УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В рамках статистической термодинамики равновесных систем исследовано влияние квантующего магнитного поля на энергетические и магнитные характеристики крайне вырожденного идеального газа релятивистских электронов. Получены соответствующие термодинамические соотношения с учетом и без учета статического аномального магнитного момента электрона. Рассмотрены приближения слабых и сверхсильных магнитных полей.

1. Исследование влияния магнитного поля на термодинамические характеристики идеального электронного газа представляет существенный интерес как для физики сверхплотных магнитных звезд, так и для физики твердого тела и полупроводников, и потому этой проблеме посвящено большое количество научных публикаций. В [1; 2] был предложен способ вычисления химического потенциала нерелятивистского электронного газа в магнитном поле, основанный на предварительном расчете большого термодинамического потенциала и использовании метода термодинамических функций. В [3] были впервые рассмотрены свойства релятивистской замагниченной плазмы и получена система параметрических уравнений, определяющих химический потенциал и давление релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле. В [4–7] был использован метод [1; 2] для описания газа релятивистских электронов в сильном магнитном поле при температуре абсолютного нуля и получены удобные для дальнейших аналитических исследований формулы химического потенциала и средней полной энергии этого газа. В [8] была сделана попытка сформулировать критерии вырождения и идеальности ультрарелятивистского электронного газа в сверхсильном магнитном поле. Исследованию влияния магнитных полей произвольной интенсивности на характеристики крайне вырожденных идеальных нерелятивистских и релятивистских ферми-газов посвящены и работы [9–14].

Подходы авторов перечисленных и иных работ по данной тематике, математический аппарат и методы расчетов весьма разнообразны. Это вполне естественно, так как вычисление термодинамических характеристик ферми-газов в магнитном поле в большинстве случаев не самоцель, а лишь средство для решения прикладных задач различных разделов физики. В то же время, некоторые особенности и свойства фермигазов в присутствии магнитного поля до настоящего времени не исследованы детально.

В настоящей работе приведены полученные нами термодинамические соотношения, позволяющие вычислять энергетические и магнитные характеристики крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле при учете и без учета величины аномального магнитного момента электрона. Эти соотношения могут найти применение при теоретических исследованиях физических свойств вещества сверхплотных замагниченных астрофизических объектов типа магнитных белых карликов и нейтронных звезд (пульсаров).

2. Воспользовавшись методом, изложенным в [2], и учитывая, что спектр энергии свободного релятивистского электрона в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B определяется выражением [15]

$$\varepsilon=\sqrt{c^2p_z^2+\left(\sqrt{m^2c^4+2mc^2\mu_B B\left(2n+1+2s\right)}+2s\left(\sigma-1\right)\mu_B B\right)^2}, \qquad (1)$$

для большого термодинамического потенциала идеального электронного газа при $T = 0$ К получим:

$$\Omega\left(B\right)=-\frac{N}{2}\sqrt{\chi^2\left(0\right)-m^2c^4}\,\frac{R_1}{R_2^{4/3}}. \qquad (2)$$

Здесь m – масса электрона, p_z – проекция его импульса p на направление вектора индукции поля, n – номер квантового уровня Ландау, $s=\mp 1/2$, μ_B – магнетон Бора, σ – величина отношения собственного магнитного момента частицы к магнетону μ_B, N – число частиц в объеме V, χ – химический потенциал,

$$R_1=\frac{3}{2}\sum_s\sum_n\left(\sqrt{X^2+Y}\sqrt{X^2-Z}-\frac{1}{2}\left(Y+Z\right)\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-Z}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-Z}}\right|\right), \qquad (3)$$

$$R_2=\frac{3}{2}\sum_s\sum_n\sqrt{X^2-Z}, \qquad (4)$$

$$X^2=\frac{\chi^2\left(B\right)-m^2c^4}{2mc^2\mu_B B}, \qquad Y=\frac{mc^2}{2\mu_B B}, \qquad (5)$$

$$Z=2n+1+2s+\frac{\left(\sigma-1\right)^2}{4Y}+2s\left(\sigma-1\right)\sqrt{1+\frac{2n+1+2s}{Y}}, \qquad (6)$$

$$\chi^2\left(0\right)-m^2c^4=\left(3\pi^2\right)^{2/3}c^2\hbar^2n_e^{2/3}; \qquad (7)$$

суммирование в (3) и (4) ведется до тех пор, пока $X_q^2\geq Z_q$; $n_e=N/V$ – концентрация электронов.

