УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, П.П. Андрусевич

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ ДИРАКОВСКИХ И ДИРАК–КЭЛЕРОВСКИХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1

В настоящей работе исследованы свойства внутренней симметрии одного и системы двух уравнений Дирака, уравнения Дирака-Кэлера в пространстве размерности 2+1. Используется метод, основанный на приведении соответствующих уравнений к вещественной форме. Показано, что группы симметрии, которые при этом обнаруживаются, существенно шире симметрий, обычно сопоставляемых данным полям.

Введение

В большинстве публикаций, посвященных графену, существенное внимание уделяется изучению внутренних симметрий как безмассового, так и массивного уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1, а также симметрий системы двух уравнений Дирака в указанном пространстве. Однако полученные результаты (см., напр., [1; 2]) не коррелируют с хорошо известными результатами оценки параметров внутренней симметрии для уравнения Дирака в пространстве размерности 3+1.

В настоящей работе применяется метод исследования дираковских полей, разработанный в [5; 6], который базируется на использовании вещественной формы диракоподобных релятивистских волновых уравнений. На его основе можно установить наличие групп внутренней симметрии лагранжианов безмассового и массивного 4n-компонентных дираковских полей в пространстве 2+1, более широких по числу элементов симметрии, чем те, которые обсуждаются в вышеуказанных и других публикациях по данному вопросу и полностью согласуются с выводами о числе параметров симметрии дираковских полей в пространстве размерности 3+1.

Кроме того, известно, что в пространстве размерности 3+1 частицы со спином 1/2 и дополнительными степенями свободы можно описывать посредством полного набора антисимметричных тензорных полей, подчиняющихся уравнению Дирака–Кэлера (см. [7] и цитированную здесь литературу). Такое описание оказывается возможным благодаря совпадению свойств внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера и системы четырех уравнений Дирака с лагранжианом $L = L_1 + L_2 - L_3 - L_4$. С учетом вышесказанного представляет интерес исследование уравнения Дирака-Кэлера в пространстве 2+1 на предмет возможности этого уравнения служить в качестве модели геометризованного описания квазичастиц в графене посредством тензорных полей. Для этого необходимо провести сравнительный анализ внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера и системы двух уравнений Дирака в пространстве 2+1.

Рассмотрению вышеуказанных вопросов посвящена настоящая работа.

1. Вещественная форма и внутренняя симметрия уравнения Дирака

Продемонстрируем суть используемого метода на примере безмассового уравнения Дирака в трехмерном пространстве-времени, которое можно получить из обычного уравнения Дирака, исключив из него одно пространственное измерение, например, x_3. В результате получим уравнение

$$(\gamma_k \partial_k + m)\psi = 0\,,\ (k = 0, 1, 2)\,. \qquad (1.1)$$

Для безмассового случая ($m = 0$) имеем

$$\gamma_k \partial_k \psi = 0, \; (k = 0, 1, 2). \tag{1.2}$$

Будем использовать метрику, соответствующую выбору $x_0 = ict$. Выберем матрицы γ_k в виде

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \tag{1.3}$$

где σ_i – матрицы Паули. Возьмем от (1.2) комплексное сопряжение и, учитывая мнимый характер временной координаты x_0, для сопряженной функции ψ^* получим

$$(-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2)\psi^* = 0. \tag{1.4}$$

Рассматривая совместно уравнения (1.2) и (1.4), придем к 8-компонентной системе уравнений. Её также можно записать в стандартной матричной форме

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\Psi = (\psi, \psi^*) \text{ – столбец} \tag{1.6}$$

и матрицы Γ_k имеют вид

$$\Gamma_0 = \sigma_3 \otimes \gamma_0, \; \Gamma_1 = \sigma_3 \otimes \gamma_1, \; \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2. \tag{1.7}$$

Для дальнейшего удобства перейдем к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\Psi = (\psi^r, \psi^i) \text{ – столбец,} \tag{1.8}$$

где

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*). \tag{1.9}$$

Указанный переход от представления (1.6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}, \; U^{-1} = U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Матрицы Γ_k при этом принимают вид

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \; \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \; \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2. \tag{1.11}$$

Лагранжиан уравнения (1.5)

$$L = -\overline{\Psi}\quad {}_k\partial_k\Psi = -\Psi^+\eta\quad {}_k\partial_k\Psi \tag{1.12}$$

эквивалентен лагранжиану

$$L = -\overline{\psi}\gamma_k\partial_k\psi = -\psi^+\gamma_0\gamma_k\partial_k\psi \tag{1.13}$$

исходного уравнения (1.2) при выборе в базисе (1.8) матрицы билинейной формы η в виде

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_0 . \tag{1.14}$$

Уравнение (1.5) с волновой функцией (1.8), матрицами (1.11) и лагранжианом (1.12), (1.14) будем называть вещественной формой безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1, поскольку соответствующая (1.5) система 8-ми уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Данную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии данного уравнения.

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_k, по определению, имеют структуру

$$\Gamma_k = I_2 \otimes \gamma_k . \tag{1.15}$$

Переход от представления (1.8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2) \right], \\ A^{-1} &= A^+ = \frac{1}{2}\left[I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2) \right]. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Матрица билинейной формы η в фермионном базисе принимает вид

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0 . \tag{1.17}$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами (1.11) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi^{'}(x_k) = Q\Psi(x_k) \tag{1.18}$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4,\ Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5,\ Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3,\ Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \tag{1.19}$$

где $\gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3$, $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $q^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1 \div 4)$ – произвольные матрицы 2×2, на которые накладываются лишь ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (1.5). При этом матрицы Q_1 и Q_2 удовлетворяют условиям коммутации, а матрицы Q_3 и Q_4 условиям антикоммутации с матрицами Γ_k:

$$[Q_1, \Gamma_k]_- = [Q_2, \Gamma_k]_- = 0,$$
$$[Q_3, \Gamma_k]_+ = [Q_4, \Gamma_k]_+ = 0 \qquad (1.20)$$

Параметризуя двумерные матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов I_2 и σ_i $(i = 1 \div 3)$, получим 15 (без учета единичной) унитарных матриц однопараметрических преобразований внутренней симметрии уравнения (1.5) (генераторов), имеющих в фермионном базисе вид

$$\begin{aligned}
&J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,\ J^2 = \sigma_2 \otimes I_4,\ J^3 = \sigma_3 \otimes I_4,\\
&L^1 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5,\ L^2 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5,\ L^3 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5,\ L^4 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5,\\
&K^1 = I_2 \otimes \gamma_3,\ K^2 = \sigma_1 \otimes \gamma_3,\ K^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_3,\ K^4 = \sigma_3 \otimes \gamma_3,\\
&I^1 = I_2 \otimes \gamma_5,\ I^2 = \sigma_1 \otimes \gamma_5,\ I^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_5,\ I^4 = \sigma_3 \otimes \gamma_5.
\end{aligned} \qquad (1.21)$$

(Множитель i здесь вводится для обеспечения эрмитовости генераторов (1.21)).

Возвращаясь теперь обратно в базис (1.18), получим для генераторов (1.21) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,\ J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2,\ J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2,\\
&L^1 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5,\ L^2 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5,\ L^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_0\gamma_1,\ L^4 = -i\sigma_2 \otimes \gamma_0\gamma_1,\\
&K^1 = \sigma_1 \otimes \gamma_3,\ K^2 = I_2 \otimes \gamma_3,\ K^3 = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_3,\ K^4 = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_3,\\
&I^1 = \sigma_1 \otimes \gamma_5,\ I^2 = I_2 \otimes \gamma_5,\ I^3 = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ I^4 = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5.
\end{aligned} \qquad (1.22)$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (1.15) относительно матричных преобразований (1.18), задаваемых генераторами (1.22), накладывает на параметры этих преобразований ($\omega_N \to J^N, \theta_N \to L^N, \Lambda_N \to K^N, \Omega_N \to I^N$) следующие ограничения:

$$\omega_2, \omega_3, \theta_1, \theta_3, \theta_4, \Lambda_1, \Lambda_3, \Lambda_4, \Omega_2 - \text{вещественные},$$
$$\omega_1, \theta_2, \Lambda_2, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_4 - \text{мнимые} \qquad (1.23)$$

Таким образом, преобразования внутренней симметрии исследуемого безмассового уравнения Дирака в пространстве 2+1 описывается унитарной 15-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (1.22), которым соответствует 9 вещественных и 6 мнимых параметров (1.23).

