

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Галоўны рэдактар:*

А. М. Сендзер

*Намеснік галоўнага рэдактара:*

А. Я. Будзько

*Міжнародны савет*

В. А. Главан (Малдова)

В. Г. Самойленка (Україна)

В. В. Дзікусар (Расія)

*Рэдакцыйная калегія:*

М. М. Сендзер

(адказны рэдактар)

А. Б. Антаневіч

М. І. Ляўчук

В. С. Манахаў

І. П. Мартынаў

У. А. Плещохоў

В. М. Радзькоў

У. С. Секяржыцкі

М. М. Труш

А. В. Чычурын

Пасведчанне аб рэгістрацыі

ў Міністэрстве інфармацыі

Рэспублікі Беларусь

№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:

224665, г. Брэст,

бульвар Касманаўтаў, 21

тэл.: 21-72-07

e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага

ўніверсітэта» выдаецца

са снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

**№ 2 / 2019**

У адпаведнасці з Дадаткам да загада

Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь

ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі

Рэспублікі Беларусь ад 21.01.2019 № 24 (са змяненнямі, унесенымі

загадамі ВАК ад 04.02.2019 № 30; 15.03.2019 № 75; 10.06.2019 № 160;

16.10.2019 № 236) часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны ў Пералік навуковых выданняў

Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных

даследаванняў па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

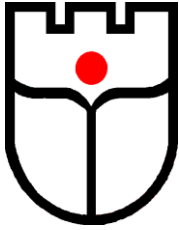
# ЗМЕСТ

## ФІЗІКА

<b>Демидчик А. В.</b> Структура быстрозатвердевших фольг сплава $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , полученных спиннингованием .....	5
<b>Липо В. А., Лявшук И. А., Овчинников Е. В., Сабуть А. В., Секержицкий С. С.</b> Влияние выбора ячейки в кристалле на ячейку обратной решетки .....	12
<b>Навныко В. Н., Аманова М. А., Шепелевич В. В., Юдицкий В. В.</b> Изменение компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ под действием электрического поля пространственного заряда .....	24
<b>Плетюхов В. А., Капица И. В., Кисель В. В., Редьков В. М.</b> Р-неинвариантное релятивистское волновое уравнение для частицы со спином $\frac{1}{2}$ и тремя массами .....	35
<b>Савенко В. С., Степанев Н. В.</b> Расчет пондеромоторных факторов и их графических изображений при электропластической деформации металлов с использованием математического пакета MatLab .....	44

## МАТЭМАТЫКА

<b>Грицук Д. В., Трофимук А. А.</b> Строение $\pi$ -разрешимой группы, у которой индексы нормальных замыканий или кофакторы подгрупп из факторов ограничены .....	55
<b>Матысик О. В.</b> Итерационная регуляризация линейных некорректных уравнений первого рода методом неявного типа .....	60
<b>Мельникова И. Н., Войтович В. В.</b> Некоторые приложения теории дифференциальных уравнений и их систем к физическим процессам .....	68
<b>Сендер А. Н.</b> Р-адические сплайны как аппарат приближения локально-постоянных функций класса $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ .....	76
<b>Трофимук А. А., Лукьяненко В. О.</b> О сверхразрешимости группы с заданными условиями перестановочности максимальных подгрупп .....	93
<b>Юдов А. А., Кисилюк Е. В.</b> Метод построения канонического рипера подмногообразия однородного пространства .....	100



# *Vesnik*

*of Brest University*

*Editor-in-chief:*  
A. M. Sender

*Deputy Editor-in-chief:*  
A. Ya. Budzko

*International Board:*  
V. A. Glavan (Moldova)  
V. G. Samoilenka (Ukraine)  
V. V. Dzikussar (Russia)

*Editorial Board:*  
M. M. Sender  
(managing editor)  
A. B. Antanevich  
M. I. Lyuvchuk  
I. P. Martynau  
V. S. Manakhau  
Y. A. Pletsukhou  
V. M. Radzkou  
Y. S. Sekyartzhytski  
M. M. Trush  
A. V. Chychuryn

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
№ 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224665, Brest,  
Boulevard Cosmonauts, 21  
tel.: 21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

