УДК 519.652+517.548.5

А.П. Худяков[1], О.В. Матысик[2]

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[2]*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

МАТРИЧНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ В СЛУЧАЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

Работа посвящена построению и исследованию матричных интерполяционных многочленов для операторов, заданных на множестве квадратных и прямоугольных матриц. Получены интерполяционные формулы лагранжева типа по системам тригонометрических, экспоненциальных, а также рациональных матричных функций двух видов. В формулах не требуется существование обратных матриц, в их структуру входят псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза. Значения интерполируемого оператора могут быть на множестве как квадратных, так и прямоугольных матриц.

Введение

В структуру многих матричных интерполяционных многочленов входят обратные матрицы. Это накладывает некоторые ограничения на интерполяционные узлы, так как обратные матрицы не всегда существуют. В данной работе предлагается способ построения интерполяционных многочленов, в структуру которых вместо обратных матриц входят обобщенные псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза. Как известно [1], псевдообратная матрица Мура – Пенроуза существует и единственна для любой квадратной, а также прямоугольной матрицы.

В данной работе построены матричные интерполяционные формулы для функций матричного аргумента. В случае тригонометрического и экспоненциального интерполирования матричная функция задается на множестве квадратных матриц, но ее значения могут быть на множестве квадратных или прямоугольных матриц. При построении формул по системе матричных рациональных функций предполагается, что интерполируемый оператор может быть задан как на множестве квадратных матриц, так и на множестве прямоугольных матриц. Значения данного оператора также могут быть на множестве квадратных или прямоугольных матриц.

Формула тригонометрического интерполирования

Пусть S_{lr} и S_{rl} есть $l\times r-$ и $r\times l-$матрицы $(r\geq l)$ следующих структур:

$$S_{lr}=\left[I_l\,|\,O_{l,r-l}\right] \text{ и } S_{rl}=\begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

где I_l – единичная матрица размера l, а $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – нулевые матрицы указанных размеров. Очевидно, что $S_{lr}S_{rl}=I_l$. В работах [2; 3] для операторов, заданных на множестве прямоугольных матриц, построена и исследована формула алгебраического матричного интерполирования вида

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{n}F(A_k)N_k^{+}S_{l_kr_k}B_k^{+}l_{nk}(A)C_k^{+}S_{r_kl_k}M_k^{+}F(A_k), \tag{2}$$

где $l_{nk}(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $S_{l_k r_k}$, $S_{r_k l_k}$ – матрицы вида (1), а $N_k^+, B_k^+, C_k^+, M_k^+$ – псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза, соответственно, для матриц N_k, B_k, C_k, M_k, которые, как известно, всегда существуют и единственны [1] для любых матриц. Пусть r_k и l_k – ранги матриц $l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$, тогда для матричного многочлена (2), при условии, что $l_k \le r_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, выполняются равенства

$$L_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

На множествах квадратных матриц одна из известных формул матричного тригонометрического интерполирования вида

$$T_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} \Psi_k(A)\Psi_k^{-1}(A_k)F(A_k),$$

где

$$\Psi_k(A) = \sin\frac{A - A_0}{2} \cdots \sin\frac{A - A_{k-1}}{2} \sin\frac{A - A_{k+1}}{2} \cdots \sin\frac{A - A_{2n}}{2},$$

существует, если матрицы $\sin\dfrac{A_\nu - A_k}{2}$ $(\nu \ne k)$ обратимы. Построим на множестве квадратных матриц интерполяционные матричные многочлены, когда существование обратных матриц $\sin^{-1}\dfrac{A_\nu - A_k}{2}$ не требуется. Как и ранее, значения функции $F(A)$ могут быть на множестве прямоугольных матриц.

