{\xi[\rho\beta]} + m\varphi_{[\eta\nu][\eta\beta]} = 0,\\
&\partial_\nu \chi_{[\alpha\nu][\alpha\beta]} + \partial_\alpha \chi_{[\alpha\beta]} + m\chi_\beta = 0,\\
&\partial_\lambda \chi_{\lambda[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \chi_\beta - \partial_\beta \chi_\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\partial_\lambda \chi_\rho) + m\chi_{[\alpha\beta]} = 0,\\
&\partial_\nu \chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \partial_\mu \chi_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha}\partial_\eta \chi_{[\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\eta \chi_{[\eta\alpha]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\alpha]} +\\
&+ i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho}\partial_\eta \chi_{[\eta\rho]} + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho}\partial_\nu \chi_{[\eta\nu][\eta\rho]}) + m\chi_{\mu[\alpha\beta]} = 0,\\
-&\partial_\eta \chi_{\nu[\eta\beta]} + \frac{1}{3}(2\partial_\nu \chi_\beta + 2\partial_\beta \chi_\nu - \delta_{\nu\beta}\partial_\rho \chi_\rho) + i\varepsilon_{\rho\nu\eta\xi}\partial_\eta \chi_{\xi[\rho\beta]} + m\chi_{[\eta\nu][\eta\beta]} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.50}
$$

Здесь тензорные величины сопоставляются представлениям

$$
\begin{aligned}
&\varphi_\beta \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad \varphi_{[\alpha\beta]} \sim (0,1), \quad \varphi_{\mu[\alpha\beta]} \sim (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \quad \varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} \sim (1,1),\\
&\chi_\beta \sim (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})', \quad \chi_{[\alpha\beta]} \sim (1,0), \quad \chi_{\mu[\alpha\beta]} \sim (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), \quad \chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} \sim (1,1)'.
\end{aligned}
\tag{6.51}
$$

При этом тензоры $\varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ и $\chi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ удовлетворяют условиям самодуальности

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} = i\varphi_{[\mu\nu][\eta\xi]}, \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\mu\nu}\varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} = -i\varphi_{[\eta\xi][\alpha\beta]},\\
&\frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\alpha\beta}\chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} = -i\chi_{[\mu\nu][\eta\xi]}, \quad \frac{1}{2}\varepsilon_{\eta\xi\mu\nu}\chi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} = i\chi_{[\eta\xi][\alpha\beta]}.
\end{aligned}
\tag{6.52}
$$

Рассматриваемым алгебраическим обобщениям уравнения ДК присущи группы внутренней симметрии $SU(4,4)$ (32-компонентная система) и $SU(6,6)$ (48- компонентная система). Как и в случае уравнения ДК, преобразования внутренней симметрии Q здесь не коммутируют с преобразованиями Лоренца Λ. Но при этом группу полной инвариантности G можно представить в виде прямого произведения $Q = \Lambda' \otimes G$, где Λ' – лоренцевские преобразования, которые характеризуют набор из восьми и двенадцати дираковских полей соответственно. Кроме того, обе системы допускают физически непротиворечивое квантование по статистике Ферми – Дирака. Процедуру их квантования мы рассматривать не будем, поскольку она вполне аналогична рассмотренному в главе 5 квантованию уравнения ДК. Полное изложения этого вопроса можно найти в работах [48; 49].

Перечисленные свойства 32- и 48-компонентной тензорных систем по тем же соображениям, что и в случае уравнения ДК, предполагают возможность их использования для пространственно-временного описания внутренних степеней фермионов. Первая из них может служить, например, в качестве кварковой модели с восемью ароматами, вторая – для геометризованного введения $SU(3)$-калибровочного взаимодействия в решеточном пространстве [50].

Дальнейшее обобщение обсуждаемого геометризованного способа введения внутренних квантовых чисел возможно при отказе от ограничения, сформулированного в начале данного пункта и связанного с размерностью пространства состояний. Поясним сказанное.

Уравнение ДК может быть представлено в форме

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi^D_\alpha = 0, \tag{6.53}$$

где Ψ^D – дираковский биспинор, α – свободный индекс, соответствующий зарядово-сопряженному биспинору $\bar{\Psi}^c = C(\Psi^D)^*$, C – матрица зарядового сопряжения. Запись (6.53) означает переход в базис (мы его назвали фермионным), в котором представление (5.15) трактуется как прямое произведение

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)]. \tag{6.54}$$

При отказе от вышеуказанного ограничения уравнение ДК допускает обобщения, которые заключаются в рассмотрении вместо (6.54) всевозможных произведений вида

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)], \tag{6.55}$$

при условии, что сумма $(j_1 + j_2)$ принимает полуцелые значения.

Остановимся на двух классах РВУ, наиболее перспективных с интересующей нас точки зрения и включающих рассмотренные 32- и 48-компонентную системы дираковского типа в качестве частных случаев.

Возьмем в (6.55) $j_1 = 0$ (либо $j_2 = 0$, что то же самое). Получим представление

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(0, j) \oplus (j, 0)] \quad (j = j_2). \tag{6.56}$$

При $j = \frac{1}{2}$ (6.56) совпадает с (6.54), а при $j = \frac{3}{2}$ приводит к схеме зацеплений (6.18) и соответственно к 32-компонентному РВУ с тензорной формулировкой (6.46). Случаи $j = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ дают схемы зацеплений

$$\begin{array}{ccccccc} & & (0,2) & & (2,0) & & \\ & & | & \oplus & | & & \\ (0,3) & — & (\frac{1}{2},\frac{5}{2}) & & (\frac{5}{2},\frac{1}{2}) & — & (3,0), \end{array} \tag{6.57}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & (0,2) & & (2,0) & & \\ & & | & \oplus & | & & \\ (0,4) & — & (\frac{1}{2},\frac{7}{2}) & & (\frac{7}{2},\frac{1}{2}) & — & (4,0) \end{array} \tag{6.58}$$

и так далее. Методика построения на основе (6.57), (6.58) диракоподобных РВУ аналогична той, что применялась при исследовании схемы зацеплений (6.18). Несущественные с точки зрения процедуры различия заключаются в неодинаковости спиновой структуры получаемых уравнений. Если схема (6.18) приводит к матрице Γ_4 со спиновыми блоками C^1, C^2, то в случае (6.57) получаем блоки C^2, C^3, в случае (6.58) – C^3, C^4 и так далее. При сопоставлении этим РВУ дираковских частиц с внутренними степенями свободы соответствующее собирательное квантовое число принимает $8, 12, 16, \ldots$ значений.

Второй случай: $|j_1 - j_2| = \frac{1}{2}$. Возникающий при этом класс РВУ базируется на приводимых представлениях, которые являются прямыми произведениями вида

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})], \tag{6.59}$$

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(1, \frac{3}{2}) \oplus (\frac{3}{2}, 1)], \tag{6.60}$$

$$[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)] \otimes [(\frac{3}{2}, 2) \oplus (2, \frac{3}{2})] \tag{6.61}$$

и тому подобное. Произведению (6.59) соответствует схема зацеплений (6.17) (или (6.31)) и 48-компонентное РВУ дираковского типа, матричная и тензорная формулировки которых даны выше. Представлениям (6.60), (6.61) отвечают схемы зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} (\frac{1}{2},\frac{3}{2}) & — & 2(1,1) & — & (\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \\ | & & | & & | \\ (1,2) & — & 2(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) & — & (2,1), \end{array} \tag{6.62}$$

$$\begin{array}{ccccc} (1,2) & — & 2(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) & — & (2,1) \\ | & & | & & | \\ (\frac{3}{2},\frac{5}{2}) & — & 2(2,2) & — & (\frac{5}{2},\frac{3}{2}), \end{array} \tag{6.63}$$

имеющие структуру, сходную с (6.17).

Возможность построения на основе схем зацеплений данного класса P- инвариантных РВУ дираковского типа вытекает из того, что каждой из них можно сопоставить уравнение Дирака для биспинора со свободным индексом, соответствующим представлению $[(j_1, j_2) \oplus (j_2, j_1)]$. При этом схема (6.62) описывает спины $0, 1, 2, 3$, схема (6.63) – спины $0, 1, 2, 3, 4$ и так далее. При сопоставлении (в указанном выше смысле) данным уравнениям частиц со спином $\frac{1}{2}$ и внутренними степенями свободы собирательное внутреннее квантовое число принимает $12, 24, 40, \ldots$ значений. Очевидно, что рассмотренные обобщения уравнения ДК предоставляют весьма широкие возможности с точки зрения геометризованного описания внутренних (помимо спина) степеней свободы дираковских частиц.

7. Совместное описание безмассовых полей с различными спиральностями

Обсудим теперь, какие возможности открывает использование кратных представлений группы Лоренца в теории РВУ с точки зрения описания безмассовых полей.

Для начала проанализируем простейшую схему зацеплений (1.15) на предмет построения на ее основе различных безмассовых РВУ. Схеме (1.15) соответствует следующий наиболее общий вид релятивистски-инвариантной тензорной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a\psi_\mu = 0, \tag{7.1}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + b\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.2}$$

где a, b – произвольные постоянные коэффициенты. Существуют четыре принципиально различные возможности в выборе этих коэффициентов.

