УДК 512.542

А.А. Трофимук, С.Н. Ткач

О ВЛИЯНИИ ФИТТИНГОВЫХ ФАКТОРОВ НА СТРОЕНИЕ ГРУППЫ

В данной статье приводится обзор результатов, связанных с инвариантами (производной длиной, нильпотентной длиной, p-длиной, главным рангом) разрешимой группы с заданным строением силовских подгрупп фиттинговых факторов и примыкающих к исследованиям авторов. Сформулированы открытые вопросы.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Важным направлением теории конечных групп является изучение строения групп, у которых определенная система подгрупп обладает заданными свойствами. В приведенных ниже работах в качестве определяющей системы подгрупп авторы выбирали силовские подгруппы или из самой подгруппы Фиттинга, или силовские подгруппы фиттинговых факторов, а в качестве определяющего свойства – цикличность, абелевость, бицикличность или ограничение на порядок.

Главный фактор H/K называется *фиттинговым*, если подгруппа H содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ группы G.

Хупперт показал, что разрешимая группа тогда и только тогда является сверхразрешимой, когда фиттинговы главные факторы имеют простые порядки. В частности, если порядок подгруппы Фиттинга разрешимой группы свободен от квадратов, то группа является сверхразрешимой. Я.Г. Беркович [1] продолжил исследования в данном направлении и установил, что разрешимая группа имеет главный ранг, не превосходящий 2, тогда и только тогда, когда порядки ее фиттинговых главных факторов свободны от кубов.

Из теоремы Цассенхауза следует, что группа, обладающая нормальным рядом с циклическими силовскими подгруппами в факторах, является сверхразрешимой. Бэр установил [2, с. 720], что если на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки, то группа сверхразрешима.

Особый интерес представляет развитие вышеуказанных результатов Хупперта, Цассенхауза, Бэра, Я.Г. Берковича, поскольку их работы являются основой для изучения строения классов групп с заданными ограничениями на силовские подгруппы фиттинговых факторов.

Статья носит обзорный характер. Доказательства утверждений не приводятся.

1. Обозначения и определения

Все обозначения и определения соответствуют принятым в [2–4].

Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$, а запись $G=[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0,1,\ldots,m$. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* этого ряда (1).

Дисперсивной по Оре называют группу G порядка

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},\ p_1 < p_2 < \ldots < p_n,$$

у которой имеется нормальный ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1$$

такой, что для каждого $i = 1,2,\ldots,n$ фактор-группа G_{i-1}/G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G.

Для группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G \supseteq G' \supseteq (G')' \supseteq \ldots \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \ldots.$$

Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i+1)} = (G^{(i)})'$. Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то группа G называется *разрешимой*. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной* и обозначается через $d(G)$.

Пусть G – группа и пусть $F_0(G) = 1$,

$F_1(G) = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G,

$F_2(G)/F_1(G) = F(G/F_1(G)),\ldots,F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G)),\ldots.$

Ясно, что $1 = F_0(G) \subseteq F_1(G) \subseteq F_2(G) \subseteq \ldots$.

В разрешимой неединичной группе подгруппа Фиттинга отлична от единичной подгруппы. Поэтому для разрешимой группы существует неотрицательное целое число n такое, что $F_n(G) = G$. Наименьшее n, для которого $F_n(G) = G$, называют *нильпотентной длиной* разрешимой группы G и обозначают через $n(G)$. Другими словами, нильпотентной длиной называют длину самого короткого нормального ряда с нильпотентными факторами. Ясно, что $n(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G нильпотентна. Группа называется *метанильпотентной*, если она содержит нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна. Ясно, что нильпотентная длина метанильпотентной группы не превышает 2.

Пусть G – p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить (p', p)-ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i/P_i = O_{p'}(G/P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G/P_i, а $P_{i+1}/N_i = O_p(G/N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G/N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют *p-длиной* группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Если G – неединичная p-разрешимая группа и p^n – наибольшая из степеней простого числа p, делящая порядок главных факторов группы G, то число $n = r_p(G)$ называется *p-рангом* группы G [2, с. 685]. Если G – разрешима, то она p-разрешима для всех $p \in \pi(G)$. *Главный ранг* разрешимой неединичной группы определим следующим образом:

$$r(G) = \max_{p \in \pi(G)} r_p(G).$$

Для единичной группы 1 полагают $r(1) = 0 = r_p(1)$. В силу теоремы Жордана–Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения главного ранга и p-ранга определяются однозначно.

Группу G будем называть p*-сверхразрешимой*, если каждый из ее главных факторов является либо группой простого порядка, либо p'-группой. Ясно, что неединичная p-сверхразрешимая группа p-разрешима и имеет p-ранг 1. Если группа G p-сверхразрешима для любого $p \in \pi(G)$, то она называется *сверхразрешимой.* Главный ранг неединичной сверхразрешимой группы равен 1.