Помимо фермионного базиса и представления (1.8) волновой функции, будем использовать также представление

$$\Psi = (\psi, \overline{\psi}) \ - \text{столбец}, \qquad (1.24)$$

где $\overline{\psi}=\psi^{+}\gamma_0$. Переход от представления (1.8) в представление (1.24) осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ \gamma_0 & -\gamma_0 \end{pmatrix},\quad S^{-1}=S^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & \gamma_0 \\ I_4 & -\gamma_0 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

В представлении (1.24) генераторы преобразований внутренней симметрии принимают вид

$$\begin{aligned}
&J^1=\sigma_3\otimes I_4,\ J^2=-i\sigma_2\otimes\gamma_2\gamma_0,\ J^3=i\sigma_1\otimes\gamma_2\gamma_0,\\
&L^1=iI_2\otimes\gamma_3\gamma_5,\ L^2=i\sigma_3\otimes\gamma_3\gamma_5,\ L^3=\sigma_2\otimes\gamma_1,\ L^4=-\sigma_1\otimes\gamma_1,\\
&K^1=I_2\otimes\gamma_3,\ K^2=\sigma_3\otimes\gamma_3,\ K^3=i\sigma_2\otimes\gamma_5\gamma_1,\ K^4=-i\sigma_1\otimes\gamma_5\gamma_1,\\
&I^1=I_2\otimes\gamma_5,\ I^2=\sigma_3\otimes\gamma_5,\ I^3=i\sigma_2\otimes\gamma_1\gamma_3,\ I^4=-i\sigma_1\otimes\gamma_1\gamma_3.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Рассматривая генераторы (1.26) как матричные базисные операторы, составим из них и соответствующих им параметров, включая сюда и единичное преобразование с вещественным параметром ω_0, матрицы Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 конечных преобразований внутренней симметрии

$$Q_1=\sum_{A=0}^{3}\omega_A J^A,\ Q_2=\sum_{A=1}^{4}\theta_A L^A,\ Q_3=\sum_{A=1}^{4}\Lambda_A K^A,\ Q_4=\sum_{A=1}^{4}\Omega_A I^A. \tag{1.27}$$

В результате, введя обозначения

$$\begin{aligned}
&a_1=\omega_0+\omega_1,\quad a_2=i\theta_1+i\theta_2,\ a_3=\Lambda_1+\Lambda_2,\ a_4=\Omega_1+\Omega_2,\\
&b_1=-\omega_2+i\omega_3,\ b_2=-i\theta_3-\theta_4,\ b_3=\Lambda_3-i\Lambda_4,\ b_4=\Omega_3-i\Omega_4,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

для матриц Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 будем иметь выражения

$$\begin{aligned}
&Q_1=\begin{pmatrix} a_1 I_4 & b_1\gamma_2\gamma_0 \\ -b_1^*\gamma_2\gamma_0 & a_1^* I_4 \end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix} a_2\gamma_3\gamma_5 & b_2\gamma_1 \\ b_2^*\gamma_1 & -a_2^*\gamma_3\gamma_5 \end{pmatrix},\\
&Q_3=\begin{pmatrix} a_3\gamma_3 & b_3\gamma_5\gamma_1 \\ -b_3^*\gamma_5\gamma_1 & a_3^*\gamma_3 \end{pmatrix},\quad Q_4=\begin{pmatrix} a_4\gamma_5 & b_4\gamma_1\gamma_3 \\ b_4^*\gamma_1\gamma_3 & -a_4^*\gamma_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Отсюда получаем следующий явный вид конечных преобразований внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака в пространстве 2+1:

$$\begin{aligned}
&\psi'=a_1\psi+a_2\gamma_3\gamma_5\psi+a_3\gamma_3\psi+a_4\gamma_5\psi+b_1\gamma_2\gamma_0\overline{\psi}++b_2\gamma_1\overline{\psi}+b_3\gamma_5\gamma_1\overline{\psi}+b_4\gamma_1\gamma_3\overline{\psi},\\
&\overline{\psi}'=-b_1^*\gamma_2\gamma_0\psi+b_2^*\gamma_1\psi-b_3^*\gamma_5\gamma_1\psi+b_4^*\gamma_1\gamma_3\psi+a_1^*\overline{\psi}-a_2^*\gamma_3\gamma_5\overline{\psi}+a_3^*\gamma_3\overline{\psi}-a_4^*\gamma_5\overline{\psi}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Требование инвариантности лагранжиана теории относительно преобразований (1.30) накладывает на матрицы Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 условие

$$(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4)^+\eta\Gamma_k(Q_1+Q_2+Q_3+Q_4)=\eta\Gamma_k, \qquad (1.31)$$

которое с учетом (1.20) эквивалентно двум условиям

$$Q_1^+\eta Q_1+Q_2^+\eta Q_2-Q_3^+\eta Q_3-Q_4^+\eta Q_4+Q_1^+\eta Q_2+Q_2^+\eta Q_1-Q_3^+\eta Q_4-Q_4^+\eta Q_3=\eta, \qquad (1.32)$$

$$-Q_1^+\eta Q_3-Q_1^+\eta Q_4-Q_2^+\eta Q_3-Q_2^+\eta Q_4+Q_3^+\eta Q_1+Q_3^+\eta Q_2+Q_4^+\eta Q_1+Q_4^+\eta Q_2=0. \qquad (1.33)$$

При этом эрмитовски сопряженные матрицы $Q_1^+, Q_2^+, Q_3^+, Q_4^+$ имеют вид

$$Q_1^+=\begin{pmatrix} a_1^* I_4 & b_1\gamma_2\gamma_0 \\ -b_1^*\gamma_2\gamma_0 & a_1 I_4 \end{pmatrix},\quad Q_2^+=\begin{pmatrix} -a_2^*\gamma_3\gamma_5 & b_2\gamma_1 \\ b_2^*\gamma_1 & a_2\gamma_3\gamma_5 \end{pmatrix},$$
$$Q_3^+=\begin{pmatrix} a_3^*\gamma_3 & b_3\gamma_5\gamma_1 \\ -b_3^*\gamma_5\gamma_1 & a_3\gamma_3 \end{pmatrix},\quad Q_4^+=\begin{pmatrix} a_4^*\gamma_5 & -b_4\gamma_1\gamma_3 \\ -b_4^*\gamma_1\gamma_3 & -a_4\gamma_5 \end{pmatrix}. \qquad (1.34)$$

Подстановка выражений (1.29) и (1.30) для матриц $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_1^+, Q_2^+, Q_3^+, Q_4^+$ в условие (1.32) приводит к следующим ограничениям на параметры преобразований (1.30):

$$|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+|a_4|^2-|b_1|^2-|b_2|^2-|b_3|^2-|b_4|^2=1,$$
$$a_1^*a_2-a_2^*a_1+a_3^*a_4-a_4^*a_3+b_1b_2^*-b_2b_1^*+b_3b_4^*-b_4b_3^*=0. \qquad (1.35)$$

Соотношения (1.35) содержат 2 независимых условия. Аналогично из (1.33) получаем соотношения

$$a_1^*a_3+a_3^*a_1-a_2^*a_4-a_4^*a_2+b_1b_3^*+b_3b_1^*-b_2b_4^*-b_4b_2^*=0,$$
$$a_1^*a_4+a_4^*a_1+a_2^*a_3+a_3^*a_2-b_1b_4^*-b_4b_1^*-b_2b_3^*-b_3b_2^*=0, \qquad (1.36)$$
$$b_1^*a_4-a_1b_4^*+a_3b_2^*-a_2b_3^*=0,$$

которые содержат 4 независимых условия на параметры преобразований (1.30).

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 описывается 10-параметрической группой преобразований, которая получается в результате требования выполнения условий (1.32), (1.33).

Математическая структура данной группы легко устанавливается, если перейти к рассмотрению бесконечно малых однопараметрических преобразований $\delta Q=1+\omega_A J^A$, для которых условие (1.31) принимает вид

$$(\omega_A J^A)^+\eta=-\omega_A\eta J^A,\ (\Theta_A L^A)^+\eta=-\Theta_A\eta L^A, \qquad (1.37)$$

$$(\Omega_A I^A)^+\eta=\Omega_A\eta I^A,\ (\Lambda_A K^A)^+\eta=\Lambda_A\eta K^A. \qquad (1.38)$$

Прямая проверка показывает, что условия (1.37), (1.38) с учетом (1.23) выполняются для десяти однопараметрических преобразований, определяемых генераторами $J^1, J^2, J^3, L^2, L^3, L^4, K^2, K^3, K^4, I^1$, которые удовлетворяют алгебре генераторов группы SO(2,5). Учитывая же, что из десяти параметров данных преобразований шесть ($\omega_2, \omega_3, \theta_3, \theta_4, \Lambda_3, \Lambda_4$) являются вещественными и четыре ($\omega_1, \theta_2, \Lambda_2, \Omega_1$) – мнимыми, приходим к выводу, что группа преобразований внутренней симметрии лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 изоморфна группе SO(3,2).

Полную группу симметрии лагранжиана уравнения Дирака для частицы с ненулевой массой легко получить из установленной группы SO(3,2) путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^A, I^A, антикоммутирующих с матрицами Γ_k. В результате остается 6-параметрическая унитарная группа, задаваемая генераторами J^1, J^2, J^3, L^2, L^3, L^4, которым соответствуют 4 вещественных ($\omega_2, \omega_3, \theta_3, \theta_4$) и два мнимых ($\omega_1, \theta_2$) параметра. Данная группа локально изоморфна группе $SO(2,1) \otimes SO(2,1)$.

2. Внутренняя симметрия системы двух уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1

Рассмотрим внутреннюю симметрию системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1, которую во многих источниках используют для описания решеточной структуры графена.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} \gamma_k \partial_k \psi_1 = 0, \\ \gamma_k \partial_k \psi_2 = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где ψ_1 и ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_k – матрицы 4×4, удовлетворяющие алгебре Дирака, индекс k пробегает значения 0, 1, 2. Метрику пространства и матрицы γ_k выберем в виде (1.3). Взяв от (2.1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_0, для сопряженных функций ψ_1^*, ψ_2^* получим уравнения

$$\begin{cases} (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_2^* = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассматривая уравнения (2.1) и (2.2) совместно, придем к 16-компонентной системе, которую можно представить в универсальной матричной форме (1.5). При выборе волновой функции Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \text{ – столбец} \tag{2.3}$$

для матриц Γ_k в (1.5) будем иметь выражения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \; \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \; \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \tag{2.4}$$

Далее опять перейдем к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец},$$
$$\psi_{1,2}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*). \tag{2.5}$$

Указанный переход от представления (2.3) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}, \; U^{-1} = U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Матрицы Γ_k при этом принимают вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0, \; \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1, \; \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \tag{2.7}$$

Лагранжиан уравнения (1.5) с матрицами (2.7)

$$L = -\overline{\Psi}\Gamma_k \partial_k \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_k \partial_k \Psi \tag{2.8}$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (2.1)

$$L = L_1 + L_2 = -\bar{\psi}_1 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_k \partial_k \psi_2 = -\psi_1^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_2 \tag{2.9}$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (2.8) в виде

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0, \tag{2.10}$$

который инвариантен относительно преобразования (2.6).