## Series 4

### PHYSICS

### MATHEMATICS

**SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL**

Issued two times a year

Founder – Educational institution  
«Brest state university named after A. S. Pushkin»

## *№ 2 / 2019*

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 № 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 21, 2019 № 24 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from February, 04, 2019 № 30; March, 15, 2019 № 75; June, 10, 2019 № 160; October, 16, 2019 № 236) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

# INDEX

## PHYSICS

<b>Demidchik A. V.</b> Structure of Quickly Turned Foil Alloy $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , Received by Spinning.....	5
<b>Liopo V. A., Liaushuk I. A., Auchynnikau Y. V., Sabutz A. V., Sekerzhitski S. S.</b> Influence of Cell Choice in Crystal on Reciprocal Lattice Cell.....	12
<b>Naunya V. N., Amanova M. A., Shepelevich V. V., Yudzitski U. V.</b> Variation of Components of the Inverse Permittivity Tensor in $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ Crystal by Electric Space Charge Field.....	24
<b>Pletyukhov V. A., Kapitsa I. V., Kisel V. V., Red'kov V. M.</b> P-Noninvariant Relativistic Wave Equation for the Particle with Spin 1/2 and Three Masses.....	35
<b>Savenko V. S., Stepaneev N. V.</b> Calculation of Pre-Motor Factors and Their Graphic Images at Electroplastic Deformation of Metals Using the Matlab Package .....	44

## MATHEMATICS

<b>Gritsuk D. V., Trofimuk A. A.</b> The Structure of a $\pi$ -Soluble Group in which the Indices of Normal Closure or Cofactors of Subgroups of the Factors are Limited .....	55
<b>Matysik O. V.</b> The Iterative Regularization of Linear Incorrect Equations of the first kind by the Method of Implicit Type.....	60
<b>Melnikova I. N., Voytovich V. V.</b> Some Applications of the Theory of Differential Equations and Their Systems to Physical Processes .....	68
<b>Sender A. N.</b> P-adic Splines for Approximation of Local Constant Functions from $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ .....	76
<b>Trofimuk A. A., Lukyanenko V. O.</b> On the Supersolubility of a Group with Given Conditions of Permutability of Maximal Subgroups .....	93
<b>Yudov A. A., Kisilyuk E. V.</b> Method for Constructing a Canonical Riper of a Submariety of Homogeneous Space .....	100

УДК (620.17+620.18):669.76

**А. В. Демидчик**

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: [otf@brsu.brest.by](mailto:otf@brsu.brest.by)

## СТРУКТУРА БЫСТРОЗАТВЕРДЕВШИХ ФОЛЬГ СПЛАВА $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , ПОЛУЧЕННЫХ СПИННИНГОВАНИЕМ

*Полученные в результате сверхбыстрой закалки фольги сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  имеют неустойчивую микрокристаллическую структуру, образование которой связано со значительным переохлаждением жидкой фазы в процессе кристаллизации. Распределение компонентов в исходной фольге однородное. Средний размер зерна исходных фольг составляет около 10 мкм, среднее значение удельной поверхности межзеренных границ – около  $290 \text{ м}^{-1}$ . Отжиг фольг приводит к увеличению среднего размера зерна и уменьшению удельной поверхности межзеренных границ в зависимости от температуры отжига и его продолжительности. Распределение компонентов в отожженной фольге однородное.*

### **Введение**

Своеобразное изменение энергетического спектра сплавов висмута с сурьмой в зависимости от состава обуславливает немонотонное изменение ряда физических характеристик.

Перестройка зонной структуры сопровождается переходами полуметалл-полупроводник и полупроводник-полуметалл: области до 6 ат. % Sb и свыше 23 ат. % Sb являются полуметаллическими, область 7...22 ат. % Sb – полупроводниковой с максимальным энергетическим зазором вблизи состава  $\text{Bi}_{0,88}\text{Sb}_{0,12}$ .

Бинарные сплавы с большим содержанием висмута находят применение в каскадах твердотельных охладителей, а также в различных миниатюрных измерительных устройствах. Монокристаллы указанных сплавов склонны к образованию дендритной структуры, которая ухудшает термоэлектрические свойства материала. Поли- и монокристаллы, полученные литьем сплавов, обладают низкой механической прочностью и характеризуются неоднородным распределением компонентов. Один из путей устранения указанных недостатков – увеличение скорости кристаллизации сплава, что достигается сверхбыстрой закалкой из жидкой фазы. Закалка позволяет получать материалы в виде фольг с более мелкозернистой структурой, а также может привести к однородному распределению компонентов в готовом материале, что в свою очередь ведет к увеличению прочностных характеристик и улучшению термоэлектрических свойств.