Пусть $\tilde{\Psi}_k(A) = \Psi_k(A)\Psi_k^+(A_k)$, где $\Psi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для матрицы $\Psi_k(A_k)$, а r_k и l_k – ранги матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ соответственно $(k = 0,1,\ldots,2n)$.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ *и* $F(A_k) = M_k N_k$ *– скелетные разложения матриц* $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ *и* $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$. *Тогда для матричного многочлена*

$$T_n(A) = \sum_{k=0}^{2n} F(A_k)N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Psi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \tag{3}$$

при условии, что $l_k \le r_k$ $(k = 0,1,\ldots,2n)$, *выполняются интерполяционные условия*

$$T_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ (\nu = 0,1,\ldots,2n). \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{\Psi}_k(A_\nu) = \delta_{k\nu}\tilde{\Psi}_k(A_k) = \delta_{k\nu}B_\nu C_\nu$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. При $A = A_\nu$ из равенства (3) следует, что

$$T_n(A_\nu) = F(A_\nu)N_\nu^+ S_{l_\nu r_\nu} B_\nu^+ B_\nu C_\nu C_\nu^+ S_{r_\nu l_\nu} M_\nu^+ F(A_\nu).$$

Из скелетного разложения матрицы $\tilde{\Psi}_\nu(A_\nu)$ следует, что $B_\nu^+ B_\nu = C_\nu C_\nu^+ = I_{r_\nu}$. Так как $S_{l_\nu r_\nu} S_{r_\nu l_\nu} = I_{l_\nu}$, а $N_\nu^+ M_\nu^+ = F^+(A_\nu)$, то окончательно имеем $T_n(A_\nu) = F(A_\nu) F^+(A_\nu) F(A_\nu) = F(A_\nu)$. Теорема 1 доказана.

Для наглядности приведем линейный случай $(n=1)$ формулы (3). Для матричного многочлена

$$T_1(A) = \sum_{k=0}^{2} F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Psi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k), \tag{5}$$

где

$$\tilde{\Psi}_0(A) = \Psi_0(A)\Psi_0^+(A_0) = \sin\frac{A-A_1}{2}\sin\frac{A-A_2}{2}\left[\sin\frac{A_0-A_1}{2}\sin\frac{A_0-A_2}{2}\right]^+,$$

$$\tilde{\Psi}_1(A) = \Psi_1(A)\Psi_1^+(A_1) = \sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_2}{2}\left[\sin\frac{A_1-A_0}{2}\sin\frac{A_1-A_2}{2}\right]^+,$$

$$\tilde{\Psi}_2(A) = \Psi_2(A)\Psi_2^+(A_2) = \sin\frac{A-A_0}{2}\sin\frac{A-A_1}{2}\left[\sin\frac{A_2-A_0}{2}\sin\frac{A_2-A_1}{2}\right]^+,$$

$\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k=0,1,2)$, а матрицы $S_{l_k r_k}$ и $S_{r_k l_k}$ имеют структуру вида (1), при $l_k \le r_k$ $(k=0,1,2)$, выполняются интерполяционные условия

$$T_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ (\nu = 0,1,2).$$

Пример. Для матричной функции $F(A) = e^{\sin A} - e^{\sqrt{3}/2} I$, где I – единичная матрица второго порядка, и узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \frac{\pi}{48}\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -3 & 28 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{\pi}{12}\begin{bmatrix} 51 & 0 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

построим интерполяционный многочлен вида (5). Здесь $F(A)$ выбрана таким образом, чтобы выполнялись ограничения, накладываемые на ранги $l_k \le r_k$ $(k=0,1,2)$. В узлах функция $F(A)$ принимает значения

$$F(A_0) = \frac{\alpha_1 - 1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}344 & -1{,}377 \end{bmatrix},$$

$$F(A_1) = \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}0624 & 0{,}250 \end{bmatrix},$$

$$F(A_2) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4(\alpha_2 - \alpha_1) & 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 & 4(\alpha_4 - \alpha_1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0{,}349 & 0 \\ 0{,}183 & -1{,}082 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_1 = e^{\sqrt{3}/2}$, $\alpha_2 = e^{1/\sqrt{2}}$, $\alpha_3 = e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$, $\alpha_4 = e^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.