Уравнение (1.5) с волновой функцией (2.5), матрицами Γ_k (2.7) и лагранжианом (2.8), (2.10) будем, как и в случае одного уравнения Дирака, называть вещественной формой исходной системы (2.1). Эту форму мы опять-таки будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (2.1).

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_k, по определению имеют структуру

$$\Gamma_k = I_4 \otimes \gamma_k. \tag{2.11}$$

Переход от представления (2.5) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}\left[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)\right],$$
$$A^{-1} = A^{+} = \frac{1}{2}\left[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)\right]. \tag{2.12}$$

Матрица билинейной формы η при этом принимает вид

$$\eta = \gamma_5 \otimes \gamma_0 . \tag{2.13}$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами (2.7) относительно преобразований внутренней симметрии (1.18) обеспечивается матрицами четырех типов (1.19), где $q^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1 \div 4)$ – комплексные матрицы 4×4, на которые накладываются лишь ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (1.5). При этом матрицы Q_1 и Q_2 удовлетворяют условиям коммутации, а матрицы Q_3 и Q_4– условиям антикоммутации с матрицами Γ_k (2.7).

Параметризуя четырехмерные матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов e_N $(N = 1 \div 16)$

$$e_1 = I_4, e_2 = \gamma_0, e_3 = \gamma_1, e_4 = \gamma_2, e_5 = \gamma_3, e_6 = i\gamma_0\gamma_3,$$
$$e_7 = i\gamma_1\gamma_3, e_8 = i\gamma_2\gamma_3, e_9 = \gamma_5, e_{10} = i\gamma_0\gamma_5, e_{11} = i\gamma_1\gamma_5, \tag{2.14}$$
$$e_{12} = i\gamma_2\gamma_5, e_{13} = i\gamma_3\gamma_5, e_{14} = i\gamma_0\gamma_1, e_{15} = i\gamma_1\gamma_2, e_{16} = i\gamma_2\gamma_0,$$

получим 64 базисных оператора преобразований внутренней симметрии уравнения (1.5), (2.7), имеющих в фермионном базисе вид

$$J^N = e_N \otimes I_4,\ L^N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5,\ K^N = e_N \otimes \gamma_3,\ I^N = e_N \otimes \gamma_5 . \tag{2.15}$$

Возвращаясь теперь обратно в базис (2.5), получим для операторов (2.15) выражения:

$$J^1 = I_4 \otimes I_4,\quad J^2 = -i\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_2,\quad J^3 = -i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2,\quad J^4 = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2,$$
$$J^5 = -i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\quad J^6 = i\gamma_0\gamma_3 \otimes I_4,\quad J^7 = i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4,\quad J^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, \tag{2.16}$$
$$J^9 = \gamma_5 \otimes I_4,\quad J^{10} = \gamma_0 \otimes \gamma_2,\quad J^{11} = \gamma_1 \otimes \gamma_2,\quad J^{12} = \gamma_2 \otimes \gamma_2,$$
$$J^{13} = \gamma_3 \otimes \gamma_2,\quad J^{14} = i\gamma_0\gamma_1 \otimes I_4,\quad J^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4,\quad J^{16} = i\gamma_2\gamma_0 \otimes I_4;$$

$$L^1 = I_4 \otimes i\gamma_3\gamma_5,\quad L^2 = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^3 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^4 = \gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0,$$
$$L^5 = \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^6 = -\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5,\quad L^7 = -\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5,\quad L^8 = -\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \tag{2.17}$$
$$L^9 = i\gamma_5 \otimes \gamma_3\gamma_5,\quad L^{10} = i\gamma_0 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^{11} = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^{12} = i\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_0,$$
$$L^{13} = i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_0,\quad L^{14} = -\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5,\quad L^{15} = -\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5,\quad L^{16} = -\gamma_2\gamma_0 \otimes \gamma_3\gamma_5;$$

$$\begin{aligned}
&K^1=\gamma_5\otimes\gamma_3,\quad K^2=-i\gamma_0\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^3=-i\gamma_1\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^4=-i\gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_3,\\
&K^5=-i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^6=-i\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_3,\quad K^7=i\gamma_0\gamma_2\otimes\gamma_3,\quad K^8=-i\gamma_0\gamma_1\otimes\gamma_3,\\
&K^9=I_4\otimes\gamma_3,\quad K^{10}=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^{11}=\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^{12}=\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\\
&K^{13}=\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\quad K^{14}=-i\gamma_2\gamma_3\otimes\gamma_3,\quad K^{15}=-i\gamma_0\gamma_3\otimes\gamma_3,\quad K^{16}=-i\gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_3;
\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
&I^1=\gamma_5\otimes\gamma_5,\quad I^2=-i\gamma_0\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^3=-i\gamma_1\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^4=-i\gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_5,\\
&I^5=-i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^6=-i\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_5,\quad I^7=i\gamma_0\gamma_2\otimes\gamma_5,\quad I^8=-i\gamma_0\gamma_1\otimes\gamma_5,\\
&I^9=I_4\otimes\gamma_5,\quad I^{10}=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^{11}=\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^{12}=\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\\
&I^{13}=\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\quad I^{14}=-i\gamma_2\gamma_3\otimes\gamma_5,\quad I^{15}=-i\gamma_0\gamma_3\otimes\gamma_5,\quad I^{16}=-i\gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_5.
\end{aligned}\tag{2.19}$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (1.5) относительно матричных преобразований (1.18), задаваемых базисными операторами (2.16) – (2.19), не считая единичного J^1, накладывает на параметры ($\omega_N\to J^N,\theta_N\to L^N$, $\Lambda_N\to K^N,\Omega_N\to I^N$) следующие ограничения:

$$\begin{aligned}
&\omega_2,\omega_3,\omega_5,\omega_8,\omega_{10},\omega_{11},\omega_{13},\omega_{15},\omega_{16},\\
&\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_8,\theta_{10},\theta_{11},\theta_{13},\theta_{15},\theta_{16},\\
&\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_5,\Lambda_8,\Lambda_{10},\Lambda_{11},\Lambda_{13},\Lambda_{15},\Lambda_{16},\\
&\Omega_4,\Omega_6,\Omega_7,\Omega_9,\Omega_{12},\Omega_{14}\ \text{– вещественные;}\\
&\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_9,\omega_{12},\omega_{14},\theta_4,\theta_6,\theta_7,\theta_9,\theta_{12},\theta_{14},\\
&\Lambda_4,\Lambda_6,\Lambda_7,\Lambda_9,\Lambda_{12},\Lambda_{14},\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_5,\Omega_8,\\
&\Omega_{10},\Omega_{11},\Omega_{13},\Omega_{15},\Omega_{16}\ \text{– мнимые.}
\end{aligned}\tag{2.20}$$

Таким образом, преобразования внутренней симметрии исследуемой системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве 2+1 описывается унитарной 63-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (2.16) – (2.19), которым соответствует 35 вещественных и 28 мнимых параметров (2.20).

В дальнейшем будем работать в представлении

$$\Psi=(\psi_1,\psi_2,\bar\psi_1,\bar\psi_2)\ \text{– столбец,}\tag{2.21}$$

где $\bar\psi_{1,2}=\psi^+_{1,2}\gamma_0$. Переход от представления (2.5) в представление (2.21) осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$S=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}I_8 & I_8\\ I_2\otimes\gamma_0 & -I_2\otimes\gamma_0\end{pmatrix},\quad S^{-1}=S^+=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}I_8 & I_2\otimes\gamma_0\\ I_8 & -I_2\otimes\gamma_0\end{pmatrix}.\tag{2.22}$$