Первая, когда $a = b = m$, приводит к системе Даффина – Кеммера (см. (2.19)) для микрочастицы с ненулевой массой и спином $s = 1$. Этот случай нас сейчас не интересует. Вторая $a = b = 0$ приводит к не имеющим физического смысла независимым уравнениям

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \tag{7.3}$$

Выбирая в (7.1), (7.2) $a = 0$, $b = 1$, получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.4}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{7.5}$$

Если трактовать здесь компоненты вектора ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то уравнения (7.4), (7.5) представляют собой систему уравнений Максвелла (так называемая десятимерная формулировка), описывающую фотон – безмассовую частицу со спиральностью ±1. При этом первое из них является уравнением движения, а второе выступает как определение напряженности через потенциалы.

Наконец, возможен выбор $a = 1$, $b = 0$, который приводит к системе

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \tag{7.6}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \tag{7.7}$$

Если в данном случае по-прежнему трактовать ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то система (7.6), (7.7) становится неопределенной в том смысле, что напряженности не могут быть выражены через потенциалы. Ситуация, однако, существенно изменяется, если придерживаться иной интерпретации входящих в эту систему величин, а именно: считать потенциалом тензор $\psi_{[\mu\nu]}$, а напряженностью – вектор ψ_μ. Тогда система (7.6), (7.7) становится вполне определенной: уравнение (7.6) выступает как определение напряженности через потенциал, уравнение (7.7) – как уравнение движения.

Физический смысл системы (7.6), (7.7) вытекает из следующих соображений. Из уравнения (7.6) имеем

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0. \tag{7.8}$$

С учетом (7.8) из уравнения движения (7.7) легко получить уравнение второго порядка

$$\Box \psi_\mu = 0, \tag{7.9}$$

которое указывает на отсутствие массы у микрообъекта, описываемого системой (7.6), (7.7).

Как известно, в теории безмассового векторного поля, базирующейся на уравнениях (7.4), (7.5), на потенциалах можно задать преобразования

$$\psi_\mu \to \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \tag{7.10}$$

называемые градиентными, или калибровочными преобразованиями второго рода. Произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ позволяет исключить «лишние» состояния, оставляя лишь две (из четырех) поперечные составляющие. В свою очередь, уравнения (7.6)–(7.9) инвариантны относительно преобразований потенциалов

$$\psi_{[\mu\nu]} \to \psi'_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \tag{7.11}$$

где калибровочные функции $\Lambda_\mu(x)$ ограничены условием

$$\Box \Lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu = 0. \tag{7.12}$$

В работе Огиевецкого и Полубаринова [51] показано, что калибровочная инвариантность такого рода оставляет у тензор-потенциала только одну независимую компоненту, соответствующую состоянию с нулевой спиральностью.

Остановимся подробнее на указанной работе. Для этого вернемся к схеме зацеплений (1.15), в которой представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ будем считать псевдовекторным. В этом случае можно построить, во-первых, теорию псевдовекторной частицы с нулевой массой

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} = 0, \tag{7.13}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + \psi_{[\mu\nu]} = 0 \tag{7.14}$$

(так называемая электродинамика с псевдовекторным потенциалом). Вводя вместо псевдовектора $\tilde{\psi}_\mu$ сопряженный ему антисимметричный тензор третьего ранга $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$, вместо (7.13), (7.14) придем к системе

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} = 0, \tag{7.15}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\nu\alpha]} = 0, \tag{7.16}$$

в которой $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ выступает в роли потенциала.

Во-вторых, можно получить систему уравнений

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{7.17}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0 \tag{7.18}$$

или эквивалентную ей систему

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{7.19}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \tag{7.20}$$

Рассматривая здесь $\psi_{[\mu\nu]}$ как тензор-потенциал, а $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – как напряженность, мы приходим к теории Огиевецкого – Полубаринова для безмассовой частицы со спиральностью 0. Действительно, в работе [51] для тензор-потенциала $\psi_{[\mu\nu]}$ в качестве исходного постулируется уравнение второго порядка

$$\Box\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\partial_\alpha\psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu\partial_\alpha\psi_{[\mu\alpha]} = 0. \tag{7.21}$$

Нетрудно убедиться, что оно коррелирует с системой первого порядка (7.19), (7.20). Кроме того, уравнение (7.21) инвариантно относительно калибровочных преобразований (7.11), (7.12), что позволяет наложить на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$ дополнительное условие

$$\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.22}$$

равносильное условию

$$\partial_\mu\partial_\alpha\psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu\partial_\alpha\psi_{[\mu\alpha]} = 0.$$

В результате уравнение (7.21) распадается на уравнения

$$\Box\psi_{[\mu\nu]} = 0 \tag{7.23}$$

и (7.22).

Что касается системы (7.6), (7.7), то уравнение (7.22) можно получить из нее непосредственно. Таким образом, в обоих вариантах теории безмассовой частицы со спиральностью 0 (имеются в виду системы (7.6), (7.7) и (7.19), (7.20)) получаются одинаковые уравнения второго порядка для потенциалов. Различие же этих двух теорий заключается в том, что в системе (7.6), (7.7) напряженность является истинным вектором, а в системе (7.19), (7.20) – антисимметричным тензором третьего ранга, или, иначе говоря, псевдовектором. Кроме того, если для системы (7.6), (7.7) уравнение второго порядка (7.22) выступает как основное, а уравнение (7.23) – как дополнительное условие, то по отношению к системе (7.19), (7.20), наоборот, (7.23) является основным уравнением, а (7.22) – дополнительным условием. Однако эти различия не сказываются на числе степеней свободы, соответствующим обеим теориям.

В [51] безмассовая частица, описываемая системой (7.19), (7.20), была названа нотофом. Это название отражает дополнительность свойств фотона и нотофа как в смысле спиральности, так и в отношении лоренцевских трансформационных свойств потенциалов и напряженностей. Нотоф, описываемый системой (7.6), (7.7), естественно назвать дуальным нотофом.

Здесь будет кстати обсудить вопрос о так называемом «спиновом скачке» (spin jumping). В работах ряда авторов (см., напр., [52; 53]) частица, описываемая системой (7.6), (7.7), трактуется как скалярный безмассовый мезон. Отсюда делается вывод об изменении (скачке) спина при переходе от системы (2.19) к системе (7.6), (7.7). Однако анализ матричной формулировки (1.2) (или (1.1) в случае ненулевой массы) рассмотренных выше тензорных систем, базирующихся на схеме зацеплений (1.15), показывает, что их единственное существенное отличие состоит в виде матрицы Γ_0. Для частицы с ненулевой массой $\Gamma_0 = mI$. Для фотона и нотофа в тензорном базисе будем иметь соответственно

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & I_6 \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & 0_6 \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

При этом матрица Γ_0 (7.24) вырезает из волновой функции одну из трех проекций спина $s = 1$, оставляя для фотона две проекции ($s_z = \pm 1$), а матрица Γ_0 (7.25), вырезая две проекции, оставляет для нотофа лишь одну ($s_z = 0$). И поскольку спиновый блок C^0 во всех случаях остается равным нулю (смотри (2.12)), очевидно, что ненулевые степени и фотона и нотофа связаны со спиновым блоком C^1. Так что, на самом деле, в данном случае имеет место переход степеней свободы (состояний) массивной векторной частицы с проекциями спина $s_z = \pm 1$ в степени свободы (состояния) фотона со спиральностью ± 1, и точно также переход состояния массивной векторной частицы с проекцией спина $s_z = 0$ в соответствующее состояние нотофа со спиральностью 0. При обратном же переходе, например, от реальных фотона и нотофа к их виртуальным аналогам, обладающим массой, виртуальный фотон приобретает дополнительное состояние с нулевой проекцией спина, а виртуальный нотоф – дополнительные состояния с проекцией спина ± 1. Другими словами, нотоф, как и фотон, переносит во взаимодействиях спин 1. Поэтому более точно, на наш взгляд, рассматривать нотоф как безмассовую *векторную* частицу со спиральностью равной 0, что соответствует и точке зрения авторов работы [51].

Обобщая проделанный выше анализ, можно сделать вывод, что теория РВУ первого порядка вида (1.2) позволяет описывать безмассовые частицы (поля) не только с максимальной для данного набора представлений группы Лоренца спиральностью $\pm s$, но и с промежуточными значениями спиральности, включая нулевую.

Первооткрыватели нотофа не смогли предложить для него каких-либо физических приложений. В 1974 году Кальб и Рамонд [52], по существу, переоткрыли нотоф, рассматривая вопрос о феноменологическом описании взаимодействия струн. Впоследствии за полевой системой, сопоставляемой уравнениям (7.19), (7.20), в литературе утвердилось название поля Кальба – Рамонда (см., напр., [53; 54]).

