Вучоныя запіскі 2014 • Вып. 10
Ч. 2 • Прыродазнаўчыя навукі

УДК 519.6+517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ЯВНЫМ МЕТОДОМ ПРИ АПРИОРНОМ ВЫБОРЕ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

В гильбертовом пространстве предлагается явный метод итераций решения операторных уравнений первого рода с неотрицательным самосопряжённым и несамосопряжённым ограниченным оператором. Доказана сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценка погрешности метода и априорный момент останова.

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства, $A \in \mathscr{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, однако нуль принадлежит его спектру. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать большие возмущения решения уравнения.

Предполагаем, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + \alpha A y,\ x_0 = 0, \tag{2}$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и приближенная часть y уравнения (1) заданы приближённо, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$ и $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A_\eta^2\right)x_n + \alpha A_\eta y_\delta,\ x_0 = 0. \tag{3}$$

Докажем сходимость метода (3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим априорные оценки погрешности. Подобные вопросы изучались в [1], но только для других методов.

2. Случай самосопряжённых неотрицательных операторов. Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \le \eta_0)$. Итерационный процесс (3) запишется в виде

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n\right]$. В [2] получены следующие условия для функции $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\gamma n^{1/2},\ \gamma=\left(\frac{5}{4}\right)^{1/2}2\alpha^{1/2},\ (n>0),\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M^2},\tag{4}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_s n^{-s/2},\ (n>0),\ 0\le s<\infty,\ \gamma_s=\left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^{s/2},\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M^2},\tag{5}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^*=A^sz$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$),

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_0,\ \gamma_0=1,\ (n>0),\ 0<\alpha<\frac{2}{M^2},\tag{6}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda|1-\lambda g_n(\lambda)|\to 0,\ n\to\infty,\ 0<\alpha<\frac{2}{M^2}.\tag{7}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge 0$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $0<\alpha<\frac{2}{M^2}$ *и выполнены условия* (6), (7). *Тогда* $\|G_{n\eta}\upsilon\|\to 0$ *при* $n\to\infty$, $\eta\to 0$ $\forall\upsilon\in N(A)^\perp=\overline{R(A)}$, *где* $N(A)=\{x\in H|Ax=0\}$ *и* $G_{n\eta}=E-A_\eta g_n(A_\eta)$.

Условие сходимости для метода (3) даёт

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge 0$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $0<\alpha\le\frac{5}{4M^2}$, $y\in R(A)$, $\|y_\delta-y\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4), (6), (7). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *в приближении* (3) *так, чтобы* $n(\delta,\eta)\to\infty$, $n^{1/2}(\delta+\eta)\to 0$ *при* $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0$, $\eta\to 0$.

<u>Доказательство</u>

Из (3^1) получим $x_n=g_n(A_\eta)y_\delta$. Тогда

$$x_n-x^*=g_n(A_\eta)y_\delta-x^*=-G_{n\eta}x^*+G_{n\eta}x^*-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=$$
$$=-G_{n\eta}x^*+(E-A_\eta g_n(A_\eta))x^*-x^*+g_n(A_\eta)y_\delta=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*).$$

Следовательно, $x_n-x^*=-G_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*)$.

Так как по условию (4) $\|g_n(A_\eta)\|\le\sup\limits_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\gamma n^{1/2}$, то

$$\|y_\delta-A_\eta x^*\|\le\|y_\delta-y\|+\|y-A_\eta x^*\|\le\delta+\|Ax^*-A_\eta x^*\|=\delta+\|(A-A_\eta)x^*\|\le\delta+\eta\|x^*\|.$$

Следовательно,

$$\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\|\le\|G_{n\eta}x^*\|+\|g_n(A_\eta)(y_\delta-A_\eta x^*)\|\le\|G_{n\eta}x^*\|+\gamma n^{1/2}(\delta+\eta\|x^*\|).$$