Матрицы $\sin\frac{A_0 - A_1}{2} = \frac{1}{4}\sin\frac{7\pi}{24}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $F(A_0)$ и $F(A_1)$ не имеют обратных, поэтому будем строить их скелетные разложения и использовать аппарат псевдообратных матриц Мура – Пенроуза. В нашем случае

$$\tilde{\Psi}_0(A_0) = \tilde{\Psi}_1(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \tilde{\Psi}_2(A_2) = I.$$

Скелетные разложения данных матриц, а также значений $F(A_k)$ имеют, соответственно, вид $\tilde{\Psi}_k(A_k) = B_k C_k$ и $F(A_k) = M_k N_k$ $(k = 0,1,2)$, где $C_j = B_j^T = M_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ при $j = 0,1$, $B_2 = C_2 = M_2 = I$, матрицы N_0, N_1 совпадают со вторыми строками матриц $F(A_0)$ и $F(A_1)$, а $N_2 = F(A_2)$. При этом псевдообратные матрицы $B_k^+, \tilde{N}_k^+, M_k^+$ равны, соответственно, транспонированным матрицам $B_k^T, \tilde{N}_k^T, M_k^T$ $(k = 0,1,2)$, а

$$N_0^+ = \frac{4}{17(\alpha_1 - 1)}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0,171 \\ -0,683 \end{bmatrix},\quad N_1^+ = \frac{4}{17(\alpha_1 - \alpha_3)}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -0,942 \\ 3,768 \end{bmatrix},$$

$$N_2^+ = \frac{1}{4(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_4)}\begin{bmatrix} 4(\alpha_4 - \alpha_1) & 0 \\ \alpha_4 - \alpha_2 & 4(\alpha_2 - \alpha_1) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -2,863 & 0 \\ -0,485 & -0,924 \end{bmatrix}.$$

Как видно, ранги матриц $\tilde{\Psi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ принимают значения

$$r_0 = r_1 = l_0 = l_1 = 1,\ r_2 = l_2 = 2.$$

Тогда $S_{l_j r_j} = S_{r_j l_j} = S_{11} = 1$ при $j = 0,1$, а $S_{l_2 r_2} = S_{r_2 l_2} = S_{22} = I$.

Таким образом, в нашем случае многочлен (5) имеет вид

$$T_1(A) = \sum_{k=0}^{2} G_k \Psi_k(A) H_k, \tag{6}$$

где

$$G_0 = G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad G_2 = I,\quad H_0 = \begin{bmatrix} -0,103 & 0,412 \\ 0,412 & -1,648 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0,037 & 0,148 \\ 0,148 & -0,593 \end{bmatrix},\quad H_2 = \begin{bmatrix} -20,504 & 0 \\ -4,5803 & -2,183 \end{bmatrix}.$$

В узлах A_0, A_1 и A_2 функции $\Psi_k(A)$ принимают значения

$$\Psi_0(A_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,197 & 0,787 \end{bmatrix},\quad \Psi_1(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0992 & -0,397 \end{bmatrix},$$

$$\Psi_2(A_2) = \begin{bmatrix} 0,017 & 0 \\ -0,120 & 0,496 \end{bmatrix},\quad \Psi_k(A_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\ (k \neq i,\ k,i = 0,1,2).$$

Нетрудно проверить, что в данных узлах выполняются интерполяционные условия (4).

Нормы невязок в средних точках A_{01}, A_{02} и A_{12} $\left(A_{kj} = (A_k + A_j)/2\right.$ $\left.(k = 0,1;\ j = 1,2)\right)$ равны

$$\| F(A_{01}) - T_1(A_{01}) \|_2 = 0{,}187, \quad \| F(A_{02}) - T_1(A_{02}) \|_2 = 0{,}082,$$
$$\| F(A_{12}) - T_1(A_{12}) \|_2 = 0{,}123.$$

Как видим, многочлен (6) достаточно хорошо приближает функцию $F(A)$.

Интерполяционный многочлен, построенный по системе матричных экспонент

Построим формулу, аналогичную (3), в которой в качестве базисных функций будут выбираться матричные экспоненты. В теории матричного интерполирования известна формула вида

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(A) \Phi_k^{-1}(A_k) F(A_k),$$

где $\Phi_k(A) = (e^A - e^{A_0}) \cdots (e^A - e^{A_{k-1}})(e^A - e^{A_{k+1}}) \cdots (e^A - e^{A_n})$.