В [51] тензор $\psi_{[\mu\nu]}$ предлагается в качестве потенциала поля – переносчика взаимодействия замкнутых струн в пространстве размерности $d = 4$. Очевидно, что для описания взаимодействия открытых струн одного лишь поля Кальба – Рамонда (нотофа Огиевецкого – Полубаринова) недостаточно. Моделируя концы струны как точечные электрические заряды, необходимо ввести вектор-потенциал, соответствующий электромагнитному полю. И поскольку струна является единым физическим объектом, естественна постановка задачи о совместном описании фотона и нотофа на основе одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений первого порядка.

С этой целью рассмотрим схему зацеплений (4.1), в которой представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ сопоставляется истинному вектору, а представление $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})'$ – псевдовектору, или антисимметричному тензору третьего ранга. Наиболее общая тензорная система уравнений первого порядка, соответствующая схеме (4.1) и удовлетворяющая стандартным физическим требованиям, имеет вид

$$\begin{aligned} &\alpha\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + a\psi_\mu = 0, \\ &\beta\partial_\nu\tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + b\tilde{\psi}_\mu = 0, \\ &\alpha^*(-\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu) + \beta^*\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\tilde{\psi}_\beta + c\psi_{[\mu\nu]} = 0, \end{aligned} \tag{7.26}$$

где α, β, a, b, c – произвольные параметры. Систему (7.26) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\alpha\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + a\psi_\mu = 0, \\ &\beta(\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]}) + b\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \\ &\alpha^*(-\partial_\nu\psi_\alpha + \partial_\alpha\psi_\nu) + \beta^*\partial_\mu\psi_{[\mu\nu\alpha]} + c\psi_{[\nu\alpha]} = 0. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Положим в (7.27)

$$\alpha = \beta = 1, \quad a = c = 0, \quad b = 1. \tag{7.28}$$

Получим систему

$$\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.29}$$

$$\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{7.30}$$

$$-\partial_\nu\psi_\alpha + \partial_\alpha\psi_\nu + \partial_\mu\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \tag{7.31}$$

Примем следующую трактовку входящих в (7.29)–(7.31) величин: ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$ – потенциалы, $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженность. Тогда уравнение (7.30) является, по существу, определением напряженности через потенциалы. Уравнение (7.29) играет роль дополнительного условия на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$, которое изначально содержится в самой системе. Данное условие оставляет у потенциала только две независимые компоненты. Кроме того, система (7.29)–(7.31) инвариантна относительно калибровочных преобразований (7.11), (7.12). Имеющийся произвол в выборе калибровочной функции позволяет наложить условие, исключающее еще одну независимую степень свободы, связанную с тензор-потенциалом $\psi_{[\mu\nu]}$. При этом для $\psi_{[\mu\nu]}$ имеем уравнение второго порядка

$$\Box\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu = 0, \tag{7.32}$$

которое описывает состояние некоторого безмассового поля со спиральностью 0.

Обратимся к потенциалу ψ_μ. Система (7.29)–(7.31) инвариантна также относительно калибровочных преобразований

$$\psi_\mu \to \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu\Lambda, \tag{7.33}$$

где Λ – произвольная скалярная функция. Из уравнения (7.31) вытекает уравнение второго порядка

$$\Box\psi_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\psi_\nu = 0, \tag{7.34}$$

которое совместно с калибровочной инвариантностью (7.33) означает, что вектор-потенциал ψ_μ характеризует поперечную составляющую (спиральность ± 1) обсуждаемого безмассового поля. Тогда тензор

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu \equiv F_{[\mu\nu]} \tag{7.35}$$

естественно рассматривать как напряженность, непосредственно связанную с этой поперечной составляющей. Уравнение же (7.31), переписанное с учетом обозначения (7.35) в виде

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} - F_{[\nu\alpha]} = 0, \tag{7.36}$$

выступает, очевидно, в качестве уравнения движения в системе (7.29)–(7.31).

Таким образом, выбор (7.28) параметров в системе (7.27) приводит к не распадающейся по группе Лоренца теории, которая дает совместное описание безмассовых полей со спиральностями 0 и ± 1, то есть поля Кальба – Рамонда (нотофа) и электромагнитного поля. Уравнение движения (7.36) указывает на неразрывную связь этих полей подобно тому, как связаны электрическая и магнитная составляющие в теории Максвелла. Точнее даже говорить не о совместном описании указанных полей, а о едином безмассовом поле с тремя возможными значениями спиральности $0, \pm 1$.

Интерпретируя данное поле в качестве переносчика взаимодействия между открытыми струнами в пространстве размерности $d = 4$, можем ввести в систему (7.29)–(7.31) источники. При этом учтем, что в данном случае существует два типа источников: тензорный ток $j_{[\mu\nu]}$, который создается телом струны (body string), и векторный ток j_μ, создаваемый концами струны. Последние при этом рассматриваются как точечные электрические заряды противоположных знаков. Между токами j_μ и $j_{[\mu\nu]}$ существует связь

$$j_\nu = \partial_\mu j_{[\mu\nu]}, \tag{7.37}$$

из которой следует, что j_μ сохраняется ($\partial_\mu j_\mu = 0$), а $j_{[\mu\nu]}$, вообще говоря, не сохраняется ($\partial_\mu j_{[\mu\nu]} \neq 0$). Вводя ток $j_{[\mu\nu]}$ в уравнение движения (7.31), получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.38}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{7.39}$$

$$-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu + \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\nu\alpha]}. \tag{7.40}$$

описывающую единое поле открытой струны в присутствии источников.

В частных случаях, когда рассматривается взаимодействие замкнутых струн или электрически заряженных частиц, компоненты единого поля могут существовать и описываться по отдельности. Так, полагая в системе $j_\mu = 0$, получим согласно (7.37)

$$\partial_\mu j_{[\mu\nu]} = 0. \tag{7.41}$$

И система (7.38)–(7.40) трансформируется в уравнения (7.19), (7.20) (с членом $j_{[\nu\alpha]}$ в правой части) и дополнительное условие (7.22), описывающие поле Кальба – Рамонда с источником. В свою очередь, беря от уравнения (7.40) производную ∂_α и учитывая определения (7.35), (7.37), придем к уравнению

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = j_\mu. \tag{7.42}$$

Объединяя уравнение (7.42) с (7.35) и исключая из рассмотрения величины $\psi_{[\mu\nu]}$, $j_{[\mu\nu]}$, относящиеся к телу струны, получим максвелловскую систему для электромагнитного поля с источником.

В матричном формализме система (7.29)–(7.31) соответствует РВУ типа (1.2) с особенной матрицей Γ_0, имеющей в тензорном базисе вид

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & & \\ & I_4 & \\ & & 0_6 \end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

Выражения для спиновых блоков C^0, C^1 матрицы Γ_4 в базисе Гельфанда – Яглома задаются соответственно формулами (4.3), (4.17). Отсюда следует, что безмассовое поле, описываемое этим РВУ, действительно переносит спин 1, причем собственное значение $\lambda = \pm 1$ спинового блока C^1 двукратно вырождено. В контексте вышесказанного такое вырождение соответствует совместному описанию электромагнитного поля (фотона) и поля Кальба – Рамонда (нотофа) как составляющих единого безмассового векторного поля с тремя возможными значениями спиральности $s = 0, +1, -1$. Нулевое значение массы при этом обеспечивает проективная матрица Γ_0, которая устраняет «лишние» состояния, присущие массивному аналогу данного поля.

Таковым аналогом, как нетрудно видеть, является частица, которая обсуждалась в главе 4. Действительно, совершая в рассматриваемом безмассовом РВУ замену $\Gamma_0 \to mI$, мы придем к полученному в указанном пункте РВУ для киральной частицы со спином $s = 1$ и ненулевой массой. Тензорная форма (4.19) этого РВУ может быть получена из системы (7.26) при выборе параметров $\alpha = \beta = 1$, $a = b = c = m$. Данное положение вещей проливает определенный свет на физический смысл квантового числа «киральность» для частиц с ненулевой массой, а именно: в том смысле, в каком виртуальному фотону или нотофу сопоставляется векторная частица, описываемая обычным уравнением Даффина – Кеммера, виртуальному объединенному полю фотона и нотофа сопоставляется векторная частица с ненулевой массой и дополнительной внутренней степенью свободы – киральностью. При обратном переходе $mI \to \Gamma_0$ проективная матрица Γ_0 «вырезает» лишние состояния, оставляя в сумме три степени свободы на фотон и нотоф.

Подводя итог данному пункту, можно сказать, что теория РВУ вида (1.2) позволяет описывать безмассовые поля не только с максимальной (для данного набора представлений группы Лоренца) спиральностью $\pm s$, но и поля с промежуточными значениями спиральности, а также осуществлять совместное описание полей с различными значениями спиральности от $+s$ до $-s$, включая промежуточные, в рамках не распадающегося по группе Лоренца РВУ. В последнем случае требуется расширенный (по сравнению с необходимым для описания спиральности $\pm s$) набор неприводимых представлений группы Лоренца в пространстве волновой функции Ψ.

Принципиально иным способом объединения безмассовых полей с различными спиральностями является механизм калибровочно-инвариантного смешивания, или $\hat{B} \wedge \hat{F}$-теория [52; 53]. Этот способ приводит к появлению массы у объединенного поля и, в принципе, может претендовать на роль механизма генерации массы, альтернативного механизму Хиггса.