В представлении (2.21) для операторов (2.16) – (2.19) получим выражения

$$\begin{aligned}&J^1 = I_4 \otimes I_4, \quad J^2 = -i\gamma_5 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^3 = i\gamma_1 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^4 = i\gamma_2 \otimes \gamma_0\gamma_2,\\ &J^5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^6 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4, \quad J^7 = i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4, \quad J^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes I_4,\\ &J^9 = \gamma_0 \otimes I_4, \quad J^{10} = -\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^{11} = \gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^{12} = \gamma_0\gamma_2 \otimes \gamma_0\gamma_2,\\ &J^{13} = \gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_0\gamma_2, \quad J^{14} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, \quad J^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \quad J^{16} = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes I_4;\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}&L^1 = iI_4 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^2 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad L^3 = \gamma_1 \otimes \gamma_1, \quad L^4 = \gamma_2 \otimes \gamma_1, \quad L^5 = \gamma_3 \otimes \gamma_1,\\ &L^6 = -\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^7 = -\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^8 = -\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^9 = i\gamma_0 \otimes \gamma_3\gamma_5,\\ &L^{10} = i\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad L^{11} = -i\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_1, \quad L^{12} = -i\gamma_0\gamma_2 \otimes \gamma_1, \quad L^{13} = -i\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_1,\\ &L^{14} = -\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^{15} = -\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad L^{16} = -\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_3\gamma_5;\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}&K^1 = I_4 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = i\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_5, \quad K^3 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_5, \quad K^4 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_5,\\ &K^5 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_5 \quad K^6 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad K^7 = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_3, \quad K^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_3,\\ &K^9 = \gamma_0 \otimes \gamma_3, \quad K^{10} = \gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_5, \quad K^{11} = -\gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_5, \quad K^{12} = -\gamma_0\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_5,\\ &K^{13} = -\gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_5, \quad K^{14} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_3, \quad K^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_3, \quad K^{16} = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_3;\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}&I^1 = I_4 \otimes \gamma_5, \quad I^2 = -i\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_3, \quad I^3 = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3, \quad I^4 = i\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_3,\\ &I^5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_3 \quad I^6 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad I^7 = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5, \quad I^8 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5,\\ &I^9 = \gamma_0 \otimes \gamma_5, \quad I^{10} = -\gamma_0\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_3, \quad I^{11} = \gamma_0\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3, \quad I^{12} = \gamma_0\gamma_2 \otimes \gamma_1\gamma_3,\\ &I^{13} = \gamma_0\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_3, \quad I^{14} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_5, \quad I^{15} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_5, \quad I^{16} = -i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_5.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Составим из базисных операторов (2.23) – (2.26) и соответствующих им параметров (2.20), включая сюда вещественный параметр ω_1, матрицы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве 2+1. В результате, введя обозначения

$$\begin{aligned}&a_1 = \omega_1 + \omega_6 + \omega_9 - \omega_{15}, \qquad b_1 = -i\omega_2 + \omega_5 - \omega_{10} - i\omega_{13},\\ &a_2 = -i\omega_7 - \omega_8 + \omega_{14} + i\omega_{16}, b_2 = \omega_3 - i\omega_4 - i\omega_{11} - \omega_{12},\\ &a_3 = i\omega_7 - \omega_8 + \omega_{14} - i\omega_{16}, \ b_3 = \omega_3 + i\omega_4 - i\omega_{11} + \omega_{12},\\ &a_4 = \omega_1 - \omega_6 + \omega_9 + \omega_{15}, \qquad b_4 = i\omega_2 - \omega_5 - \omega_{10} + i\omega_{13};\\ &a_5 = i\theta_1 + i\theta_6 + i\theta_9 - i\theta_{15}, \ b_5 = -\theta_2 - i\theta_5 + i\theta_{10} - \theta_{13},\\ &a_6 = \theta_7 - i\theta_8 + i\theta_{14} + \theta_{16}, \ b_6 = -i\theta_3 - \theta_4 - \theta_{11} + i\theta_{12},\\ &a_7 = -\theta_7 - i\theta_8 + i\theta_{14} - \theta_{16}, b_7 = -i\theta_3 + \theta_4 - \theta_{11} - i\theta_{12},\\ &a_8 = i\theta_1 - i\theta_6 + i\theta_9 + i\theta_{15}, \ b_8 = -\theta_2 + i\theta_5 + i\theta_{10} + \theta_{13};\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$
\begin{aligned}
&a_9 = \Lambda_1 + \Lambda_6 + \Lambda_9 - \Lambda_{15}, && b_9 = i\Lambda_2 - \Lambda_5 + \Lambda_{10} + i\Lambda_{13},\\
&a_{10} = i\Lambda_7 - \Lambda_8 + \Lambda_{14} + i\Lambda_{16}, && b_{10} = -\Lambda_3 - i\Lambda_4 + i\Lambda_{11} + \Lambda_{12},\\
&a_{11} = -i\Lambda_7 - \Lambda_8 + \Lambda_{14} - i\Lambda_{16}, && b_{11} = -\Lambda_3 + i\Lambda_4 + i\Lambda_{11} - \Lambda_{12},\\
&a_{12} = \Lambda_1 - \Lambda_6 + \Lambda_9 + \Lambda_{15}, && b_{12} = i\Lambda_2 + \Lambda_5 + \Lambda_{10} - i\Lambda_{13};\\
&a_{13} = \Omega_1 + \Omega_6 + \Omega_9 - \Omega_{15}, && b_{13} = -i\Omega_2 + \Omega_5 - \Omega_{10} - i\Omega_{13},\\
&a_{14} = i\Omega_7 - \Omega_8 + \Omega_{14} + i\Omega_{16}, && b_{14} = \Omega_3 - i\Omega_4 - i\Omega_{11} - \Omega_{12},\\
&a_{15} = -i\Omega_7 - \Omega_8 + \Omega_{14} - i\Omega_{16}, && b_{15} = \Omega_3 + i\Omega_4 - i\Omega_{11} + \Omega_{12},\\
&a_{16} = \Omega_1 - \Omega_6 + \Omega_9 + \Omega_{15}, && b_{16} = -i\Omega_2 - \Omega_5 - \Omega_{10} + i\Omega_{13},
\end{aligned}
$$

получим выражения:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} a_1 I_4 & a_2 I_4 & b_1\gamma_0\gamma_2 & b_2\gamma_0\gamma_2 \\ a_3 I_4 & a_4 I_4 & b_3\gamma_0\gamma_2 & b_4\gamma_0\gamma_2 \\ -b_1^*\gamma_0\gamma_2 & -b_2^*\gamma_0\gamma_2 & a_1^* I_4 & a_2^* I_4 \\ -b_3^*\gamma_0\gamma_2 & -b_4^*\gamma_0\gamma_2 & a_3^* I_4 & a_4^* I_4 \end{pmatrix},\\
Q_2 &= \begin{pmatrix} a_5\gamma_3\gamma_5 & a_6\gamma_3\gamma_5 & b_5\gamma_1 & b_6\gamma_1 \\ a_7\gamma_3\gamma_5 & a_8\gamma_3\gamma_5 & b_7\gamma_1 & b_8\gamma_1 \\ b_5^*\gamma_1 & b_6^*\gamma_1 & -a_5^*\gamma_3\gamma_5 & -a_6^*\gamma_3\gamma_5 \\ b_7^*\gamma_1 & b_8^*\gamma_1 & -a_7^*\gamma_3\gamma_5 & -a_8^*\gamma_3\gamma_5 \end{pmatrix},\\
Q_3 &= \begin{pmatrix} a_9\gamma_3 & a_{10}\gamma_3 & b_9\gamma_1\gamma_5 & b_{10}\gamma_1\gamma_5 \\ a_{11}\gamma_3 & a_{12}\gamma_3 & b_{11}\gamma_1\gamma_5 & b_{12}\gamma_1\gamma_5 \\ -b_9^*\gamma_1\gamma_5 & -b_{10}^*\gamma_1\gamma_5 & a_9^*\gamma_3 & a_{10}^*\gamma_3 \\ -b_{11}^*\gamma_1\gamma_5 & -b_{12}^*\gamma_1\gamma_5 & a_{11}^*\gamma_3 & a_{12}^*\gamma_3 \end{pmatrix},\\
Q_4 &= \begin{pmatrix} a_{13}\gamma_5 & a_{14}\gamma_5 & b_{13}\gamma_1\gamma_3 & b_{14}\gamma_1\gamma_3 \\ a_{15}\gamma_5 & a_{16}\gamma_5 & b_{15}\gamma_1\gamma_3 & b_{16}\gamma_1\gamma_3 \\ b_{13}^*\gamma_1\gamma_3 & b_{14}^*\gamma_1\gamma_3 & -a_{13}^*\gamma_5 & -a_{14}^*\gamma_5 \\ b_{15}^*\gamma_1\gamma_3 & b_{16}^*\gamma_1\gamma_3 & -a_{15}^*\gamma_5 & -a_{16}^*\gamma_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Отсюда следует, что конечные преобразования внутренней симметрии рассматриваемой системы уравнений Дирака принимают вид