Используя известные [2] соотношения

$$N=-\frac{\partial\Omega}{\partial\chi},\ P=-\frac{\partial\Omega}{\partial V},\ E=\Omega+N\chi,\ \kappa=-\frac{1}{VB}\frac{\partial\Omega}{\partial B} \qquad (8)$$

для химического потенциала, давления, средней энергии и магнитной восприимчивости соответственно, получаем:

$$\chi\left(B\right)=\sqrt{m^2c^4+\left(\chi^2\left(0\right)-m^2c^4\right)\frac{X^2}{R_2^{2/3}}},\tag{9}$$

$$P\left(B\right)=\frac{N}{2V}\sqrt{\chi^2\left(0\right)-m^2c^4}\,\frac{R_1}{R_2^{4/3}},\tag{10}$$

$$E\left(B\right)=\frac{N}{2}\sqrt{\chi^2\left(0\right)-m^2c^4}\,\frac{2\sqrt{X^2+Y}R_2-R_1}{R_2^{4/3}},\tag{11}$$

$$\kappa_q=\kappa_0\frac{R_1+\frac{B}{2}\frac{\partial R_1}{\partial B}}{BR_2^{-2/3}}=\kappa_0\frac{R_1+\frac{1}{2}\sqrt{X^2+Y}R_2+R_3-R_4}{BR_2^{-2/3}},\tag{12}$$

где

$$\kappa_0=\frac{2mc^2\mu_B N/V}{\sqrt{\chi^2\left(0\right)-m^2c^4}},\tag{13}$$

$$R_3=\frac{3}{8}Y\sum_s\sum_n\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-Z}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-Z}}\right|,\tag{14}$$

$$R_4=\frac{3}{16}\frac{\sigma-1}{Y}\sum_s\sum_n\left(\left(\sqrt{X^2+Y}\sqrt{X^2-Z}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-Z}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-Z}}\right|\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sigma-1+4s\frac{2n+1+2s}{\sqrt{1+\frac{2n+1+2s}{Y}}}\right)\right).\tag{15}$$

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей (при $n=0$ и $s=-1/2$)

$$X^2\le 2+\frac{\left(\sigma-1\right)^2}{4Y}-\left(\sigma-1\right)\sqrt{1+\frac{2}{Y}},\tag{16}$$

$$Z=\left(\sigma-1\right)\cdot\left(\frac{\sigma-1}{4Y}-1\right).\tag{17}$$

Полученные формулы описывают свойства крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в магнитном поле, не оказывающем влияния на величины аномальных магнитных моментов микрочастиц. Это ограничивает их применимость условием $B << 4{,}414\cdot10^{13}$ Гс.

При $B > 10^{13}$ Гс мы вправе принять $\sigma \approx 1$, что не отразится существенно на численных расчетов термодинамических величин, но значительно их упростит. При этом

$$Z = 2n + 1 + 2s, \tag{18}$$

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 p_z^2 + m^2c^4 + 2mc^2\mu_B B\left(2n + 1 + 2s\right)}. \tag{19}$$

Формулы [4–6], описывающие термодинамические характеристики ультрарелятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле, являются частным случаем полученных нами соотношений при $\sigma = 1$ и $\chi >> mc^2$.

3. Известно, что магнитное поле оказывает заметное квантующее действие на движение электрона, если ларморовский радиус последнего порядка и меньше длины волны де Бройля. Полагая импульс электрона равным импульсу Ферми при $B = 0$, несложно показать, что магнитное поле будет квантующим для релятивистских электронов при

$$B > B_{кв} = \frac{\chi^2\left(0\right) - m^2c^4}{4\pi mc^2\mu_B} = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2}{4\pi m\mu_B}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}. \tag{20}$$

В таблице приведены значения $B_{кв}$ для заданных концентраций электронов. При величинах B, меньших указанных в таблице, мы вправе считать газ парамагнитным и не учитывать квантование Ландау.

Таблица

n_e, см$^{-3}$	$\sqrt{\chi^2\left(0\right) - m^2c^4}$, МэВ	$B_{кв}$, Гс
10^{27}	$6{,}2\cdot10^{-2}$	10^{11}
10^{28}	$1{,}3\cdot10^{-1}$	$4{,}6\cdot10^{11}$
10^{29}	$2{,}7\cdot10^{-1}$	$2{,}2\cdot10^{12}$
10^{30}	$6{,}1\cdot10^{-1}$	10^{13}
10^{31}	1,3	$4{,}6\cdot10^{13}$
10^{32}	2,7	$2{,}2\cdot10^{14}$
10^{33}	6,1	10^{15}
10^{34}	$1{,}3\cdot10$	$4{,}6\cdot10^{15}$
10^{35}	$2{,}7\cdot10$	$2{,}2\cdot10^{16}$
10^{36}	$6{,}1\cdot10$	10^{17}