Рассмотрим вкратце суть $\hat{B} \wedge \hat{F}$-теории, дадим ее матричную интерпретацию. Возьмем в качестве исходных безмассовые поля, описываемые системами уравнений (7.4), (7.5) и (7.17), (7.18). Первая из них описывает фотон – безмассовое векторное поле со спиральностью ± 1, вторая – нотоф, или безмассовое поле со спиральностью 0. Перепишем систему (7.17), (7.18) в виде

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu = 0, \tag{7.44}$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \tag{7.45}$$

где для удобства использовано обозначение

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varphi_{[\alpha\beta]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}. \tag{7.46}$$

Напомним, что величины ψ_μ и $\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$ выступают в этих системах в качестве потенциалов, а $\psi_{[\mu\nu]}$ и $\tilde{\varphi}_\mu$ – в качестве напряженностей указанных полей.

Далее в лагранжиан $\mathcal{L}_0$ системы (7.4), (7.5), (7.44), (7.45) (его вид не выписываем за ненадобностью) вводится дополнительный член

$$\mathcal{L}_{int} = m\psi_\mu \partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}, \tag{7.47}$$

который не нарушает инвариантность этой системы относительно калибровочных преобразований (7.33) и преобразований вида (7.11), (7.12) для потенциала $\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$. Данную процедуру называют калибровочно-инвариантным смешиванием или топологическим взаимодействием исходных безмассовых полей.

Варьирование суммарного лагранжиана $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ дает систему уравнений

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\tilde{\varphi}_\mu = 0, \tag{7.48}$$

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.49}$$

$$\partial_\nu \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \tilde{\varphi}_\mu = 0, \tag{7.50}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{7.51}$$

Вводя в рассмотрение величины

$$\tilde{G}_\mu = \psi_\mu - \frac{1}{m}\tilde{\varphi}_\mu, \quad G_{[\mu\nu]} = \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} - \frac{1}{m}\psi_{[\mu\nu]}, \tag{7.52}$$

систему (7.48)–(7.51) можно в конечном счете привести к виду

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + m\tilde{\varphi}_\mu = 0, \tag{7.53}$$

$$-\partial_\mu \tilde{\varphi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\varphi}_\mu + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.54}$$

$$\partial_\nu G_{[\mu\nu]} = 0, \tag{7.55}$$

$$-\partial_\mu \tilde{G}_\nu + \partial_\nu \tilde{G}_\mu = 0. \tag{7.56}$$

Система (7.53)–(7.56) распадается на лоренц-инвариантные подсистемы (7.53), (7.54) и (7.55), (7.56). Первая из них описывает векторную частицу с ненулевой массой.

Подсистема (7.55), (7.56) физического поля не описывает, поскольку ей соответствует нулевая плотность энергии. Ее присутствие в системе (7.53)–(7.56) связано с формальными соображениями сохранения калибровочной инвариантности теории на всех этапах.

На языке матричного формализма теории РВУ $\hat{B}\wedge\hat{F}$-теория интерпретируется следующим образом. Исходную тензорную систему (7.4), (7.5), (7.44), (7.45) можно представить в форме (1.2), где при использовании базиса

$$\Psi = (\psi_\mu, \psi_{[\mu\nu]}, \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}, \tilde{\varphi}_\mu)^T \tag{7.57}$$

матрицы Γ_μ, Γ_0 имеют вид

$$\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \Gamma_\mu^{DK} & \\ & \Gamma_\mu^{DK} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & & & \\ & I_6 & & \\ & & 0_6 & \\ & & & I_4 \end{pmatrix} \tag{7.58}$$

(Γ_μ^{DK} – 10-мерные матрицы Даффина – Кеммера).

Введение в лагранжиан топологического члена (7.47) приводит к изменению вида матриц Γ_μ. Подстановки (7.52) эквивалентны некоторому унитарному преобразованию базиса (7.57), в результате чего матрицы Γ_μ принимают первоначальный вид (7.58). Матрица же Γ_0 при этом видоизменяется следующим образом:

$$\Gamma_0 \to \begin{pmatrix} mI_4 & & & \\ & mI_6 & & \\ & & 0_6 & \\ & & & 0_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mI_{10} & \\ & 0_{10} \end{pmatrix}. \tag{7.59}$$

Таким образом, получается РВУ (1.2) с матрицами Γ_μ (7.58) и Γ_0 (7.59), которое представляет собой прямую сумму уравнения Даффина – Кеммера для спина 1 и безмассовый предел ($m \to 0$) этого уравнения. По сути, данный способ генерации массы с точки зрения теории РВУ сводится к перестановке нулевых и единичных блоков матрицы Γ_0. При этом число степеней свободы полевой системы (равное трем) остается прежним, но имеет место их перераспределение: нотоф как бы передает свою степень свободы фотону, что автоматически приводит к появлению частицы с ненулевой массой и спином 1. Можно сказать, что происходит своего рода «аннигиляция» фотона и нотофа с образованием векторной частицы с ненулевой массой.

8. Массивные калибровочно-инвариантные поля в теории РВУ

Как отмечалось в предыдущем пункте, одно из отличий в описании бозонов с ненулевой и нулевой массой состоит в том, что в безмассовом случае часть компонент волновой функции Ψ являются ненаблюдаемыми (потенциалы), а часть – наблюдаемыми (напряженности). На потенциалах можно задать калибровочные преобразования (речь по-прежнему идет о преобразованиях второго рода) и наложить дополнительные условия, исключающие «лишние» компоненты функции Ψ. При описании же частиц с ненулевой массой указанное разграничение компонент волновой функции явным образом не имеет места. Поэтому понятие калибровочной инвариантности в вышеуказанном смысле применяется обычно по отношению к теориям безмассовых частиц (полей).

Вместе с тем, известны работы (см., напр., [55]), в которых в разных подходах обсуждаются так называемые массивные калибровочно-инвариантные теории. В связи с этим возникают вопросы: каков статус таких теорий в подходе, основанном на использовании матричной формы РВУ; по каким признакам различаются калибровочно-инвариантные РВУ для частиц с ненулевой и нулевой массой?

Рассмотрим набор неприводимых представлений группы Лоренца

$$(0,0)\oplus(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\oplus(0,1)\oplus(1,0), \tag{8.1}$$

образующих схему зацеплений

$$\begin{tikzcd} & (0,0) \arrow[d, dash] & \\ (0,1) \arrow[r, dash] & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (1,0). \end{tikzcd} \quad (8.2)$$

Схеме (8.2) соответствует в общем случае тензорная система уравнений первого порядка

$$\alpha\partial_\mu\psi_\mu + a\psi_0 = 0, \tag{8.3}$$

$$\beta^*\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + \alpha^*\partial_\mu\psi_0 + b\psi_\mu = 0, \tag{8.4}$$

$$\beta(-\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{8.5}$$

В случае, когда ни один из параметров в этой системе не равен нулю, она описывает микрообъект с набором спинов $0, 1$ и двумя массами

$$m_1 = \frac{\sqrt{ab}}{|\alpha|}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{bc}}{|\beta|}, \tag{8.6}$$

причем масса m_1 относится к спину 0, а масса m_2 – к спину 1. Если наложить на параметры системы (8.3)–(8.5) условие

$$\frac{\sqrt{a}}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{b}}{|\beta|}, \tag{8.7}$$

получается РВУ для микрообъекта со спинами $0, 1$ и одним значением массы $m = m_1 = m_2$. При $\alpha = 0$ рассматриваемая система переходит в уравнение типа Даффина – Кеммера для частицы со спином 1 и массой $m = m_2$

$$\beta^*\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + b\psi_\mu = 0, \tag{8.8}$$

$$\beta(-\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{8.9}$$

При $\beta = 0$ система (8.3)–(8.5) переходит в уравнение типа Даффина – Кеммера для частицы со спином 0 и массой $m = m_1$

$$\alpha\partial_\mu\psi_\mu + a\psi_0 = 0, \tag{8.10}$$

$$\alpha^*\partial_\mu\psi_0 + b\psi_\mu = 0. \tag{8.11}$$

Теперь перейдем к интересующим нас случаям. Положим в (8.3) $a = 0$. Получим систему

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \tag{8.12}$$
$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b\psi_\mu = 0, \tag{8.13}$$
$$\beta(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{8.14}$$

Вводя обозначение

$$\varphi_\mu = \psi_\mu + \frac{\alpha^*}{b}\partial_\mu \psi_0, \tag{8.15}$$

систему (8.12)–(8.14) можно привести к виду

$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + b\varphi_\mu = 0, \tag{8.16}$$
$$\beta(-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{8.17}$$

совпадающему с точностью до обозначений с системой (8.8), (8.9).