$$
\begin{aligned}
\psi_1' = {} & a_1\psi_1 + a_5\gamma_3\gamma_5\psi_1 + a_9\gamma_3\psi_1 + a_{13}\gamma_5\psi_1 + a_2\psi_2 + a_6\gamma_3\gamma_5\psi_2 + \\
& + a_{10}\gamma_3\psi_2 + a_{14}\gamma_5\psi_2 + b_1\gamma_0\gamma_2\overline{\psi}_1 + b_5\gamma_1\overline{\psi}_1 + b_9\gamma_1\gamma_5\overline{\psi}_2 + \\
& + b_{13}\gamma_1\gamma_3\overline{\psi}_2 + b_2\gamma_0\gamma_2\overline{\psi}_2 + b_6\gamma_1\overline{\psi}_2 + b_{10}\gamma_1\gamma_5\overline{\psi}_2 + b_{14}\gamma_1\gamma_3\overline{\psi}_2,\\
\psi_2' = {} & a_3\psi_1 + a_7\gamma_3\gamma_5\psi_1 + a_{11}\gamma_3\psi_1 + a_{15}\gamma_5\psi_1 + a_4\psi_2 + a_8\gamma_3\gamma_5\psi_2 + \\
& + a_{12}\gamma_3\psi_2 + a_{16}\gamma_5\psi_2 + b_3\gamma_0\gamma_2\overline{\psi}_1 + b_7\gamma_1\overline{\psi}_1 + b_{11}\gamma_1\gamma_5\overline{\psi}_2 +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+b_{15}\gamma_1\gamma_3\bar{\psi}_2+b_4\gamma_0\gamma_2\bar{\psi}_2+b_8\gamma_1\bar{\psi}_2+b_{12}\gamma_1\gamma_5\bar{\psi}_2+b_{16}\gamma_1\gamma_3\bar{\psi}_2,\\
\bar{\psi}_1{}' &= -b_1^*\gamma_0\gamma_2\psi_1+b_5^*\gamma_1\psi_1-b_9^*\gamma_1\gamma_5\psi_1+b_{13}^*\gamma_1\gamma_3\psi_1-b_2^*\gamma_0\gamma_2\psi_2+\\
&+b_6^*\gamma_1\psi_2-b_{10}^*\gamma_1\gamma_5\psi_2+b_{14}^*\gamma_1\gamma_3\psi_2+a_1^*\bar{\psi}_1-a_5^*\gamma_3\gamma_5\bar{\psi}_1+\\
&+a_9^*\gamma_3\bar{\psi}_1-a_{13}^*\gamma_5\bar{\psi}_1+a_2^*\bar{\psi}_2-a_6^*\gamma_3\gamma_5\bar{\psi}_2+a_{10}^*\gamma_3\bar{\psi}_2-a_{14}^*\gamma_5\bar{\psi}_2,\\
\bar{\psi}_2{}' &= -b_3^*\gamma_0\gamma_2\psi_1+b_7^*\gamma_1\psi_1-b_{11}^*\gamma_1\gamma_5\psi_1+b_{15}^*\gamma_1\gamma_3\psi_1-b_4^*\gamma_0\gamma_2\psi_2+\\
&+b_8^*\gamma_1\psi_2-b_{12}^*\gamma_1\gamma_5\psi_2+b_{16}^*\gamma_1\gamma_3\psi_2+a_3^*\bar{\psi}_1-a_7^*\gamma_3\gamma_5\bar{\psi}_1+\\
&+a_{11}^*\gamma_3\bar{\psi}_1-a_{15}^*\gamma_5\bar{\psi}_1+a_4^*\bar{\psi}_2-a_8^*\gamma_3\gamma_5\bar{\psi}_2+a_{12}^*\gamma_3\bar{\psi}_2-a_{16}^*\gamma_5\bar{\psi}_2,
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

где a_i и b_i $(i=1\div 16)$ – произвольные комплексные числа.

Найдем, какие ограничения на параметры преобразований (2.29) накладывает условие (1.31) инвариантности лагранжиана теории. Учитывая, что Q_1 и Q_2 коммутируют, а Q_3 и Q_4 антикоммутируют с матрицами Γ_k, данное условие можем переписать в виде двух независимых условий (1.31) и (1.32), где $Q_1^+, Q_2^+, Q_3^+, Q_4^+$ имеют вид

$$
Q_1^+=\begin{pmatrix}
a_1^*I_4 & a_3^*I_4 & b_1\gamma_0\gamma_2 & b_3\gamma_0\gamma_2\\
a_2^*I_4 & a_4^*I_4 & b_2\gamma_0\gamma_2 & b_4\gamma_0\gamma_2\\
-b_1^*\gamma_0\gamma_2 & -b_3^*\gamma_0\gamma_2 & a_1I_4 & a_3I_4\\
-b_2^*\gamma_0\gamma_2 & -b_4^*\gamma_0\gamma_2 & a_2I_4 & a_4I_4
\end{pmatrix},
$$

$$
Q_2^+=\begin{pmatrix}
-a_5^*\gamma_3\gamma_5 & -a_7^*\gamma_3\gamma_5 & b_5\gamma_1 & b_7\gamma_1\\
-a_6^*\gamma_3\gamma_5 & -a_8^*\gamma_3\gamma_5 & b_6\gamma_1 & b_8\gamma_1\\
b_5^*\gamma_1 & b_7^*\gamma_1 & a_5\gamma_3\gamma_5 & a_7\gamma_3\gamma_5\\
b_6^*\gamma_1 & b_8^*\gamma_1 & a_6\gamma_3\gamma_5 & a_8\gamma_3\gamma_5
\end{pmatrix},
$$

$$
Q_3^+=\begin{pmatrix}
a_9^*\gamma_3 & a_{11}^*\gamma_3 & b_9\gamma_1\gamma_5 & b_{11}\gamma_1\gamma_5\\
a_{10}^*\gamma_3 & a_{12}^*\gamma_3 & b_{10}\gamma_1\gamma_5 & b_{12}\gamma_1\gamma_5\\
-b_9^*\gamma_1\gamma_5 & -b_{11}^*\gamma_1\gamma_5 & a_9\gamma_3 & a_{11}\gamma_3\\
-b_{10}^*\gamma_1\gamma_5 & -b_{12}^*\gamma_1\gamma_5 & a_{10}\gamma_3 & a_{12}\gamma_3
\end{pmatrix},
\tag{2.30}
$$

$$
Q_4^+=\begin{pmatrix}
a_{13}^*\gamma_5 & a_{15}^*\gamma_5 & -b_{13}\gamma_1\gamma_3 & -b_{15}\gamma_1\gamma_3\\
a_{14}^*\gamma_5 & a_{16}^*\gamma_5 & -b_{14}\gamma_1\gamma_3 & -b_{16}\gamma_1\gamma_3\\
-b_{13}^*\gamma_1\gamma_3 & -b_{15}^*\gamma_1\gamma_3 & -a_{13}\gamma_5 & -a_{15}\gamma_5\\
-b_{14}^*\gamma_1\gamma_3 & -b_{16}^*\gamma_1\gamma_3 & -a_{14}\gamma_5 & -a_{16}\gamma_5
\end{pmatrix}.
$$

Матрица билинейной формы в представлении (2.21) принимает вид

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0. \tag{2.31}$$

Подставляя выражения (2.28), (2.30) и (2.31) в условия (1.32) и (1.33), получаем следующие ограничения на параметры преобразований (2.29):

$$\begin{gathered}
|a_1|^2+|a_3|^2+|a_5|^2+|a_7|^2+|a_9|^2+|a_{11}|^2+|a_{13}|^2+|a_{15}|^2 - \\
-|b_1|^2-|b_3|^2-|b_5|^2-|b_7|^2-|b_9|^2-|b_{11}|^2-|b_{13}|^2-|b_{15}|^2 = 1, \\
|a_2|^2+|a_4|^2+|a_6|^2+|a_8|^2+|a_{10}|^2+|a_{12}|^2+|a_{14}|^2+|a_{16}|^2 - \\
-|b_2|^2-|b_4|^2-|b_6|^2-|b_8|^2-|b_{10}|^2-|b_{12}|^2-|b_{14}|^2-|b_{16}|^2 = 1, \\
a_1^*b_2 + a_3^*b_4 - a_2^*b_1 - a_4^*b_3 - a_5^*b_6 - a_7^*b_8 + a_6^*b_5 + a_8^*b_7 - \\
-a_9^*b_{10} - a_{11}^*b_{12} + a_{10}^*b_9 + a_{12}^*b_{11} + a_{13}^*b_{14} + a_{15}^*b_{16} - a_{14}^*b_{13} - a_{16}^*b_{15} = 0, \\
a_1^*a_2 + a_3^*a_4 - b_2^*b_1 - b_4^*b_3 + a_5^*a_6 + a_7^*a_8 - b_6^*b_5 - b_8^*b_7 + \\
+a_9^*a_{10} + a_{11}^*a_{12} - b_{10}^*b_9 - b_{12}^*b_{11} + a_{13}^*a_{14} + a_{15}^*a_{16} - b_{14}^*b_{13} - b_{16}^*b_{15} = 0, \\
-a_1^*a_5 - a_3^*a_7 + b_5^*b_1 + b_7^*b_3 + a_5^*a_1 + a_7^*a_3 - b_1^*b_5 - b_3^*b_7 - \\
-a_9^*a_{13} - a_{11}^*a_{15} + b_{13}^*b_9 + b_{15}^*b_{11} + a_{13}^*a_9 + a_{15}^*a_{11} - b_9^*b_{13} - b_{11}^*b_{15} = 0, \\
-a_1^*a_6 - a_3^*a_8 + b_6^*b_1 + b_8^*b_3 + a_5^*a_2 + a_7^*a_4 - b_2^*b_5 - b_4^*b_7 - \\
-a_9^*a_{14} - a_{11}^*a_{16} + b_{14}^*b_9 + b_{16}^*b_{11} + a_{13}^*a_{10} + a_{15}^*a_{12} - b_{10}^*b_{13} - b_{12}^*b_{15} = 0, \\
a_1^*b_6 + a_3^*b_8 - a_6^*b_1 - a_8^*b_3 + a_5^*b_2 + a_7^*b_4 - a_2^*b_5 - a_4^*b_7 - \\
-a_9^*b_{14} - a_{11}^*b_{16} + a_{14}^*b_9 + a_{16}^*b_{11} - a_{13}^*b_{10} - a_{15}^*b_{12} + a_{10}^*b_{13} + a_{12}^*b_{15} = 0, \\
-a_2^*a_6 - a_4^*a_8 + b_6^*b_2 + b_8^*b_4 + a_6^*a_2 + a_8^*a_4 - b_2^*b_6 - b_4^*b_8 - \\
-a_{10}^*a_{14} - a_{12}^*a_{16} + b_{14}^*b_{10} + b_{16}^*b_{12} + a_{14}^*a_{10} + a_{16}^*a_{12} - b_{10}^*b_{14} - b_{12}^*b_{16} = 0, \\
-a_1^*a_9 - a_3^*a_{11} - b_9^*b_1 - b_{11}^*b_3 + a_5^*a_{13} + a_7^*a_{15} + b_{13}^*b_5 + b_{15}^*b_7 - \\
-a_9^*a_1 - a_{11}^*a_3 - b_1^*b_9 - b_3^*b_{11} + a_{13}^*a_5 + a_{15}^*a_7 + b_5^*b_{13} + b_7^*b_{15} = 0, \\
-a_1^*a_{10} - a_3^*a_{12} - b_{10}^*b_1 - b_{12}^*b_3 + a_5^*a_{14} + a_7^*a_{16} + b_{14}^*b_5 + b_{16}^*b_7 - \\
-a_9^*a_2 - a_{11}^*a_4 - b_2^*b_9 - b_4^*b_{11} + a_{13}^*a_6 + a_{15}^*a_8 + b_6^*b_{13} + b_8^*b_{15} = 0, \\
a_1^*b_{10} + a_3^*b_{12} + a_{10}^*b_1 + a_{12}^*b_3 + a_5^*b_{14} + a_7^*b_{16} + a_{14}^*b_5 + a_{16}^*b_7 - \\
-a_9^*b_2 - a_{11}^*b_4 - a_2^*b_9 - a_4^*b_{11} - a_{13}^*b_6 - a_{15}^*b_8 - a_6^*b_{13} - a_8^*b_{15} = 0, \\
-a_2^*a_{10} - a_4^*a_{12} - b_{10}^*b_2 - b_{12}^*b_4 + a_6^*a_{14} + a_8^*a_{16} + b_{14}^*b_6 + b_{16}^*b_8 - \\
-a_{10}^*a_2 - a_{12}^*a_4 - b_2^*b_{10} - b_4^*b_{12} + a_{14}^*a_6 + a_{16}^*a_8 + b_6^*b_{14} + b_8^*b_{16} = 0, \\
-a_1^*a_{13} - a_3^*a_{15} - b_{13}^*b_1 - b_{15}^*b_3 - a_5^*a_9 - a_7^*a_{11} - b_9^*b_5 - b_{11}^*b_7 - \\
-a_9^*a_5 - a_{11}^*a_7 - b_5^*b_9 - b_7^*b_{11} - a_{13}^*a_1 - a_{15}^*a_3 - b_1^*b_{13} - b_3^*b_{15} = 0,
\end{gathered} \tag{2.32}$$