В частности, для $\sigma = 1$ имеем в этом случае:

$$\varepsilon = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4 + 4mc^2\mu_B Bs}, \tag{21}$$

$$R_1=\frac{1}{8}\sum_s\left(\sqrt{X^2+Y}\sqrt{X^2-2s}\left(2X^2-3Y-10s\right)+\frac{3}{2}\left(Y+2s\right)^2\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-2s}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-2s}}\right|\right), \quad (22)$$

$$R_2=\frac{1}{2}\sum_s\left(X^2-2s\right)^{3/2}, \quad (23)$$

$$R_3=\frac{3}{16}Y\sum_s\left(2\sqrt{X^2+Y}\sqrt{X^2-2s}-\left(Y+2s\right)\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-2s}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-2s}}\right|\right), \quad (24)$$

$$R_4=0. \quad (25)$$

Сверхсильные магнитные поля для релятивистского парамагнитного электронного газа рассматривать не приходится, так как условию $s=-1/2$ (или $X^2\le 1$) соответствует $B\ge 2^{2/3}\pi B_{кв}>B_{кв}$.

4. Используя соотношения подраздела 2 при $\sigma=1$, представим выражения для давления и плотности энергии крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле в виде [4–6]:

$$P\left(B\right)=\frac{n_e}{2}\xi\left(0\right)\frac{R_1\left(X,Y\right)}{R_2^{4/3}\left(X\right)}, \quad (26)$$

$$w\left(B\right)=\frac{n_e}{2}\xi\left(0\right)\frac{2\sqrt{X^2+Y}R_2\left(X\right)-R_1\left(X,Y\right)}{R_2^{4/3}\left(X\right)}, \quad (27)$$

где

$$\xi\left(B\right)=\xi\left(0\right)\frac{X}{R_2^{1/3}\left(X\right)}, \qquad \xi\left(0\right)=\left(3\pi^2\right)^{1/3}c\hbar n_e^{1/3}, \quad (28)$$

$$R_1\left(X,Y\right)=\frac{3}{2}\left(X\sqrt{X^2+Y}-\frac{Y}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+X}{\sqrt{X^2+Y}-X}\right|+\right.$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{l}\left(\sqrt{X^2+Y}\sqrt{X^2-2n}-\frac{Y+2n}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+\sqrt{X^2-2n}}{\sqrt{X^2+Y}-\sqrt{X^2-2n}}\right|\right)\right), \quad (29)$$

$$R_2\left(X\right)=\frac{3}{2}\left(X+2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{X^2-2n}\right). \quad (30)$$

Суммирование в (29) и (30) ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для релятивистских электронов [4–6].

$$X^2 \le 2,\ R_2(X) = \frac{3}{2}X, \tag{31}$$

$$R_1(X,Y) = \frac{3}{2}\left(X\sqrt{X^2+Y} - \frac{Y}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X^2+Y}+X}{\sqrt{X^2+Y}-X}\right|\right), \tag{32}$$

$$\xi(B) = \frac{\pi^2\hbar^3 c n_e}{m\mu_B B}. \tag{33}$$

Для ультрарелятивистских электронов в квантующем магнитном поле $\xi >> mc^2$, $X^2 >> Y$; при этом в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля $R_1(X) = \frac{3}{2}X^2$ и

$$P(B) = w(B) = \frac{1}{2}n_e \cdot \xi(B). \tag{34}$$

В слабых магнитных полях ($X^2 > 10$) для ультрарелятивистских электронов, используя формулу суммирования Эйлера – Маклорена, получаем:

$$R_2(X) \approx X^3\left(1 + \frac{X^4}{4}\right), \tag{35}$$

$$R_1(X) \approx \frac{1}{2}\left(X^4 + \ln X\right), \tag{36}$$

$$\frac{2R_1(X)}{R_2^{4/3}(X)} \approx \left(1 + \frac{\ln X}{X^4}\right)\left(1 - \frac{1}{3X^4}\right) \approx 1 + \frac{1}{X^4}\left(\ln X - \frac{1}{3}\right). \tag{37}$$

С помощью (35)–(37) несложно вычислять соответствующие термодинамические характеристики электронного газа.

5. Для релятивистского крайне вырожденного идеального электронного газа в квантующем магнитном поле из соотношений, приведенных выше, находим:

$$n_e = \frac{m\mu_B B}{\pi^2\hbar^3 c}\sum_s\sum_n\sqrt{\chi^2(B) - m^2c^4 - 2mc^2\mu_B B(2n+1+2s)}. \tag{38}$$

При $n \neq 0$ получить из (38) общее выражение для явной зависимости χ от n_e и B нельзя. Но при заданном значении номера квантового уровня Ландау $n = N$ и, например, $s = +1/2$ можно зафиксировать значение индукции магнитного поля B_N, для которого

$$\chi^2\left(B_N\right) - m^2c^4 = 2mc^2\mu_B B_N\left(2n+2\right). \quad (39)$$

При $B \leq B_N$ электроны с магнитными моментами, направленными по полю ($s = -1/2$), могут находиться в квантовых состояниях с $n \leq N + 1$.