К аналогичному результату можно прийти иначе, используя соображения, связанные с калибровочной инвариантностью. Система (8.12)–(8.14) инвариантна относительно преобразований

$$\psi_0 \to \psi_0' = \psi_0 - \frac{1}{\alpha^*}\Lambda, \quad \psi_\mu \to \psi_\mu' = \psi_\mu + \frac{1}{b}\partial_\mu \Lambda, \tag{8.18}$$

где произвол в выборе калибровочной функции Λ ограничен условием

$$\Box \Lambda = 0. \tag{8.19}$$

Но точно такое же уравнение нетрудно получить из системы (8.12)–(8.14) и для функции ψ_0. Отсюда следует, что функция ψ_0 в системе (8.12)–(8.14) может рассматриваться как калибровочная. На нее можно наложить дополнительное условие $\psi_0 = 0$, приводящее систему (8.12)–(8.14) к системе Даффина – Кеммера (8.8), (8.9).

Данный вариант калибровочно-инвариантной теории впервые был предложен в работе [56] и известен в литературе как подход Штюкльберга к описанию частицы со спином 1 и ненулевой массой. Детальный анализ этого подхода и его преимуществ по сравнению с обычными подходами Даффина – Кеммера и Прока дан в [57].

Теперь положим в (8.3)–(8.5) $c = 0$. Получим систему уравнений

$$\alpha \partial_\mu \psi_\mu + a\psi_0 = 0, \tag{8.20}$$
$$\beta^* \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \psi_0 + b\psi_\mu = 0, \tag{8.21}$$
$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \tag{8.22}$$

Из (8.20)–(8.22) вытекает уравнение второго порядка

$$\Box \psi_0 - \frac{ab}{|\alpha|^2}\psi_0 = 0, \tag{8.23}$$

которое означает, что эта система описывает частицу с ненулевой массой и спином $s = 0$.

Система (8.20)–(8.22) инвариантна относительно преобразований

$$\psi_{[\mu\nu]} \to \psi'_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} - \frac{1}{\beta^*}\Lambda_{[\mu\nu]}, \quad \psi_\mu \to \psi'_\mu = \psi_\mu + \frac{1}{b}\partial_\nu\Lambda_{[\mu\nu]}, \tag{8.24}$$

где произвол в выборе калибровочных функций $\Lambda_{[\mu\nu]}(x)$ ограничен условием

$$\partial_\alpha\partial_\nu\Lambda_{[\mu\nu]} - \partial_\mu\partial_\nu\Lambda_{[\alpha\nu]} = 0. \tag{8.25}$$

С другой стороны, как следует из уравнений (8.21), (8.22), аналогичному условию удовлетворяет тензор $\psi_{[\mu\nu]}$:

$$\partial_\alpha\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} - \partial_\mu\partial_\nu\psi_{[\alpha\nu]} = 0. \tag{8.26}$$

Другими словами, произвол в выборе калибровочных функций $\Lambda_{[\mu\nu]}$ достаточен, чтобы на $\psi_{[\mu\nu]}$ наложить дополнительное условие

$$\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{8.27}$$

При этом исключаются состояния со спином 1, и система (8.20)–(8.22) приводится к виду (8.10), (8.11).

Данный вариант калибровочно-инвариантной теории является своего рода аналогом подхода Штюкльберга, но для описания частицы с ненулевой массой и спином $s = 0$. Впервые он был предложен нами в работе [58]. Опять-таки заметим, что систему (8.20)–(8.22) с помощью подстановки

$$\varphi_\mu = \psi_\mu + \frac{\beta^*}{b}\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} \tag{8.28}$$

можно преобразовать к виду

$$\alpha\partial_\mu\varphi_\mu + a\psi_0 = 0, \quad \alpha^*\partial_\mu\psi_0 + b\varphi_\mu = 0, \tag{8.29}$$

совпадающему с (8.10), (8.11) с точностью до обозначений.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в (8.3)–(8.5) $b = 0$. Получим систему

$$\alpha\partial_\mu\psi_\mu + a\psi_0 = 0, \tag{8.30}$$

$$\beta^*\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + \alpha^*\partial_\mu\psi_0 = 0, \tag{8.31}$$

$$\beta(-\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu) + c\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{8.32}$$

инвариантную относительно преобразования

$$\psi_\mu \to \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu\Lambda, \tag{8.33}$$

где калибровочная функция Λ удовлетворяет условию (8.19). Такое же условие (уравнение) вытекает из системы (8.30), (8.31) для скалярной функции ψ_0. Это означает, что функция ψ_0 является фактически калибровочной функцией и ее, не уменьшая общности, можно выбрать равной нулю. В результате система (8.30)–(8.32) трансформируется к виду

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \tag{8.34}$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{8.35}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{8.36}$$

По своему содержанию система (8.34)–(8.36) совпадает с уравнениями Максвелла с той лишь несущественной разницей, что в теории Максвелла уравнение (8.34) выступает в качестве дополнительного условия, а в системе (8.34)–(8.36) – в качестве независимого уравнения. В обоих случаях речь идет о безмассовой частице со спиральностью ± 1. Очевидно, что и эквивалентная (8.34)–(8.36) система (8.30)–(8.32) имеет тот же физический смысл.

Рассмотренные тензорные системы, будучи записанными в матричной форме (1.2), характеризуются одинаковым видом матриц Γ_μ. Различие состоит только в матрице Γ_0. В базисе, в котором волновая функция Ψ имеет вид столбца

$$\Psi = (\psi_0, \psi_\mu, \psi_{[\mu\nu]})^T, \tag{8.37}$$

для Γ_0 имеют место выражения:

1) $a = 0$, система (8.12)–(8.14)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_4 & \\ & & I_6 \end{pmatrix}; \tag{8.38}$$

2) $c = 0$, система (8.20)–(8.22)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & I_4 & \\ & & 0_6 \end{pmatrix}; \tag{8.39}$$

3) $b = 0$, система (8.30)–(8.32)

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0_4 & \\ & & I_6 \end{pmatrix}. \tag{8.40}$$

Сопоставляя выражения (8.37)–(8.40), нетрудно заметить, что характер поля (массивное или безмассовое), описываемого РВУ (1.2), при прочих равных условиях зависит от лоренцевской структуры члена $\Gamma_0\Psi$. В том случае, когда этот член содержит набор лоренцевских ковариантов, минимально необходимый для построения уравнения вида (1.1) для частицы (поля) с ненулевой массой, возможно построение калибровочно-инвариантной теории массивного поля на основе РВУ вида (1.2). В противном случае может идти речь только о теории безмассового поля. Так, система (8.12)–(8.14), представленная в форме (1.2), содержит член $\Gamma_0\Psi$, в котором присутствуют ковarианты ψ_μ, $\psi_{[\mu\nu]}$. На основе последних можно построить РВУ вида (1.1) для частицы с ненулевой массой – 10-компонентное уравнение Даффина – Кеммера (спин 1). Соответственно 11-компонентное калибровочно-инвариантное РВУ вида (1.2) с волновой функцией (8.37) и матрицей Γ_0 (8.38) также описывает векторную частицу с ненулевой массой. Калибровочно-инвариантным аналогом уравнения Даффина – Кеммера для спина 0 является система (8.20)–(8.22), или 11-компонентное матричное РВУ (1.2) с матрицей Γ_0 (8.39), в котором член $\Gamma_0\Psi$ содержит ковarианты ψ_0, ψ_μ. В калибровочно-инвариантном РВУ с волновой функцией (8.37), которое сопоставляется тензорной системе (8.30)–(8.32), член $\Gamma_0\Psi$ содержит ковarианты ψ_0, $\psi_{[\mu\nu]}$. На основе последних уравнение первого порядка для частицы с ненулевой массой, как это вытекает из базовых положений теории РВУ, построить нельзя. Поэтому РВУ с матрицей Γ_0 (8.40) может описывать только безмассовое поле, что и было установлено нами выше непосредственным образом.

9. Теория РВУ и электрослабое поле

В стандартной теории РВУ предусматривается лишь возможность раздельного описания микрообъектов с ненулевой и нулевой массой. Однако в современной физике высоких энергий фигурируют поля, кванты которых (для данного поля) обладают как нулевой, так и ненулевой массой. Хорошо известным примером такого рода является электрослабое поле.

Если свободное электрослабое поле рассматривать как единый физический объект (а при достаточно высоких энергиях так оно и есть), то возникает вопрос, можно ли в рамках теории РВУ совместно описывать поля с ненулевой и нулевой массой (так называемые массивно-безмассовые поля). Напомним, что под совместным здесь по-прежнему понимается описание в рамках одной не распадающейся в релятивистски-инвариантном смысле системы уравнений.

Остановимся подробно на этом вопросе. Снова обратимся к схеме зацеплений (4.1), где представление $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ является векторным, а $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$ – псевдовекторным. Если в наиболее общей тензорной формулировке релятивистски-инвариантной системы первого порядка (7.27), соответствующей схеме (4.1), положить

$$a = 0, \quad b = c = m, \tag{9.1}$$

получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{9.2}$$

$$\beta(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}) + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{9.3}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \beta^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{9.4}$$

Из (9.2)–(9.4) нетрудно получить уравнения второго порядка

$$(\Box - \frac{m^2}{|\beta|^2})\psi_{[\mu\alpha\nu]} = 0, \tag{9.5}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{9.6}$$

$$\Box\psi_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\psi_\nu = 0. \tag{9.7}$$

Уравнения (9.5), (9.6) означают, что система (9.2)–(9.4) содержит описание псевдовекторной частицы с ненулевой массой. Уравнение же (9.7) указывает на то, что данная система описывает еще и безмассовое векторное поле с потенциалом ψ_μ. Последнее обстоятельство позволяет использовать калибровочное преобразование вида (7.10), относительно которого инвариантны и система (9.2)–(9.4) и уравнение (9.7). Эта инвариантность означает, что указанное безмассовое поле является полем максвеловского типа со спиральностью ±1.

