Вучоныя запіскі 2015 • Вып. 11
Ч. 2. • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 519.6+517.983.54

***О.В. Матысик*[1], *В.Ф. Савчук*[2]**
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц.,*
зав. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц.,*
доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ОСТАНОВОМ ПО ПОПРАВКАМ

Для решения линейных операторных уравнений первого рода с ограниченным положительным и несамосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается применение правила останова по поправкам, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т.е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения I-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т.д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы.

Описание полученных результатов

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным несамосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный процесс

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^4\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^4\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^3 A^* y\right],\ \alpha > 0,\ x_0 = 0\,. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод итераций (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^4\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^4\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^3 A^* y_\delta\right] + \\ + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^4\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^4\right)u_n,\ \alpha > 0,\ z_0 = 0, \quad (3)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим через $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^4\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^4\right)$, $B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^4\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^3 A^*$. Тогда метод (3) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряжённого оператора A. Там доказано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3) сходится и в продолжении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, получена оценка погрешности.

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам (по соседним приближениям) [2–4]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [4] доказываются леммы.

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0,\ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n,\ n \ge 0. \quad (5)$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$.

Лемма 2. *При* $\forall\omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|\beta\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{6}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (6) получим то же самое, т.е. при $n = 1$ формула (6) верна. Предположим, что (6) верна при $n = p$, т.е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем её справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = C^p z_p + By_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + By_\delta + Cu_{p-2} + CBy_\delta + C^2u_{p-3} + \ldots +\right.$$

$$\left. + C^{p-2}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} +\right.$$

$$\left. + CBy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta + Cu_o + C^{-1}By_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(C^{-1}By + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^*y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 + A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k-1}-C^{n+1}\omega_0-A^{-1}(E-C^{n+1})y+A^{-1}(E-C^{n+1})y-A^{-1}(E-C^n)y_\delta-$$

$$-C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k}=\omega_n-\omega_{n+1}+A^{-1}(E-C)(y_\delta-y)=\omega_n-\omega_{n+1}+C^nB(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n-z_{n+1}\|\le\|\omega_n-\omega_{n+1}\|+\|C^nB(y-y_\delta)\|. \tag{7}$$

Обозначим $\sigma=B(y-y_\delta)$, тогда

$$\|C^nB(y-y_\delta)\|=\|C^n\sigma\|=\left\|\int_0^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^4}{1+\alpha\lambda^4}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|\int_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\alpha\lambda^4}{1+\alpha\lambda^4}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|+$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^4}{1+\alpha\lambda^4}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\le\|E_{\varepsilon_0}\sigma\|+q^n\|\sigma\|\to0,\ n\to\infty,\ \varepsilon_0\to0,$$

так как при $\alpha>0$, $\lambda\in\left(0,\|A^*A\|\right]$ имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^4}{1+\alpha\lambda^4}\right|\le q<1$.

Поэтому (лемма 2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|=\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\le2\|C\|\beta$.

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\in H$ и любых $y_\delta,\|y-y_\delta\|\le\delta$ и u_n, $\|u_n\|\le\beta$.

б) Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{array}{l}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta,\ (n<m'),\\ \|\omega_{m'}-\omega_{m'+1}\|\le\varepsilon-\|B\|\delta.\end{array}\right\} \tag{8}$$

Из (7) следует, что $m\le m'$. Из леммы 1 при $n=m'$ получим неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$ Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}(\|\omega_k-\omega_{k+1}\|-\|C\|\beta)^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при $n<m'$ имеем $\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta$, то $m'\left(\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0=z_0$ и $m\le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m\le m'\le\|z_0-x\|^2\left((\varepsilon-\|\beta\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)\right)^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \quad (9)$$

Предположим, что (9) верно, тогда $x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)y$, $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax$, $(E - C^n)x = (E - C^n)x$. Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана. Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \quad (10)$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \quad (11)$$

В частности, (11) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0, m \to \infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ $m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0$. Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(E - C)u_{n-k-1}. \quad (12)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^4\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^* A\right)^4\right)$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\|C^n(E - C)\right\| \le \frac{1}{n+1}. \quad (13)$$

Поэтому из (12) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}}(E - C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1}B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$\left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k(E - C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}}(E - C)\right\|\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ ([5]).

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon,$ то $\varepsilon \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$ Отсюда получим, что $m \le \dfrac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta,$ получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| \to 0,$ а $\dfrac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$ ограничена при $\delta, \beta \to 0.$ Поэтому $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ при $m \to \infty,\ \delta,\ \beta \to 0.$ Отсюда и из неравенства (11) при $m \to 0$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\left(\|C^m\Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m \to \infty$, т. е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

Заключение

В статье исследована сходимость итерационного метода решения некорректных задач в случае апостериорного выбора числа итераций. Рассмотренный метод может быть использован для решения задач, встречающихся в геологоразведке, сейсмике, спектроскопии, гравиметрии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, экономике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вестн. Брест. ун-та. – 2008. – № 1 (30). – С. 15–21.

2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

3. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

4. Матысик, О. В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вестн. Брест. ун-та. – 2008. – № 2 (31). – С. 11–18.

5. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.10.2015

Matysik O.V., Savchuk V.F. **Implicit Iteration Process of Solving Ill-Posed Problem with Stopped the Amendment**

For the solution of linear operator equations of the first kind with a limited positive and non self-adjoint operator in a Hilbert space is proposed implicit iteration method. For this method, justified the use of the right to stop the amendment, which makes the proposed method is effective and when there is no information about sourcewise representation of the exact solution. We prove the convergence of the iteration method, the estimate for the moment stop.