Принимая $B = B_N$ при $n = N$ и $s = +1/2$, находим:

$$n_e = \frac{2\left(m\mu_B B\right)^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\left(\sum_{n=0}^{N}\sqrt{N-n} + \sum_{n=0}^{N+1}\sqrt{N-n+1}\right) = \frac{2\left(m\mu_B B\right)^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\varphi\left(n,N\right). \quad (40)$$

Тогда

$$B_N = \frac{2^{1/3}\pi^{4/3}c\hbar n_e^{2/3}}{e\varphi^{2/3}\left(n,N\right)}, \quad (41)$$

$$\chi^2\left(B_N\right) - m^2c^4 = 4mc^2\mu_B B_N\left(N+1\right) = \frac{\left(\chi^2\left(0\right) - m^2c^4\right)}{\varphi^{2/3}\left(n,N\right)}\left(\frac{2}{9}\right)^{1/3} 2\left(N+1\right). \quad (42)$$

Здесь

$$\chi\left(0\right) = \sqrt{m^2c^4 + \left(3\pi^2\right)^{2/3} c^2\hbar^2 n_e^{2/3}}, \quad (43)$$

$$\varphi\left(n,N\right) = \sum_{n=0}^{N}\sqrt{N-n} + \sum_{n=0}^{N+1}\sqrt{N-n+1}. \quad (44)$$

Несложно убедиться, что при $B = B_N$ и $s = +1/2$ величина $\xi_e\left(B_N\right)/\xi_e\left(0\right)$ (здесь $\xi_e = \sqrt{\chi_e^2 - m_e^2c^4}$) возрастает с уменьшением *N*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. К теории магнетизма электронного газа / Ю. Б. Румер // Журн. эксперим. и теор. физ. – 1948. – Т. 18, № 12. – С. 1081–1095.
2. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., исправл. и доп. – М. : Наука, 1977. – 552 с.
3. Рубан, В. А. Магнитные свойства релятивистской плазмы / В. А. Рубан // Изв. вузов. Физика. – 1967. – № 3. – С. 67–74.
4. Шульман, Г. А. Холодная нейтральная плазма в квантующем магнитном поле / Г. А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1974. – № 10. – С. 24–28.

5. Шульман, Г. А. Нейтронизация холодного водорода в присутствии сверхсильных магнитных полей / Г. А. Шульман // Астрофизика. – 1974. – Т. 10, вып. 4. – С. 543–554.

6. Шульман, Г. А. О свойствах холодного плотного вещества с вмороженным сверхсильным магнитным полем / Г. А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.

7. Шульман, Г. А. К квантовой теории магнетизма сверхплотных звезд / Г. А. Шульман // Астрон. журн. – 1979. – Т. 56, вып. 1. – С. 51–59.

8. Шульман, Г. А. О снятии вырождения и приближения идеального газа для электронов холодной плотной звезды с вмороженным сверхсильным магнитным полем / Г. А. Шульман, В. С. Секержицкий // Астрофизика. – 1977. – Т. 13, вып. 1. – С. 165–172.

9. Липовецкий, С. С. Термодинамические характеристики ферми-газов в магнитном поле / С. С. Липовецкий, А. А. Олесик, В. С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1987. – № 5. – С. 21–25.

10. Иванов, М. А. К вопросу об идеальности ферми-газов в сильном магнитном поле / М. А. Иванов, С. С. Липовецкий, В. С. Секержицкий // Астрофизика. – 1989. – Т. 31, вып. 1. – С. 191–194.

11. Секержицкий, В. С. К вопросу о магнетизме релятивистского ферми-газа / В. С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 1. – С. 37–38.

12. Иванов, М. А. К вопросу о термодинамических характеристиках крайне вырожденного релятивистского ферми-газа в магнитном поле / М. А. Иванов, В. С. Секержицкий, И. В. Секержицкий // Весн. Брэсц. ун-та. – 1999. – № 2. – С. 37–40.

13. Секержицкий, В. С. К вопросу о поляризации ферми-газов и уравнении состояния сверхплотного замагниченного водорода / В. С. Секержицкий, И. В. Секержицкий, А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. – 2000. – № 6. – С. 70–78.

14. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

15. Вонсовский, С. В. Магнетизм микрочастиц / С. В. Вонсовский. – М. : Наука, 1973. – 280 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Sekerzhitsky V.S. **The Thermodynamics Description of Extremely Degenerate Ideal Relativistic Electron Gas in Magnetic Field**

In limits of statistical thermodynamics balance systems is study the influence quantizing magnetic field on power and magnetic characteristics of extremely degenerate ideal gas of relativistic electrons. The corresponding thermodynamic correlations from accounting and without accounting static anomaly magnetic moment electron are received. The approach of weak and superstrong magnetic fields is examined.