Таким образом, не распадающаяся по группе Лоренца тензорная система (9.2)–(9.4) дает совместное описание псевдовекторной частицы с ненулевой массой и безмассового векторного поля электромагнитного типа.

Отметим также, что если в (7.27) выбрать

$$b = 0, \quad a = c = m, \tag{9.8}$$

то мы придем к дуально симметричной теории по отношению к (9.2)–(9.4) системе в том смысле, что при выборе (9.8) система (7.27) приводит к совместному описанию массивной векторной частицы и безмассового поля максвелловского типа с псевдовекторным потенциалом.

Кроме того, как уже отмечалось в главе 4, на основе схемы (4.1) можно осуществить совместное описание микрообъекта с двумя различными ненулевыми массами. Для этого в (7.27) надо положить

$$a = b = c = m. \tag{9.9}$$

В результате получим систему первого порядка

$$\alpha\partial_\nu\psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \tag{9.10}$$

$$\beta(\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]}) + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{9.11}$$

$$\alpha^*(-\partial_\nu\psi_\alpha + \partial_\alpha\psi_\nu) + \beta^*\partial_\mu\psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\nu\alpha]} = 0. \tag{9.12}$$

Из (9.10)–(9.12) вытекают уравнения второго порядка (9.5), (9.6), а также уравнения

$$(\Box - \frac{m^2}{|\alpha|^2})\psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu\psi_\mu = 0, \tag{9.13}$$

что и подтверждает вышесказанное.

Теперь рассмотрим возможность совместного описания векторных частиц (полей), сопоставляемых системам (9.2)–(9.4) и (9.10)–(9.12). Очевидно, что простое механическое объединение этих систем не приведет к желаемому результату, поскольку полученная таким образом система уравнений распадается в релятивистски-инвариантном смысле и, следовательно, с точки зрения теории РВУ не может описывать единый физический объект. Соответствующая схема зацеплений также распадается на два самостоятельных независимых фрагмента вида (4.1).

Самый простой и естественный способ построения нераспадающейся системы уравнений, обеспечивающей совместное описание вышеуказанных векторных полей, заключается во введении в рассмотрение дополнительного скалярного представления $(0,0)$. В результате можно получить, например, схему зацеплений

$$\begin{tikzcd}
 & (0,1) \arrow[dr, dash] & & & & (0,1) \arrow[dr, dash] & \\
(\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[rrr, dash, bend left=60] & & (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \arrow[r, dash] & (0,0) \arrow[r, dash] & (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\,. \\
 & (1,0) \arrow[ur, dash] & & & & (1,0) \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd} \tag{9.14}$$

Соответствующая схеме (9.14) система уравнений первого порядка имеет следующий наиболее общий вид:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{9.15}$$

$$\alpha(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}) + \beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{9.16}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \alpha^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{9.17}$$

$$\rho \partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} + \gamma \partial_\mu \psi_0 + m\varphi_\mu = 0, \tag{9.18}$$

$$\delta(\partial_\mu \varphi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \varphi_{[\alpha\mu]}) + \sigma \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\beta \psi_0 + m\varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{9.19}$$

$$\rho^*(-\partial_\mu \varphi_\nu + \partial_\nu \varphi_\mu) + \delta^* \partial_\alpha \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m\varphi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{9.20}$$

$$\frac{1}{3!}\beta^* \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \gamma^* \partial_\mu \psi_\mu + \frac{1}{3!}\sigma^* \varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \partial_\beta \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_0 = 0. \tag{9.21}$$

Найдем уравнения второго порядка, к которым приводит система (9.15)– (9.21). Подействуем на (9.17) оператором ∂_ν. С учетом (9.15) получим

$$\Box \psi_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0. \tag{9.22}$$

Используя калибровочное преобразование (7.10), уравнение (9.22) стандартным способом можно привести к виду

$$\Box \psi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \psi_\mu = 0. \tag{9.23}$$

Применение оператора ∂_ν к уравнению (9.20) дает

$$\rho^*(\Box \varphi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \varphi_\nu) + m\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{9.24}$$

Из (9.18) выразим член $\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]}$

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu]} = -\frac{\gamma}{\rho}\partial_\mu \psi_0 - \frac{m}{\rho}\varphi_\mu. \tag{9.25}$$

Отсюда следует

$$\partial_\mu \varphi_\mu = -\frac{\gamma}{m}\Box\psi_0. \tag{9.26}$$

Подставляя (9.25), (9.26) в (9.24), будем иметь

$$\Box\varphi_\mu + \frac{\gamma}{m}\partial_\mu\Box\psi_0 - \frac{m\gamma}{|\rho|^2}\partial_\mu\psi_0 - \frac{m^2}{|\rho|^2}\varphi_\mu = 0. \tag{9.27}$$

Если ввести в рассмотрение вектор

$$\Phi_\mu = \varphi_\mu + \frac{\gamma}{m}\partial_\mu\psi_0, \tag{9.28}$$

уравнение (9.27) принимает вид

$$\Box\Phi_\mu - \frac{m^2}{|\rho|^2}\Phi_\mu = 0. \tag{9.29}$$

При это вектор Φ_μ с учетом (9.26) удовлетворяет условию

$$\partial_\mu\Phi_\mu = 0. \tag{9.30}$$

Теперь применим к уравнению (9.17) оператор $\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\sigma$:

$$\alpha^*\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\sigma\partial_\alpha\psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\sigma\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{9.31}$$

С помощью непосредственно проверяемого тождества

$$\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\partial_\sigma\partial_\alpha\psi_{[\mu\nu\alpha]} = \varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} - \partial_\rho\partial_\beta\varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha}\psi_{[\mu\nu\alpha]}$$

уравнение (9.31) приводится к виду

$$\alpha^*(\varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} - \partial_\rho\partial_\beta\varepsilon_{\beta\mu\nu\alpha}\psi_{[\mu\nu\alpha]}) + m\varepsilon_{\rho\mu\nu\alpha}\partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} = 0. \tag{9.32}$$

Из уравнения (9.16) вытекает

$$\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]} = -\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0 - \frac{m}{\alpha}\psi_{[\mu\nu\alpha]}. \tag{9.33}$$

Применяя к (9.16) оператор $\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho$, получим

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho\psi_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{\beta}{m}\Box\psi_0. \tag{9.34}$$

Комбинация уравнений (9.32)–(9.34) дает

$$\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\psi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\beta}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\Box\psi_0 - \frac{\beta m}{|\alpha|^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0 = 0. \qquad (9.35)$$

Посредством обозначения

$$\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\beta}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0 \qquad (9.36)$$

приведем уравнение (9.35) к виду

$$\Box\Psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \qquad (9.37)$$

Одновременно с (9.37) в соответствии с (9.34) имеем условие

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \qquad (9.38)$$

Аналогичным образом из системы (9.15)–(9.21) можно получить уравнение второго порядка

$$\Box\Phi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\delta|^2}\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = 0 \qquad (9.39)$$

с дополнительным условием

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \qquad (9.40)$$

где

$$\Phi_{[\mu\nu\alpha]} = \varphi_{[\mu\nu\alpha]} + \frac{\sigma}{m}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\psi_0. \qquad (9.41)$$

Найдем, наконец, уравнение второго порядка для скаляра ψ_0. Для этого, применяя оператор $\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho$ к уравнению (9.19), будем иметь

$$\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\rho}\partial_\rho\varphi_{[\mu\nu\alpha]} = \frac{\sigma}{m}\Box\psi_0. \qquad (9.42)$$

Подставляя теперь (9.26), (9.34) и (9.42) в (9.21), получим

$$\Box\psi_0 - \frac{m^2}{|\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2}\psi_0 = 0. \qquad (9.43)$$

Уравнения (9.23), (9.29), (9.30), (9.37)–(9.40) и (9.43) показывают, что в не распадающейся по группе Лоренца системе первого порядка (9.15)–(9.21) содержится описание четырех частиц (полей) со спином 1, одна из которых имеет нулевую массу, а также скалярной частицы с ненулевой массой.

Тензорная система (9.15)–(9.21) может быть представлена в стандартной матричной форме РВУ (1.2) с особенной матрицей Γ_0 вида

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & mI_{25} \end{pmatrix}. \tag{9.44}$$

Дадим формулировку этого РВУ в базисе Гельфанда – Яглома.