Пусть, как и ранее, S_{lr} и S_{rl} – прямоугольные матрицы, имеющие структуру вида (1). Положим $\tilde{\Phi}_k(A) = \Phi_k(A)\Phi_k^+(A_k)$, где $\Phi_k^+(A_k)$ – псевдообратная матрица Мура – Пенроуза для матрицы $\Phi_k(A_k)$, а r_k и l_k – ранги матриц $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть* $\tilde{\Phi}_k(A_k) = B_k C_k$ *и* $F(A_k) = M_k N_k$ *– скелетные разложения матриц* $\tilde{\Phi}_k(A_k)$ *и* $F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. *Тогда для матричного многочлена*

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} F(A_k) N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ \tilde{\Phi}_k(A) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F(A_k),$$

при условии, что $l_k \le r_k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, *выполняются условия*

$$L_n(A_\nu) = F(A_\nu) \ \ (\nu = 0,1,\ldots,n).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Интерполирование по системам рациональных функций

Рассмотрим задачу квадратичного интерполирования на множестве X прямоугольных матриц размерности $m \times n$. Пусть Y – множество прямоугольных матриц размерности $p \times q$, $F : X \to Y$ – матричная функция. Введем матричные многочлены

$$Q_{10}(A) = (A_0 + C_0)(A + C_0)^+ (A_0 + C_1)(A + C_1)^+,$$
$$Q_{11}(A) = (A_1 + C_0)(A + C_0)^+ (A_1 + C_1)(A + C_1)^+,$$
$$l_{10}(A) = (A - A_1)(A_0 - A_1)^+, \quad l_{11}(A) = (A - A_0)(A_1 - A_0)^+,$$

где C_0, C_1 – заданные фиксированные матрицы из *X*. Пусть r_k и l_k – ранги матриц $Q_{1k}(A_k)l_{1k}(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k=0,1)$ соответственно, а $Q_{1k}(A_k)l_{1k}(A_k)=B_kC_k$ и $F(A_k)=M_kN_k$ – скелетные разложения этих же матриц.

Теорема 3. *Если* $l_k \le r_k$ $(k=0,1)$, *то матричный многочлен*

$$L_1(A)=F(A_0)N_0^+S_{l_0r_0}B_0^+Q_{10}(A)l_{10}(A)C_0^+S_{r_0l_0}M_0^+F(A_0)+$$
$$+F(A_1)N_1^+S_{l_1r_1}B_1^+Q_{11}(A)l_{11}(A)C_1^+S_{r_1l_1}M_1^+F(A_1) \tag{7}$$

удовлетворяет условиям

$$L_n(A_\nu)=F(A_\nu) \ \ (\nu=0,1).$$

Доказательство теоремы 3 основано на свойствах скелетных разложений матриц, входящих в структуру формулы (7). Построим аналогичную формулу для произвольного числа узлов. Введем матричные многочлены

$$Q_{nk}(A)=\prod_{i=0}^{n}(A_k+C_i)(A+C_i)^+,\ \ l_{nk}(A)=\prod_{i=0,\,i\ne k}^{n}(A-A_i)(A_k-A_i)^+.$$

Здесь $C_0, C_1, \ldots, C_n$ – заданные постоянные матрицы из множества *X*. Пусть, как и ранее, r_k и l_k – ранги матриц $Q_{nk}(A_k)l_{nk}(A_k)$ и $F(A_k)$ $(k=0,1,\ldots,n)$ соответственно, $Q_{nk}(A_k)l_{nk}(A_k)=B_kC_k$ и $F(A_k)=M_kN_k$ – скелетные разложения данных матриц.

Теорема 4. *Матричный многочлен по системе рациональных функций*

$$L_n(A)=\sum_{k=0}^{n}F(A_k)N_k^+S_{l_kr_k}B_k^+Q_{nk}(A)l_{nk}(A)C_k^+S_{r_kl_k}M_k^+F(A_k) \tag{8}$$

при условии, что $l_k \le r_k$ $(k=0,1,\ldots,n)$, *является интерполяционным многочленом лагранжева типа для оператора* $F(A)$.

Доказательство теоремы 4, в основном, повторяет доказательство теоремы 1.