$$-a_1^* a_{14} - a_3^* a_{16} - b_{14}^* b_1 - b_{16}^* b_3 - a_5^* a_{10} - a_7^* a_{12} - b_{10}^* b_5 - b_{12}^* b_7 -$$
$$-a_9^* a_6 - a_{11}^* a_8 - b_6^* b_9 - b_8^* b_{11} - a_{13}^* a_2 - a_{15}^* a_4 - b_2^* b_{13} - b_4^* b_{15} = 0\,,$$
$$-a_1^* b_{14} - a_3^* b_{16} - a_{14}^* b_1 - a_{16}^* b_3 + a_5^* b_{10} + a_7^* b_{12} + a_{10}^* b_5 + a_{12}^* b_7 +$$
$$+a_9^* b_6 + a_{11}^* b_8 + a_6^* b_9 + a_8^* b_{11} - a_{13}^* b_2 - a_{15}^* b_4 - a_2^* b_{13} - a_4^* b_{15} = 0\,,$$
$$-a_2^* a_{14} - a_4^* a_{16} - b_{14}^* b_2 - b_{16}^* b_4 - a_6^* a_{10} - a_8^* a_{12} - b_{10}^* b_6 - b_{12}^* b_8 -$$
$$-a_{10}^* a_6 - a_{12}^* a_8 - b_6^* b_{10} - b_8^* b_{12} - a_{14}^* a_2 - a_{16}^* a_4 - b_2^* b_{14} - b_4^* b_{16} = 0\,,$$
$$-a_2^* b_{14} - a_4^* b_{16} - a_{14}^* b_2 - a_{16}^* b_4 + a_6^* b_{10} + a_8^* b_{12} + a_{10}^* b_6 + a_{12}^* b_8 = 0\,,$$
$$-a_1^* b_{13} - a_3^* b_{15} - a_{13}^* b_1 - a_{15}^* b_3 + a_5^* b_9 + a_7^* b_{11} + a_9^* b_5 + a_{11}^* b_7 = 0\,.$$

Таким образом, на 64 параметра преобразования (2.29) накладывается 28 условий, в результате чего получается 36-параметрическая группа внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории.

Для установления математической структуры данной группы перейдем к рассмотрению бесконечно малых однопараметрических преобразований, для которых условие инвариантности лагаранжиана имеет вид (1.37), (1.38).

Непосредственная проверка показывает, что условия (1.37) и (1.38) выполняются для 36-ти однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{aligned}
&J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}\ J^{14},\\
&L^2, L^3, L^5, L^6, L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14},\\
&K^2, K^3, K^5, K^6, K^7, K^9, K^{10}, K^{11}, K^{13}, K^{14},\\
&I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \quad \theta_2, \theta_3, \theta_5, \ \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}, \Lambda_2, \quad \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 16 мнимых ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \quad \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}, \Lambda_6, \quad \Lambda_7, \Lambda_9, \Lambda_{14}, \quad \Omega_1, \Omega_8, \Omega_1\ , \Omega_{51}$) параметров. Указанные преобразования образуют группу, изоморфную группе SO(5,4).

При переходе в пространство размерности 3+1 из рассматриваемых преобразований надо исключить те, что связаны с базисными операторами L^N, K^N. Тогда получим 16-параметрическую группу матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака, определяемую генераторами

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}\ J^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}. \tag{2.34}$$

При этом генератор I^1 коммутирует со всеми остальными в наборе (2.34), которые образуют 15-параметрическую унитарную группу с 8-мью вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 7-мью мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметрами, изоморфную группе SO(4,2).

Полную группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с ненулевой массой в пространстве 2+1 можно получить из вышеустановленной группы симметрии SO(5,4) путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^A, I^A, которые антикоммутируют с матрицами $\varGamma_k$. В результате получим 20-параметрическую группу преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{aligned}&J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}\ J^{14},\\&L^2, L^3, L^5, L^6, L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14},\end{aligned} \tag{2.35}$$

с 12-тью вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}$) и 8-мью мнимыми ($\omega_6, \omega_7,\ \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}$) параметрами, локально изоморфную группе $\mathrm{SO}(3,2)\otimes\mathrm{SO}(3,2)$.

3. Внутренняя симметрия уравнения Дирака–Кэлера в пространстве размерности 2+1

Тензорная форма уравнения Дирака–Кэлера в пространстве 2+1 для безмассового поля может быть получена из тензорной формы этого уравнения в пространстве 3+1 путем исключения из последнего всех величин, содержащих измерение x_3. В результате получим 8-компонентную систему

$$\begin{aligned}&\partial_k\psi_k = 0,\\&\partial_i\psi_{[ki]} + \partial_k\psi = 0,\\&-\partial_k\psi_i + \partial_i\psi_k + \partial_j\psi_{[kij]} = 0,\\&\partial_k\psi_{[ij]} + \partial_j\psi_{[ki]} + \partial_i\psi_{[jk]} = 0,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где индексы i, j, k пробегают значения 0, 1, 2; ψ, ψ_k, $\psi_{[ki]}$, $\psi_{[kij]}$ – соответственно скаляр, вектор, антисимметричные тензоры второго и третьего рангов в пространстве 2+1 (используем метрику пространства $g_{ki} = diag(1,1,1)$, поэтому не различаем ковариантные и контравариантные индексы).

Систему (3.1) можно записать в универсальной матричной форме релятивистского волнового уравнения (РВУ) первого порядка

$$\Gamma_k^{(8)}\partial_k\Psi^{(8)} = 0. \tag{3.2}$$

Вводя для тензорных компонент волновой функции

$$\Psi^{(8)} = (\psi, \psi_k, \psi_{[ki]}, \psi_{[kij]}) = (\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2\psi_{[12]}, \psi_{[10]}, \psi_{[20]}, \psi_{[012]}), \tag{3.3}$$

собирательный индекс $A = \left(\tilde{0}, k, [ki], [kij]\right)$, матрицы $\varGamma_k^{(8)}$ в (3.2) можно выразить через элементы полной матричной алгебры e^{AB} [8] следующим образом:

$$\varGamma_k = e^{\tilde{0}\,k} + e^{k\,\tilde{0}} - e^{i,[ki]} - e^{[ki],\,i} + \frac{1}{2}e^{[ij],[kij]} + \frac{1}{2}e^{[kij],[ij]}. \tag{3.4}$$

Матрица η билинейной вещественной лоренц-инвариантной формы в пространстве 2+1 находится тем же способом, что и система (3.1): из матрицы η, записанной в пространстве 3+1, исключаются строки и столбцы, обусловленные третьим пространственным измерением. В результате в базисе (3.3) получим

$$\eta = diag(-1,-1,1,1,-1,1,1,-1). \tag{3.5}$$

Нетрудно убедиться, что матрицы Γ_k (3.4) и η (3.5) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Gamma_k^{(8)}\Gamma_i^{(8)} + \Gamma_i^{(8)}\Gamma_k^{(8)} = 2\delta_{ki}I_8, \tag{3.6}$$

$$\eta\Gamma_0^{(8)} = \Gamma_0^{(8)}\eta,\ \eta\Gamma_1^{(8)} = -\Gamma_1^{(8)}\eta,\ \eta\Gamma_2^{(8)} = -\Gamma_2^{(8)}\eta. \tag{3.7}$$

Из тензорного базиса (3.3) с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & -i & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

можно перейти в фермионный базис, в котором по определению матрицы $\Gamma_k^{(8)}$ имеют вид (1.15). Для матрицы η в этом базисе получается выражение

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_0. \tag{3.9}$$

Очевидно, что систему из двух безмассовых уравнений Дирака (2.1) также можно представить в виде 8-компонентного РВУ (1.5) с матрицами (1.15). Если при этом лагранжиан системы (2.1) выбрать в виде разности лагранжианов каждого из уравнений, т. е. положить

$$L = L_1 - L_2, \tag{3.10}$$

то для матрицы η получим выражение, совпадающее с (3.9).