Из леммы 1 следует, что $\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$, а по условию теоремы $n^{1/2}(\delta + \eta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Теорема 1 доказана.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\left\|A_\eta - A\right\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $0 < \alpha \leq \dfrac{5}{4M^2}$, $y \in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (4), (5). *Если точное решение истокопредставимо, т. е.* $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, *то справедлива оценка* погрешности

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s/2}\rho + \gamma n^{1/2}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty .$$

<u>Доказательство</u>

Имеем, используя истокопредставимость,

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\| = \left\|G_{n\eta}A^s z\right\| \leq \left\|G_{n\eta}(A^s - A_\eta^s)z\right\| + \left\|G_{n\eta}A_\eta^s z\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s/2}\rho,$$

так как по лемме 1.1 ([1, с. 91]) $\left\|A_\eta^s - A^s\right\| \leq c_s \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \text{const}\,(c_s \leq 2$ для $0 < s \leq 1)$ [1, с. 49]. Тогда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s/2}\rho + \gamma n^{1/2}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty . \tag{8}$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (8) по n, то получим следующую рекомендацию для выбора n: $n_{\text{опт}} = \left(\dfrac{s\gamma_s\rho}{\gamma\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)}\right)^{2/(s+1)} = d_s \rho^{2/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}$,

где $d_s = \left(\dfrac{s\gamma_s}{\gamma}\right)^{2/(s+1)}$. Отсюда

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/3} e^{-s/(s+1)}\alpha^{-1}\rho^{2/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (8), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_s\rho\left[d_s\rho^{2/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}\right]^{-s/2}+$$

$$+\gamma\left[d_s\rho^{2/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}\right]^{1/2}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)=\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+$$

$$+\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}\left[\gamma_s d_s^{-s/2}+\gamma d_s^{1/2}\right]=\gamma_0 c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+c_s'\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)},$$

где

$$c_s'=\gamma_s d_s^{-s/2}+\gamma d_s^{1/2}=\left(s^{1/(s+1)}+s^{-s/(s+1)}\right)\gamma^{s/(s+1)}\gamma_s^{1/(s+1)}=\left(\frac{10}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)e^{-s/(2(s+1))}.$$

Отсюда

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left(\frac{10}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)e^{-s/(2(s+1))}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}.$$

Замечание. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α*, но* $n_{опт}$ *от* α *зависит. Поэтому для уменьшения* $n_{опт}$ *и, значит, объема вычислительной работы следует выбирать* α *по возможности большим, удовлетворяющим условию* $0<\alpha\le\frac{5}{4M^2}$ *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым.*

3. Случай несамосопряжённых операторов. В случае несамосопряжённых операторов итерационный метод (3) примет вид

$$x_{n+1}=\left[E-\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)^2\right]x_n+\alpha\left(A_\eta^*A_\eta\right)A_\eta^*y_\delta,\quad x_0=0. \tag{9}$$

Его можно записать так

$$x_n=g_n(A_\eta^*A_\eta)A_\eta^*y_\delta. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует

Лемма 2. *Пусть* $A, A_\eta\in\mathscr{L}(H,F)$, $\left\|A_\eta-A\right\|\le\eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2\le M$, $0<\alpha<\frac{2}{M^2}$ *и выполнены условия* (6) *и* (7). *Тогда*

$$\left\|K_{n\eta}\upsilon\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,\ \eta\to 0,\ \forall\upsilon\in N(A)^\perp=\overline{R(A^*)}, \tag{11}$$

$$\left\|\widetilde{K}_{n\eta}z\right\|\to 0 \text{ при } n\to\infty,\ \eta\to 0,\ \forall z\in N\left(A^*\right)^\perp=\overline{R(A)}, \tag{12}$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)$, $\widetilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M^2}$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4), (6), (7). *Выберем параметр* $n = n(\delta, \eta)$ *так, что*

$$n(\delta,\eta) \to \infty,\ n^{1/2}(\delta+\eta)^2 \to 0 \text{ при } \delta \to 0,\ \eta \to 0. \tag{13}$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство

Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -K_{n\eta}x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right) \tag{14}$$

Здесь $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\right\| = \left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2}\right\| \le \gamma_* n^{1/4}$, где $\gamma_* = \sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/4} \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{1/2}|g_n(\lambda)|\right) \le$ $\le \left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/4} 2\alpha^{1/4}$ [2, с. 24]. Поскольку

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \eta\left\|x^*\right\|,$$

то $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/4} 2\alpha^{1/4} n^{1/4}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$. Поэтому

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{n\eta}(x^*)\right\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{1/4} 2\alpha^{1/4} n^{1/4}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Из леммы 2 следует, что $\left\|K_{n\eta}(x^*)\right\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\eta \to 0$, а из условия (13) $n^{1/2}(\delta+\eta)^2 \to 0$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Отсюда $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/4} 2\alpha^{1/4} n^{1/4}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right) \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Теорема 3 доказана.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M^2}$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \le \delta$. *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$ *и выполнены условия* (4), (5), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_{s/2}n^{-s/4}\rho+\gamma_* n^{1/4}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0<s<\infty .$$

Доказательство

В случае истокопредставимого точного решения $x^*=|A|^s z=\left(A^*A\right)^{s/2}z$ из (5) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^{s/2}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_{s/2}n^{-s/4}$, где $\gamma_{s/2}=\left(\frac{s}{4\alpha e}\right)^{s/4}$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\|=\left\|\left|A_\eta\right|^s\left[E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\right]z\right\|=\left\|\left(A_\eta^*A_\eta\right)^{s/2}\left[E-A_\eta^*A_\eta g_n\left(A_\eta^*A_\eta\right)\right]z\right\|\le\gamma_{s/2}n^{-s/4}\rho .$$

Отсюда

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\|=\left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\|=\left\|K_{n\eta}\left(\left|A_\eta\right|^s-|A|^s\right)z\right\|+\left\|K_{n\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\|\le\gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_{s/2}n^{-s/4}\rho ,$$

так как из [1, с. 92] имеем $\left|\left|A_\eta\right|^s-|A|^s\right|\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}$, $c_s=\text{const}$ ($c_s\le 2$ для $0<s\le 1$). Из (14)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|K_{n\eta}x^*\right\|+\gamma_* n^{1/4}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)=\left\|K_{n\eta}x^*\right\|+\left(\frac{5}{4}\right)^{1/4}2\alpha^{1/4}n^{1/4}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le$$

$$\le\gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+\gamma_{s/2}n^{-s/4}\rho+\left(\frac{5}{4}\right)^{1/4}2\alpha^{1/4}n^{1/4}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0<s<\infty . \quad (16)$$

Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (16) по n, получим

$$n_{\text{опт}}=\left(\frac{s\gamma_{s/2}}{\gamma_*}\right)^{4/(s+1)}\rho^{4/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-4/(s+1)}=$$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^{-1/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(4+s)/(s+1)}(2e)^{-s/(s+1)}\alpha^{-1}\rho^{4/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{-4/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (16), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (9)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le\gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+c_s''\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ 0<s<\infty,$$

где $c_s''=\left(s^{1/(s+1)}+s^{-s/(s+1)}\right)\gamma_*^{s/(s+1)}\gamma_{s/2}^{1/(s+1)}=5^{s/(4(s+1))}(s+1)(s^3e)^{-s/(4(s+1))}$.

Таким образом,

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|_{\text{опт}}\le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho+$$

$$+5^{s/(4s+1))}(s+1)(s^3e)^{-s/(4(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ 0<s<\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

2. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест, 2008. – 196 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk **The Regularization Incorrect Problems with Approximately Operator Explicit Method when a priori Choice of the Number of Iterations**

The explicit iteration method for solution of the first–kind operator equations with a self–conjugated and non self–conjugated non negative bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of a method is proved in case of an a priori choice of number of iterations in ussual norm of Hilbert space, supposing that not only the right part of the equation but the operator as well have errors. The estimation of an error method and a priori moment of stop are received.