2. Основные результаты

Согласно теореме Цассенхауза [2, теорема IV.2.11] *коммутант группы с циклическими силовскими подгруппами является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая*. В частности, ее производная длина не выше 2.

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением циклических подгрупп A и B.

Инварианты разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в работе В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской [5]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6.

Ф. Холл и Г. Хигмен [2, теорема IV.14.16] установили, что *производная длина разрешимой группы G с абелевыми силовскими подгруппами не превышает числа простых делителей порядка группы:* $d(G) \le |\pi(G)|$.

В [6] В.С. Монаховым получена оценка производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ в зависимости от порядков силовских подгрупп группы G. В частности, если порядок разрешимой группы не делится на (n + 1)-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

А.А. Трофимук [7] заметил, что для оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать порядки силовских подгрупп только ее подгруппы Фиттинга. Кроме того, существенное влияние на верхнюю границу производной длины группы оказывают порядки не всех силовских подгрупп из подгруппы Фиттинга, а только тех, которые не являются бициклическими, если таковые имеются.

Теорема 1. (А.А. Трофимук [7]) *Пусть G – разрешимая непримарная группа и F – ее подгруппа Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $\pi^*(F) \ne \varnothing$, *то* $d(G) \le \rho(t(F)) + \max\{d(F_p) \mid p \in \pi(F)\}$.

2. *Если* $\pi^*(F) = \varnothing$, *то* $d(G) \le 6$.

Здесь $\pi^*(F)$ – множество всех простых чисел p из $\pi(F)$, для которых силовская p-подгруппа в F неявляется бициклической. Если $\pi^*(F) = \varnothing$, то в группе F все силовские подгруппы бициклические. Функции $t_p(F)$ и $t(F)$ определяются следующим образом:

$$t_p(F) = log_p(|F_p|), t(F) = \max_{p\in\pi^*(F)} t_p(F).$$

Через $\rho(n)$ обозначается максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп группы $GL(n,F)$ степени n, где F – поле.

Следствие. [7] *Пусть G – разрешимая непримарная группа и F – ее подгруппа Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если силовские подгруппы в F бициклические, то производная длина не превышает 6.*

2. *Если $\pi^*(F)\neq\varnothing$, то $d(G)\leq\rho(t(F))+\delta(t(F))+1$.*

Здесь $\delta(n) = max\{d\in N \mid n\geq 2^d+2d-2\}$.

В 1978 году Гашюц [8] установил справедливость следующего утверждения: *если H/K – главный фактор наибольшего порядка разрешимой группы G, то подгруппа H содержится в $F(G)$.* Отсюда не следует, что каждый главный фактор порядка $p^{r(G)}$, p – простое число, является фиттинговым. Примером служит любая сверхразрешимая ненильпотентная группа.

Поэтому вполне естественно возникает вопрос о существовании в разрешимых группах фиттинговых главных факторов порядка $p^{r(G)}$, p – простое число. Ответ на этот вопрос получил В.С. Монахов [9], теорема 2 : *в каждой разрешимой неединичной группе G существует нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что $\Phi(G)\leq K$, $K/\Phi(G)$ – главный фактор группы G и $|K/\Phi(G)| = p^{r(G/\Phi(G))}$ для некоторого простого числа p.*

В работе [10] установлена зависимость ранга и производной длины конечной разрешимой группы от величины индекса фиттинговых подгрупп в своих нормальных замыканиях.

Теорема 2. (А.А. Трофимук [10], теорема 1) *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $r(G/\Phi(G))\leq 1+t^F(G)$.

2. $d(G/\Phi(G))\leq 1+\rho(1+t^F(G))\leq 4+t^F(G)$.

Теорема 3. (А.А. Трофимук [10], теорема 2) *Пусть G – разрешимая группа и $t^F(G)\leq 2$. Тогда $d(G/\Phi(G))\leq 6$, $n(G)\leq 4$ и $l_p(G)\leq 2$ для любого простого p. В частности, если группа A_4-свободна, то $d(G/\Phi(G))\leq 5$.*

Здесь функции $t_p^F(G)$ и $t^F(G)$ определяются следующим образом:

$$t_p^F(G) = \max\{n \mid p^n \,\|\, |H^G : H|, H\leq F(G)\}, p\in\pi(G);$$

$$t^F(G) = \max_{p\in\pi(G)} t_p^F(G).$$

Здесь запись $p^k \| n$ означает, что p^k делит n, но p^{k+1} не делит n; H^G – наименьшая нормальная подгруппа группы G, содержащая H.