Приведем аналогичного типа интерполяционные формулы по системе матричных рациональных функций другого вида. В линейном случае интерполяционная формула имеет вид (7), где функции $Q_{10}(A)$ и $Q_{11}(A)$ задаются равенствами

$$Q_{1k}(A)=(A_k+C)(A+C)^+ \ \ (k=0,1),$$

где *C* – заданная фиксированная матрица из *X*. В случае произвольного числа узлов соответствующий интерполяционный многочлен имеет вид (8), где функции $Q_{nk}(A)$ имеют вид

$$Q_{nk}(A)=\left[(A_k+C)(A+C)^+\right]^n \ \ (k=0,1,\ldots,n).$$

Аналогичного типа формулы построены и исследованы в [4; 5].

Заключение

В статье построены и исследованы матричные интерполяционные многочлены лагранжева типа для операторов, заданных на множестве квадратных и прямоугольных матриц. Получены интерполяционные формулы по системам тригонометрических, экспоненциальных и двух видов рациональных матричных функций. В их структуру входят псевдообратные матрицы Мура – Пенроуза, поэтому существование обратных матриц не требуется. Доказаны теоремы о выполнении интерполяционных условий. Оператор может иметь значения на множестве квадратных и прямоугольных матриц. При построении интерполяционных формул использованы скелетные разложения входящих в структуру многочленов матриц, а также блочные матрицы специального вида. Построен иллюстрационный пример применения одной из интерполяционных формул. Полученные интерполяционные формулы могут быть использованы в качестве основы построения приближенных методов решения нелинейных операторных и матричных уравнений, встречающихся в квантовой механике, нелинейной динамике, спектроскопии и других областях науки и техники.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 3-е изд. – М. : Наука, 1967. – 575 с.

2. Макаров, В. Л. Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Л. А. Янович. – Киев : Наук. думка, 2000. – 407 с.

3. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystow, L. A. Yanovich. – Київ : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

4. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

5. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 c.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.10.20017

Khudyakov A.P., Matysik O.V. **Matrix Interpolation Polynomials in the Case of Rectangular and Singular Matrices**

The paper is devoted to the construction and investigation of matrix interpolation polynomials for operators defined on a set of square and rectangular matrices. Interpolation formulas of the Lagrange type are obtained with respect to systems of trigonometric, exponential, and rational matrix functions of two forms. The formulas do not require the existence of inverse matrices; their structure includes pseudoinverse Moore – Penrose matrices. The values of the interpolated operator can be either on a set of square or rectangular matrices.

Владимир Анестиевич Плетюхов, профессор кафедры общей и теоретической физики, отметил в 2017 г. 50-летие научной деятельности.

Владимир Анестиевич в 1967 г. поступил в аспирантуру Белорусского государственного университета по специальности «теоретическая и математическая физика». Научный руководитель – академик Ф.И. Федоров – предложил аспиранту тему кандидатской диссертации «К теории релятивистских волновых уравнений с кратными представлениями группы Лоренца», которая и определила направление его научных исследований на все последующие годы. Диссертация была успешно защищена в 1975 г., а в 1992 г. Владимир Анестиевич защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. В 1994 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В настоящее время Владимир Анестиевич Плетюхов – действительный член Международной Академии наук высшей школы, председатель Брестского областного отделения Белорусского физического общества. В 1996–1999 гг. он возглавлял Постоянную комиссию по образованию, науке и культуре Палаты представителей Национального собрания Республики Беларусь. В 1999–2002 гг. Владимир Анестиевич занимал должность ректора Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.

За время научной деятельности В.А. Плетюхов опубликовал более 200 научных работ в отечественных и зарубежных изданиях. В 2015 г. вышла монография «Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы» (в соавторстве с В.М. Редьковым и В.И. Стражевым). Основные научные результаты относятся к области физики элементарных частиц, классической и квантовой теории поля. Некоторые наиболее интересные из них изложены в предлагаемой статье.

Редакционная коллегия журнала «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта» и сборника научных работ «Вучоныя запіскі Брэсцкага ўніверсітэта» желает юбиляру физического, интеллектуального и творческого долголетия, новых достижений в научной и педагогической деятельности.