Исследуем теперь вышеописанным методом внутреннюю симметрию уравнения Дирака–Кэлера (3.2).

Беря от уравнения (3.2) комплексное сопряжение и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, получим систему, которую можно представить в аналогичном (3.2) виде (1.5). Здесь $\Psi = (\Psi^{(8)}, \Psi^{(8)*})$ – 16-компонентная функциястолбец и для матриц Γ_k имеют место выражения (2.4). Переходя к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены, т. е.

$$\Psi = (\Psi_r^{(8)}, \Psi_i^{(8)}), \ \Psi_r^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{(8)} + \Psi^{(8)*}), \ \Psi_i^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{(8)} - \Psi^{(8)*}), \qquad (3.11)$$

из (2.4) получим (2.7).

Лагранжиан уравнения Дирака-Кэлера, записанного в вещественной форме, эквивалентен лагранжиану исходного уравнения (2.2) при выборе матрицы билинейной формы η в представлении (3.11) в виде

$$\eta = I_2 \otimes \sigma_3 \otimes \gamma_0 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_0. \qquad (3.12)$$

Уравнение (1.5) с волновой функцией (3.11), матрицами Γ_k (2.7) и лагранжианом (3.8), (3.12) будем называть вещественной формой исходного уравнения Дирака–Кэлера в пространстве 2+1. Эту форму мы и будем использовать при исследовании свойств внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера в указанном пространстве.

Преобразования внутренней симметрии, оставляющие инвариантным данное уравнение и его лагранжиан, должны удовлетворять, во-первых, условиям (1.20), во-вторых, условию

$$Q^+ \eta Q = \eta, \qquad (3.13)$$

а также сохранять структуру (3.11) волновой функции в том смысле, что если Ψ_N – вещественная (мнимая) компонента, то и $\Psi'_N(x_k) = Q_{NM}\Psi_M(x_k)$ также должна быть вещественной (мнимой).

Наиболее общий вид преобразования Q, удовлетворяющего условиям (1.20), проще всего определить в фермионном базисе, в котором матрицы Γ_k имеют структуру (2.11). Переход из базиса (3.11) в фермионный базис в данном случае можно осуществить посредством унитарного преобразования (2.12).

Условиям (1.20) удовлетворяют матрицы, имеющие в фермионном базисе вид (1.19), где $q^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1 \div 4)$ – произвольные комплексные матрицы 4×4. Параметризуя матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов e_N $(N = 1 \div 16)$ в пространстве матриц 4×4 (2.14), получим 63-параметрическое преобразование, задаваемое базисными операторами (2.15).

Возвращаясь теперь обратно в представление (3.11), придем к выражениям (2.16) – (2.19) для операторов J^N, L^N, K^N, I^N.

Условие сохранения вещественного характера уравнения Дирака–Кэлера относительно матричных преобразований (1.18), задаваемых базисными операторами (2.16) – (2.19), накладывает на параметры ($\omega_N \to J^N, \theta_N \to L^N, \Lambda_N \to K^N, \Omega_N \to I^N$) ограничения (2.20).

Таким образом, преобразования внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера в пространстве 2+1 описываются унитарной 63-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (2.16) – (2.19), которым соответствует 35 вещественных и 28 мнимых параметров (2.20).

В дальнейшем будем работать в представлении

$$\Psi = (\psi^{(8)}, \bar{\psi}^{(8)}), \tag{3.14}$$

где $\bar{\psi}^{(8)} = \psi^{(8)+}\gamma_0$. Переход от представления (1.5) в представление (3.14) осуществляется с помощью унитарного преобразования (2.22).

В представлении (3.14) для генераторов (2.16) – (2.19) получаем выражения (2.23) – (2.26). Далее из них и соответствующих им параметров (2.20) составим матрицы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 конечных преобразований внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера. В результате получим выражения (2.28). Отсюда следует, что преобразования внутренней симметрии рассматриваемого уравнения Дирака–Кэлера принимают вид (2.29).

Условие инвариантности лагранжиана теории накладывает на параметры преобразований (2.29) ограничения

$$|a_1|^2 - |a_3|^2 + |a_5|^2 - |a_7|^2 + |a_9|^2 - |a_{11}|^2 + |a_{13}|^2 - |a_{15}|^2 -$$
$$-|b_1|^2 + |b_3|^2 - |b_5|^2 + |b_7|^2 - |b_9|^2 + |b_{11}|^2 - |b_{13}|^2 + |b_{15}|^2 = 1,$$
$$|a_2|^2 - |a_4|^2 + |a_6|^2 - |a_8|^2 + |a_{10}|^2 - |a_{12}|^2 + |a_{14}|^2 - |a_{16}|^2 -$$
$$-|b_2|^2 + |b_4|^2 - |b_6|^2 + |b_8|^2 - |b_{10}|^2 + |b_{12}|^2 - |b_{14}|^2 + |b_{16}|^2 = -1,$$
$$a_1^* b_2 - a_3^* b_4 - a_2^* b_1 + a_4^* b_3 - a_5^* b_6 + a_7^* b_8 + a_6^* b_5 - a_8^* b_7 -$$
$$-a_9^* b_{10} + a_{11}^* b_{12} + a_{10}^* b_9 - a_{12}^* b_{11} + a_{13}^* b_{14} - a_{15}^* b_{16} - a_{14}^* b_{13} + a_{16}^* b_{15} = 0,$$
$$a_1^* a_2 - a_3^* a_4 - b_2^* b_1 + b_4^* b_3 + a_5^* a_6 - a_7^* a_8 - b_6^* b_5 + b_8^* b_7 +$$
$$+a_9^* a_{10} - a_{11}^* a_{12} - b_{10}^* b_9 + b_{12}^* b_{11} + a_{13}^* a_{14} - a_{15}^* a_{16} - b_{14}^* b_{13} + b_{16}^* b_{15} = 0,$$
$$-a_1^* a_5 + a_3^* a_7 + b_5^* b_1 - b_7^* b_3 + a_5^* a_1 - a_7^* a_3 - b_1^* b_5 + b_3^* b_7 -$$
$$-a_9^* a_{13} + a_{11}^* a_{15} + b_{13}^* b_9 - b_{15}^* b_{11} + a_{13}^* a_9 - a_{15}^* a_{11} - b_9^* b_{13} + b_{11}^* b_{15} = 0,$$
$$-a_1^* a_6 + a_3^* a_8 + b_6^* b_1 - b_8^* b_3 + a_5^* a_2 - a_7^* a_4 - b_2^* b_5 + b_4^* b_7 -$$
$$-a_9^* a_{14} + a_{11}^* a_{16} + b_{14}^* b_9 - b_{16}^* b_{11} + a_{13}^* a_{10} - a_{15}^* a_{12} - b_{10}^* b_{13} + b_{12}^* b_{15} = 0,$$
$$a_1^* b_6 - a_3^* b_8 - a_6^* b_1 + a_8^* b_3 + a_5^* b_2 - a_7^* b_4 - a_2^* b_5 + a_4^* b_7 -$$
$$-a_9^* b_{14} + a_{11}^* b_{16} + a_{14}^* b_9 - a_{16}^* b_{11} + a_{13}^* b_{10} + a_{15}^* b_{12} - a_{10}^* b_{13} - a_{12}^* b_{15} = 0,$$
$$-a_2^* a_6 + a_4^* a_8 + b_6^* b_2 - b_8^* b_4 + a_6^* a_2 - a_8^* a_4 - b_2^* b_6 + b_4^* b_8 -$$
$$-a_{10}^* a_{14} + a_{12}^* a_{16} + b_{14}^* b_{10} - b_{16}^* b_{12} + a_{14}^* a_{10} - a_{16}^* a_{12} - b_{10}^* b_{14} + b_{12}^* b_{16} = 0,$$
$$-a_1^* a_9 + a_3^* a_{11} - b_9^* b_1 + b_{11}^* b_3 + a_5^* a_{13} - a_7^* a_{15} + b_{13}^* b_5 - b_{15}^* b_7 -$$
$$-a_9^* a_1 + a_{11}^* a_3 - b_1^* b_9 + b_3^* b_{11} + a_{13}^* a_5 - a_{15}^* a_7 + b_5^* b_{13} - b_7^* b_{15} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&-a_1^*a_{10}+a_3^*a_{12}-b_{10}^*b_1+b_{12}^*b_3+a_5^*a_{14}-a_7^*a_{16}+b_{14}^*b_5-b_{16}^*b_7-\\
&-a_9^*a_2+a_{11}^*a_4-b_2^*b_9+b_4^*b_{11}+a_{13}^*a_6-a_{15}^*a_8+b_6^*b_{13}-b_8^*b_{15}=0\,,\\
&a_1^*b_{10}-a_3^*b_{12}+a_{10}^*b_1-a_{12}^*b_3+a_5^*b_{14}-a_7^*b_{16}+a_{14}^*b_5-a_{16}^*b_7-\\
&-a_9^*b_2+a_{11}^*b_4-a_2^*b_9+a_4^*b_{11}-a_{13}^*b_6+a_{15}^*b_8-a_6^*b_{13}+a_8^*b_{15}=0\,,\\
&-a_2^*a_{10}+a_4^*a_{12}-b_{10}^*b_2+b_{12}^*b_4+a_6^*a_{14}-a_8^*a_{16}+b_{14}^*b_6-b_{16}^*b_8-\\
&-a_{10}^*a_2+a_{12}^*a_4-b_2^*b_{10}+b_4^*b_{12}+a_{14}^*a_6-a_{16}^*a_8+b_6^*b_{14}-b_8^*b_{16}=0\,,\\
&-a_1^*a_{13}+a_3^*a_{15}-b_{13}^*b_1+b_{15}^*b_3-a_5^*a_9+a_7^*a_{11}-b_9^*b_5+b_{11}^*b_7-\\
&-a_9^*a_5+a_{11}^*a_7-b_5^*b_9+b_7^*b_{11}-a_{13}^*a_1+a_{15}^*a_3-b_1^*b_{13}+b_3^*b_{15}=0\,,\\
&-a_1^*a_{14}+a_3^*a_{16}-b_{14}^*b_1+b_{16}^*b_3-a_5^*a_{10}+a_7^*a_{12}-b_{10}^*b_5+b_{12}^*b_7-\\
&-a_9^*a_6+a_{11}^*a_8-b_6^*b_9+b_8^*b_{11}-a_{13}^*a_2+a_{15}^*a_4-b_2^*b_{13}+b_4^*b_{15}=0\,,\\
&-a_1^*b_{14}+a_3^*b_{16}-a_{14}^*b_1+a_{16}^*b_3+a_5^*b_{10}-a_7^*b_{12}+a_{10}^*b_5-a_{12}^*b_7+\\
&+a_9^*b_6-a_{11}^*b_8+a_6^*b_9-a_8^*b_{11}-a_{13}^*b_2+a_{15}^*b_4-a_2^*b_{13}+a_4^*b_{15}=0\,,\\
&-a_2^*a_{14}+a_4^*a_{16}-b_{14}^*b_2+b_{16}^*b_4-a_6^*a_{10}+a_8^*a_{12}-b_{10}^*b_6+b_{12}^*b_8-\\
&-a_{10}^*a_6+a_{12}^*a_8-b_6^*b_{10}+b_8^*b_{12}-a_{14}^*a_2+a_{16}^*a_4-b_2^*b_{14}+b_4^*b_{16}=0\,,\\
&-a_2^*b_{14}+a_4^*b_{16}-a_{14}^*b_2+a_{16}^*b_4+a_6^*b_{10}-a_8^*b_{12}+a_{10}^*b_6-a_{12}^*b_8=0\,,\\
&-a_1^*b_{13}+a_3^*b_{15}-a_{13}^*b_1+a_{15}^*b_3+a_5^*b_9-a_7^*b_{11}+a_9^*b_5-a_{11}^*b_7=0\,,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