Введем, как обычно, нумерацию неприводимых представлений, содержащихся в схеме зацеплений (9.14), например:

$$\begin{gathered} (0,0) \sim 1\ (\psi_0), \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \sim 2\ (\psi_\mu), \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \sim 3\ (\psi_{[\mu\nu\alpha]}), \\ (0,1),(1,0) \sim 4,5\ (\psi_{[\mu\nu]}), \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \sim 6\ (\varphi_\mu), \\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \sim 7\ (\varphi_{[\mu\nu\alpha]}), \quad (0,1),(1,0) \sim 8,9\ (\varphi_{[\mu\nu]}). \end{gathered} \tag{9.45}$$

Тогда для спиновых блоков C^0, C^1 матрицы Γ_4 получим следующие общие выражения:

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^0_{13} & c^0_{16} & c^0_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^0_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^0_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^0_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} (C^1)' & \\ & (C^1)'' \end{pmatrix}, \tag{9.46}$$

$$(C^1)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{24} & c^1_{25} \\ 0 & 0 & c^1_{34} & c^1_{35} \\ c^1_{42} & c^1_{43} & 0 & 0 \\ c^1_{52} & c^1_{53} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{68} & c^1_{69} \\ 0 & 0 & c^1_{78} & c^1_{79} \\ c^1_{86} & c^1_{87} & 0 & 0 \\ c^1_{96} & c^1_{97} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.47}$$

Условия инвариантности (1.41) рассматриваемого РВУ относительно преобразований собственной группы Лоренца никаких ограничений на элементы c^0_{ij}, c^1_{ij} здесь не накладывает. Требование P-инвариантности теории применительно к электрослабому полю не является актуальным. Условие (1.48) возможности лагранжевой формулировки теории приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} c^0_{31} = f(c^0_{13})^*, \quad c^0_{61} = g(c^0_{16})^*, \quad c^0_{71} = h(c^0_{17})^*, \\ c^1_{42} = p(c^1_{25})^*, \quad c^1_{52} = p(c^1_{24})^*, \quad c^1_{43} = q(c^1_{35})^*, \quad c^1_{53} = q(c^1_{34})^*, \\ c^1_{86} = r(c^1_{69})^*, \quad c^1_{96} = r(c^1_{68})^*, \quad c^1_{87} = s(c^1_{79})^*, \quad c^1_{97} = s(c^1_{78})^*, \end{gathered} \tag{9.48}$$

где

$$\begin{gathered} f = \frac{\eta^0_{33}}{\eta^0_{11}}, \quad g = \frac{\eta^0_{66}}{\eta^0_{11}}, \quad h = \frac{\eta^0_{77}}{\eta^0_{11}}, \\ p = \frac{\eta^1_{45}}{\eta^1_{22}}, \quad q = \frac{\eta^1_{45}}{\eta^1_{33}}, \quad r = \frac{\eta^1_{89}}{\eta^1_{66}}, \quad s = \frac{\eta^1_{89}}{\eta^1_{77}}. \end{gathered} \tag{9.49}$$

Вводя также для удобства обозначения

$$\begin{aligned}
&c^0_{13} = \lambda_1, \quad c^0_{16} = \lambda_2, \quad c^0_{17} = \lambda_3, \quad c^1_{24} = \lambda_4, \quad c^1_{25} = \lambda_5, \\
&c^1_{34} = \lambda_6, \quad c^1_{35} = \lambda_7, \quad c^1_{68} = \lambda_8, \quad c^1_{69} = \lambda_9, \quad c^1_{78} = \lambda_{10}, \quad c^1_{79} = \lambda_{11},
\end{aligned} \tag{9.50}$$

с учетом (9.48), (9.49) для блоков C^0 (9.46), $(C^1)'$, $(C^1)''$ (9.47) получим выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\lambda_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g\lambda_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h\lambda_3^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.51}$$

$$(C^1)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ p\lambda_5^* & q\lambda_7^* & 0 & 0 \\ p\lambda_4^* & q\lambda_6^* & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (C^1)'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_8 & \lambda_9 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} & \lambda_{11} \\ r\lambda_9^* & s\lambda_{11}^* & 0 & 0 \\ r\lambda_8^* & s\lambda_{10}^* & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.52}$$

Характеристические уравнения для блоков (9.51), (9.52) имеют соответственно вид

$$\lambda^3(\lambda^2 - f|\lambda_1|^2 - g|\lambda_2|^2 - h|\lambda_3|^2) = 0, \tag{9.53}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 - \lambda^2(p\lambda_4^*\lambda_5 + p\lambda_4\lambda_5^* + q\lambda_6^*\lambda_7 + q\lambda_6\lambda_7^*) + \\
&+ pq(\lambda_4\lambda_5^*\lambda_6^*\lambda_7 + \lambda_4^*\lambda_5\lambda_6\lambda_7^* - |\lambda_4|^2|\lambda_7|^2 - |\lambda_5|^2|\lambda_6|^2) = 0,
\end{aligned} \tag{9.54}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 - \lambda^2(r\lambda_8^*\lambda_9 + r\lambda_8\lambda_9^* + s\lambda_{10}^*\lambda_{11} + s\lambda_{10}\lambda_{11}^*) + \\
&+ rs(\lambda_8\lambda_9^*\lambda_{10}^*\lambda_{11} + \lambda_8^*\lambda_9\lambda_{10}\lambda_{11}^* - |\lambda_8|^2|\lambda_{11}|^2 - |\lambda_9|^2|\lambda_{10}|^2) = 0.
\end{aligned} \tag{9.55}$$

РВУ, эквивалентное тензорной системе (9.15)–(9.21) получится, если положить

$$\begin{aligned}
&f|\lambda_1|^2 + g|\lambda_2|^2 + h|\lambda_3|^2 = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\sigma|^2, \\
&p\lambda_4^*\lambda_5 + p\lambda_4\lambda_5^* + q\lambda_6^*\lambda_7 + q\lambda_6\lambda_7^* = |\alpha|^2 + 1, \\
&pq(\lambda_4\lambda_5^*\lambda_6^*\lambda_7 + \lambda_4^*\lambda_5\lambda_6\lambda_7^* - |\lambda_4|^2|\lambda_7|^2 - |\lambda_5|^2|\lambda_6|^2) = |\alpha|^2, \\
&r\lambda_8^*\lambda_9 + r\lambda_8\lambda_9^* + s\lambda_{10}^*\lambda_{11} + s\lambda_{10}\lambda_{11}^* = |\rho|^2 + |\delta|^2, \\
&rs(\lambda_8\lambda_9^*\lambda_{10}^*\lambda_{11} + \lambda_8^*\lambda_9\lambda_{10}\lambda_{11}^* - |\lambda_8|^2|\lambda_{11}|^2 - |\lambda_9|^2|\lambda_{10}|^2) = |\rho|^2|\delta|^2.
\end{aligned} \tag{9.56}$$

Соотношениям (9.56) можно удовлетворить, выбрав, например:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \beta, \quad \lambda_2 = \sqrt{2(|\gamma|^2 + |\sigma|^2)}, \quad \lambda_3 = \sqrt{|\gamma|^2 + |\sigma|^2}, \\
&\lambda_4 = -\lambda_5 = \frac{i|\alpha|}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_6 = \lambda_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_8 = -\lambda_9 = \frac{i|\rho|}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_{10} = \lambda_{11} = \frac{|\delta|}{\sqrt{2}},
\end{aligned} \tag{9.57}$$

$$f = g = -h = -p = q = -r = s = 1. \tag{9.58}$$

Равенства (9.58), в свою очередь, приводят к следующим значениям элементов $\eta^s_{\tau\tau'}$ матрицы лоренц-инвариантной билинейной формы η:

$$\eta^0_{11} = \eta^0_{33} = \eta^0_{66} = -\eta^0_{77} = \eta^1_{22} = -\eta^1_{33} = -\eta^1_{45} = -\eta^1_{66} = \eta^1_{77} = \eta^1_{89} = 1. \tag{9.59}$$

Спиновые блоки C^0 (9.51), $(C^1)'$, $(C^1)''$ (9.52) в соответствии с (9.57), (9.58) принимают вид

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta & \sqrt{2(|\gamma|^2+|\sigma|^2)} & \sqrt{|\gamma|^2+|\sigma|^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2(|\gamma|^2+|\sigma|^2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{|\gamma|^2+|\sigma|^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.60}$$

$$\begin{gathered} (C^1)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i|\alpha| & -i|\alpha| \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -i|\alpha| & 1 & 0 & 0 \\ i|\alpha| & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (C^1)'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i|\rho| & -i|\rho| \\ 0 & 0 & |\delta| & |\delta| \\ -i|\rho| & |\delta| & 0 & 0 \\ i|\rho| & |\delta| & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{9.61}$$

Вид блоков η^0, η^1 матрицы η вытекает из (9.59).