Построены примеры, показывающие точность полученных оценок в теореме 3.

Пример 1. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP построена группа $G=[E_{7^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 222 264. Подгруппа Фиттинга данной группы совпадает с подгруппой E_{7^3} и $t^F(G)=2$. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)=1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4.

Пример 2. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, S – экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP построена группа $G=[E_{7^3}]([S]Q_8)$ порядка $74\,088=2^3\cdot 3^3\cdot 7^3$, которая является A_4-свободной группой. Ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)=1$ и производная длина равна 5. Кроме того, $F(G)=E_{7^3}$ и $t^F(G)=2$.

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что G сверхразрешима. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2. Поскольку любая p-группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. В.С. Монаховым, А.А. Трофимуком [11]. В частности, доказано, что *нильпотентная длина таких групп не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, $l_2(G)\le 2$, $l_3(G)\le 2$ и $l_p(G)\le 1$ для всех простых $p>3$.*

В работе А.А. Трофимука [12] продолжено изучение разрешимых групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых имеют ограничения на силовские подгруппы. Основным результатом работы является факт сохранения оценок некоторых инвариантов, полученных в работе [11], для разрешимых групп, обладающих нормальными рядами такими, что силовские p-подгруппы их факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p\in\pi(G)$. В частности, *нильпотентная длина таких групп не превышает 4, $l_2(G)\le 2$, $l_3(G)\le 2$ и $l_p(G)\le 1$ для всех простых $p>3$. Однако, оценка производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ увеличивается, а именно, не превышает 6.*

Разрешимые группы из работы [11] и группы, исследуемые в работе [12], имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p-длины, а для производной длины верхние границы различны. Однако, оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p\in\{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5.

Пример 3. Пусть E_{13^3} – элементарная абелева группа порядка 13^3, а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP построена группа $G=[E_{13^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 1 423 656. Очевидно, что группа G

обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)=1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в работе [12] являются точными.

На основании результатов, полученных в работах [7], [11], [12] возникают вполне естественные задачи:

– получить оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины, p-длины) разрешимых групп, обладающих нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами в подгруппах Фиттинга его факторов групп;

– установить новые свойства группы в случае ее A_4-свободности;

– получить зависимость производной длины группы от порядков небициклических силовских подгрупп в подгруппах Фиттинга факторов ее нормальных рядов;

– уточнить получаемые оценки и получить ряд новых свойств таких групп в случае небольших порядков небициклических силовских подгрупп.

Хорошо известен результат Бэра [2, с. 720]: *если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп*

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G), \tag{2}$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i, то G сверхразрешима.

Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) будут циклическими.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) являются бициклическими.

Теорема 4 (А.А. Трофимук [13]) . *Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида* (2) *такая, что G_i нормальны в G и силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются бициклическими для всех i. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. $l_p(G) \le 2$ *для всех простых* p.

3. *Если группа G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.*

Исследования, проведенные в работе [12], приводят к следующему вопросу: *изменятся ли оценки верхних границ нильпотентной длины, производной длины и p-длины разрешимых групп из теоремы 4, если силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i ряда (2) будут либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Мат. сб. – 1967. – Т. 74(116), № 1. – С. 75–92.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

5. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70. – № 4. – С. 603–612.

6. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43. – № 4. – С. 411–424.

7. Трофимук, А.А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы / А.А. Трофимук // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – № 2. – С. 287–293.

8. Gashutz, W. Existenz und Konjugiertsein von Untergruppen, die in endlichen auflosbaren Gruppen durch gewisse Indexschranken definiert sind / W. Gashutz // J. Algebra. – 1978. – V. 53. – № 2. – S. 389–394.

9. Монахов, В.С. К теореме Хупперта-Шеметкова / В.С. Монахов // Труды института математики. – 2008. – Т. 16. – № 1. – С. 64–66.

10. Трофимук, А.А. О фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы / А.А. Трофимук // Труды института математики и механики УрО РАН. –2012. – №3 (18). – С. 242–246.

11. Monakhov, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in algebra. – 2011. – № 39. – P. 3178–3186.

12. Трофимук, А.А. О конечных группах с небольшими порядками небициклических силовских подгрупп факторов // А.А. Трофимук // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика. Математика. – 2012. – № 1. – С. 107–115.

13. Трофимук, А.А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах // А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3 (19). – С. 304– 307.

***A.A. Trofimuk, S.N. Tkach* On Influence of the Fitting Factors on Structure of the Group**

The review of the results connected with invariants (the derived length, the nilpotent length, the p-length, the chief rank) of solvable groups with given structure of Sylow subgroups of the fitting factors is given in this article. These results adjoin to the researches of authors. Open questions are formulated.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 04.09.2013