которые отличаются от (2.32) в силу различия в задании матрицы билинейной формы (2.31) и (3.12).

Таким образом, на 64 параметра преобразования (2.29) с учетом единичного накладывается 28 условий, в результате чего получается 36-параметрическая группа внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории.

Для установления математической структуры данной группы перейдем к рассмотрению бесконечно малых однопараметрических преобразований, для которых условие инвариантности лагранжиана принимает вид (1.37) и (1.38).

Непосредственная проверка показывает, что эти условия выполняются для 36-ти однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$
\begin{aligned}
&J^2, J^4, J^5, J^6, J^8, J^9, J^{10}, J^{12}, J^{13}\ J^{16},\\
&L^2, L^4, L^5, L^6, L^8, L^9, L^{10}, L^{12}, L^{13}, L^{16},\\
&K^2, K^4, K^5, K^6, K^8, K^9, K^{10}, K^{12}, K^{13}, K^{16},\\
&I^1, I^3, I^7, I^{11}, I^{14}, I^{15},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_2, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{13},\ \ \omega_{16}, \theta_2, \theta_5,\ \ \theta_8, \theta_{10}, \theta_{13}, \theta_{16},\ \ \Lambda_2, \Lambda_5, \Lambda_8, \Lambda_{10}, \Lambda_{13}, \Lambda_{16}, \Omega_7, \Omega_{14}$) и 16 мнимых ($\omega_4, \omega_6, \omega_9, \omega_{12},\ \ \theta_4, \theta_6,$

$\theta_9, \theta_{12}, \Lambda_4, \Lambda_6, \Lambda_9, \Lambda_{12}, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{11}, \Omega_{15}$) параметров. Указанные преобразования образуют группу SO(5,4).

Полную группу внутренней симметрии массивного уравнения Дирака–Кэлера в пространстве 2+1 можно получить из выше установленной группы симметрии путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^N, I^N, которые антикоммутируют с матрицами Γ_k. В результате получим 20-параметрическую непрерывную группу преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{gathered} J^2, J^4, J^5, J^6, J^8, J^9, J^{10}, J^{12}, J^{13} J^{16}, \\ L^2, L^4, L^5, L^6, L^8, L^9, L^{10}, L^{12}, L^{13}, L^{16}, \end{gathered} \tag{3.17}$$

с 12-тью вещественными ($\omega_2, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{13}, \omega_{16}, \theta_2, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{13}, \theta_{16}$) и 8-мью мнимыми ($\omega_4, \omega_6, \omega_9, \omega_{12}, \theta_4, \theta_6, \theta_9, \theta_{12}$) параметрами. В силу сказанного ранее точно такая же симметрия имеет место в пространстве 2+1 и для системы двух безмассовых уравнений Дирака (2.1) с лагранжианом (3.10).

Таким образом, как и в обычном четырехмерном многообразии Минковского, в пространстве 2+1 уравнение ДК может выступать в качестве альтернативы (либо геометрического аналога) уравнению Дирака. Новым же моментом здесь является то, что в пространстве 2+1 уравнение Дирака–Кэлера соответствует не четырем, как в пространстве 3+1, а двум уравнениям Дирака, а дополнительная степень свободы применительно к графену имеет четкую физическую интерпретацию.

Заключение

В настоящей работе исследованы свойства внутренней симметрии одного и системы двух уравнений Дирака, уравнения Дирака–Кэлера в пространстве размерности 2+1.

Получены следующие результаты.

Наиболее полной группой непрерывных преобразований внутренней симметрии лагранжиана безмассового уравнения Дирака является 10-параметрическая унитарная группа, локально изоморфная группе SO(3,2). При учете массы симметрия сужается до группы $\mathrm{SO}(2,1) \otimes \mathrm{SO}(2,1)$.

Внутренняя симметрия лагранжевой формулировки системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1 описывается 36-параметрической унитарной группой, локально изоморфной группе SO(5,4). В случае двух уравнений с ненулевой массой симметрия понижается до 20-параметрической группы $\mathrm{SO}(3,2) \otimes \mathrm{SO}(3,2)$.

Установленная симметрия существенно шире тех, что обычно обсуждаются в литературе по данному вопросу применительно к указанным уравнениям.

Преобразования внутренней симметрии уравнения Дирака–Кэлера в пространстве размерности 2+1 совпадают с симметрией системы двух уравнений Дирака с лагранжианом $L = L_1 - L_2$. Это означает, что уравнение Дирака–Кэлера может служить в качестве модели геометризованного описания дираковских квазичастиц в графене.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorbar, E.V. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E.V. Gorbar [et all.] // arXiv: cond- mat/02022422v3. – 26 Aug, 2002.

2. Gusynin, V.P. AC Conductivity of grapheme : from tight-binding model to (2+1) – dimensional quantum electrodynamics / P.V. Gusynin // arXiv : 0706 3016v2. – 27 Nov, 2007.
3. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, Ma. De J.A. Galicia // arXiv: hep-ph/0502089v1 9 Feb 2005.
4. Novoselov, K.S. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / S.K. Novoselov [et all.] // Science 306, 666 (2004).
5. Стражев, В.И. Уравнение Дирака–Кэлера. Классическое поле / В.И. Стражев, И.А. Сатиков, Д.А. Ционенко. – Минск : БГУ. – 2007. – 196 с.
6. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака–Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
7. Плетюхов, В.А. Внутренние симметрии безмассовых дираковских полей / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011.– № 2. – С. 13–17.
8. Богуш, А.А. Введение в теорию классических полей / А.А. Богуш, Г.Л. Мороз. – Минск, 1968. – 368 с.

V.A. Pletyukhov, P.P. Andrusevich **Internal symmetries of the Dirac and Dirac–Kähler fields**

The internal symmetry of the Lagrangian Dirac and Dirac-Kähler fields is investigated. Method based on the reduction of the corresponding equations for the real form is used. It is shown that the symmetry group, which in this case are found, much wider symmetries, usually attributed to this fields.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.09.2013