Спиновый блок C^0 (9.60) имеет один (с точностью до знака) ненулевой корень

$$\pm\sqrt{|\beta|^2+|\gamma|^2+|\sigma|^2}, \tag{9.62}$$

который соответствует массе скалярного бозона

$$m^{(0)} = \frac{m}{\sqrt{|\beta|^2+|\gamma|^2+|\sigma|^2}}. \tag{9.63}$$

Блок $(C^1)'$ имеет корни ± 1, $\pm|\alpha|$. Первый из них в силу проективности матрицы Γ_0 (9.44) относится к безмассовому векторному полю максвелловского типа, второй – к векторной частице с массой

$$m_1^{(1)} = \frac{m}{|\alpha|}. \tag{9.64}$$

Корни $\pm|\delta|$, $\pm|\rho|$ блока $(C^1)''$ соответствуют массам

$$m_2^{(1)} = \frac{m}{|\delta|}, \quad m_3^{(1)} = \frac{m}{|\rho|} \tag{9.65}$$

двух других векторных частиц, описание которых также содержится в обсуждаемом РВУ и эквивалентной ему тензорной системе.

Итак, схема зацеплений (9.14) позволяет построить релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов – одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории с необходимостью возникает скалярная частица с ненулевой массой, которая собственно и обеспечивает единство компонент указанного векторного поля. Векторная составляющая последнего может интерпретироваться «электрослабое» поле, а скалярное – как линейный аналог бозона Хиггса. Линейный характер уравнения (9.43), описывающего скалярную частицу, связан с тем, что вопрос о происхождении массы не затрагивается в теории РВУ, рамками которой мы ограничиваемся. Наличие или отсутствие массы является в данной теории заданным фактом, поэтому нет необходимости вводить в (9.43) нелинейные члены. Таким образом, предлагаемая нами модель, не вступая в противоречие с общепринятым хиггсовским механизмом генерации массы, позволяет указать на еще одну возможную причину появления скалярной составляющей в теории векторного электрослабого поля. Однако если вместо хиггсовского механизма рассматривать иной способ генерации массы Кальба – Рамонда, описанный в главе 7, то мы придем к альтернативной модели электрослабого взаимодействия, в которой скалярный бозон играет исключительно роль связующей компоненты для векторных составляющих электрослабого поля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1936. – Vol. 155. – P. 447–459.
2. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftefreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12, № 1. – S. 3–37.
3. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
4. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, № 2-3. – P. 200–216.
5. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, № 3. – P. 451–462.
6. Harish-Chandra. On relativistic wave equations / Harish-Chandra // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 71, № 11. – P. 793–805.
7. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.
8. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, – вып. 8. – С. 703–733.
9. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, Я. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 368 с.
10. Наймарк, М. А. Линейные представления группы Лоренца / М. А. Наймарк. – М.: Физматгиз, 1958. – 376 с.
11. Федоров, Ф. И. Обобщенные релятивистские волновые уравнения / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 82, № 1. – С. 37–40.
12. Федоров, Ф. И. О минимальных полиномах матриц релятивистских волновых уравнений / Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 79, № 5. – С. 787–790.
13. Федоров, Ф. И. Проективные операторы в теории элементарных частиц / Ф. И. Федоров // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 35. – С. 495–498.
14. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. 1951. – № 12. – С. 156–173.

15. Rarita, W. On a theory of particles with half-integral spin / W. Rarita, J. S. Schwinger // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 60, № 1. – P. 61–64.

16. Новожилов, Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю. В. Новожилов. – М. : Наука, 1972. – 472 с.

17. Petras, M. A. Note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $\frac{3}{2}$ / M. Petras // Czech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.

18. Фрадкин, Э. Е. О допустимых преобразования для частиц с высшими спинами / Э. Е. Фрадкин, С. В. Измайлов // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 2. – С. 277–280.

19. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.

20. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.

21. Capri, A. Z. Wave equations for spin-$\frac{1}{2}$ fields / A. Z. Capri, A. Shamaly // Nuovo Cim. A. – 1977. – Vol. 42, № 4. – P. 512–526.

22. Cox, W. Higher-rank representations for zero spin field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – Vol. 15. – P. 627–635.

23. Shamaly, A. Unified theories for massive spin 1 fields / A. Shamaly, A. Z. Capri // Can. J. Phys. – 1973. – Vol. 51, № 14. – P. 1467–1470.

24. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином $\frac{1}{2}$ / И. Улегла // Журн. экспеpемент. и теорет. физики. – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.

25. Formanek, J. On the Ulehla – Petras wave equation / J. Formanek // Czech. J. Phys. B. – 1961. – Vol. 11, № 8. – P. 545–553.

26. Гронский, В. К. Ковариантные методы расчета поляризационных эффектов для векторных частиц / В. К. Гронский // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1976. – № 5. – С. 75–84.

27. Богуш, А. А. Описание частицы в электромагнитном поле различными уравнениями / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1984. – № 3. – С. 27–34.

28. Кисель, В. В. Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений / В. В. Кисель. – Минск, 1983. – 40 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 319).

29. Богуш, А. А. Обобщенные символы Кронекера / А. А. Богуш, Ф. И. Федоров // Докл. АН БССР. – 1968. – № 1. – С. 21–24.

30. Khalil, M. A. K. Barnakle equivalence structure in relativistic wave equations / M. A. K. Khalil // Prog. Theor. Phys. – 1978. – Vol. 60, № 5. – P. 1559–1582.

31. Чижов, М. В. Теория и феноменология киральных частиц со спином единица / М. В. Чижов // Физика элементар. частиц и атом. ядра. – 2011. – Т. 42, вып. 1. – С. 169–350.

32. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.

33. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, № 6. – P. 413–417.

34. Benn, I. M. A generalization model, based on Kähler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 119, № 4–6. – P. 348–350.

35. Dirac, P. A. M. The physical interpretation of quantum mechanics / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1942. – Vol. 180. – P. 1–40.

36. Pauli, W. On Dirac’s new method of field quantization / W. Pauli // Rev. Mod. Phys. – 1943. – Vol. 15. – P. 175–207.

37. Сатиков, И. А. О квантовом описании поля Дирака – Кэлера / И. А. Сатиков, В. И. Стражев // Теорет. и мат. физика. – 1987. – Т. 73, № 1. – С. 16–25.

38. Березин, А. В. Уравнение Дирака – Кэлера и квантовая теория дираковского поля с $SU(2,2)$-внутренней симметрией / А. В. Березин, И. А. Сатиков, В. И. Стражев. – Минск, 1998. – 35 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 528).

39. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, Ф. И. Федоров. – Минск, 1988. – 36 с. – (Препринт / Ин-т физики АН БССР ; № 517).

40. Плетюхов, В. А. О вторичном квантовании в теории релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 7. – С. 602–605.

41. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.

42. Азисов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой / Т. Я. Азисов, И. С. Иохвидов. – М. : Наука, 1986. – 340 с.

43. Марголин, А. Э. О дискретной симметрии $SL(2,C)$-калибровочного поля Янга – Миллса / А. Э. Марголин, В. И. Стражев // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук – 1987. – № 4. – С. 103–107.

44. Марголин, А. Э. О калибровочной теории с группой некомпактной симметрии / А. Э. Марголин, В. И. Стражев // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 5. – С. 418–421.

45. Плетюхов, В. А. О возможных обобщениях уравнения Дирака – Кэлера / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. АН СССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1987. – № 5. – С. 87–92.

46. Плетюхов, В. А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Ядер. физика. – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.

47. Плетюхов, В. А. Тензорные поля и дираковские частицы с $SU(4,4)$- и $SU(6,6)$-симметриями / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Докл. АН БССР. – 1989. – Т. 33, № 4. – С. 328–331.

48. Плетюхов, В. А. Квантовая теория тензорного поля с $SU(4,4)$-симметрией / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 4. – С. 88–95.

49. Плетюхов, В. А. Квантовая теория тензорного поля с $SU(6,6)$-симметрией / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Acta Phys. Polonica. B. – 1990. – Vol. 21, № 11. – P. 881–889.

50. Плетюхов, В. А. Геометризованная $SU(3)$-калибровочная теория в решеточном пространстве / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Теорет. и мат. физика. – 1991. – Т. 87, № 2. – С. 173–187.

51. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // Ядер. физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.

52. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, № 8. – P. 2273–2284.

53. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and the gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.

54. Dvoeglazov, V. V. Photon – notoph equations / V. V. Dvoeglazov // arXiv : physics/9804010v1 (Submitted on 7 Apr. 1998).

55. Harikumar, E. Duality and massive gauge invariant theories / E. Harikumar, M. Savikumar // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 57. – P. 3794–3804.

56. Stückelberg, E. C. G. Die Wechselwirkungckracfte in der Electrodynamic und der Feldtheorie der Kernkraefle / E. C. G. Stückelberg // Helv. Phys. Acta. – 1938. – Bd. 11. – S. 225–236.

57. Ruegg, H. The Stueckelberg field / H. Rueg, M. Ruiz-Altabal // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 119. – P. 3265–3348.

58. Плетюхов, В. А. Массивные калибровочные-инвариантные теории и безмассовые поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 80–88.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.03.2017

Pletyukhov V.A. **Relativistic Wave Equations with Extended Sets of the Lorentz Group Representations**

It is shown that using extended sets of the Lorentz group irreducible representations opens new possibilities for the theory of relativistic wave equations from the viewpoint of a spatio-temporal description of both an internal structure and isospin degrees of freedom of elementary particles. The developed approach also allows us to apply the methods of the theory of relativistic wave equations in both superstring and gauge models of the fundamental interactions.