В данной работе изучалось влияние сверхбыстрой закалки на формирование структуры в фольгах сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ . Для этого проводились рентгеноспектральный, рентгеноструктурный и металлографический анализы.

### **Методика получения и измерения**

Объект исследования – фольги сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , полученные спиннингом: затвердевание расплава осуществлялось на внешней отполированной поверхности вращающегося медного цилиндра. Толщина фольг составляла от 5 до 50 мкм, исследованию подвергались лишь фольги толщиной от 15 до 30 мкм.

Исследование структуры фольг проводилось на растровом электронном микроскопе, микроанализ – при помощи рентгеновского микроанализатора. Исследование морфологии поверхности сплавов осуществлялось с обеих сторон фольги. Компонентный анализ по глубине осуществлялся на изломе фольги.

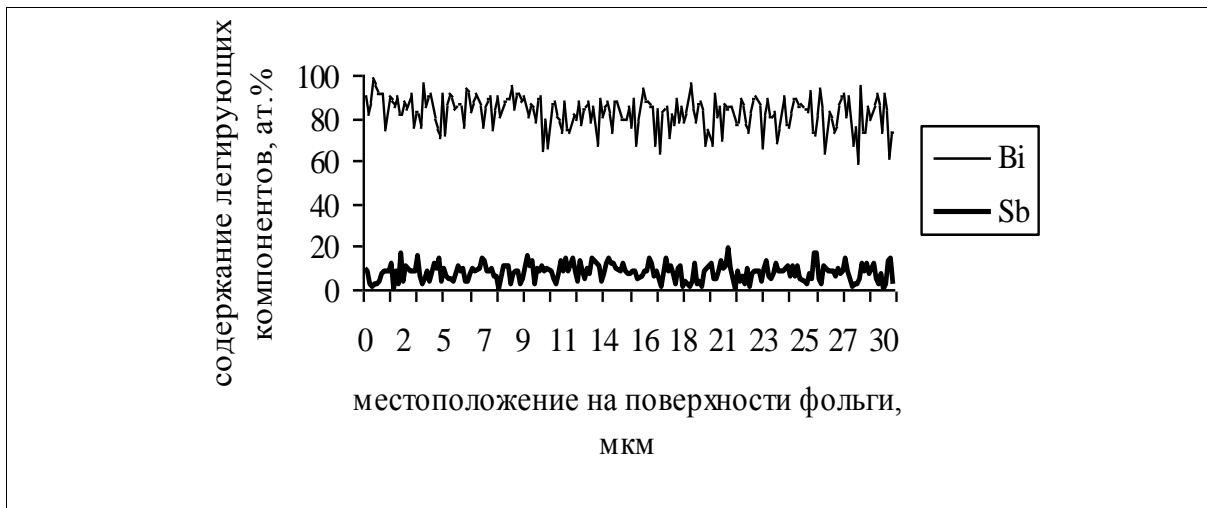
Травление шлифов осуществлялось раствором азотной кислоты в этиловом спирте. Рентгеноструктурный анализ был выполнен на дифрактометре ДРОН-3 в медном излучении. Полусные плотности дифракционных линий  $10\bar{1}2$ ,  $10\bar{1}4$ ,  $11\bar{2}0$ ,  $10\bar{1}5$ ,  $20\bar{2}0$ ,  $20\bar{2}2$ ,  $10\bar{1}7$ ,  $20\bar{2}5$ ,  $21\bar{3}0$ ,  $12\bar{3}2$  и 0009 рассчитывались по методу Харриса. При расчете среднего размера зерна применялся метод секущих.

Изотермический отжиг проводился при температурах 100, 120, 140, 160, 180 и 220 °С в течение 30 минут и 1 часа.

### Результаты работы и их обсуждение

**Морфология поверхности исходных образцов.** Микроанализ фольг исследуемого сплава показал, что в процессе сверхбыстрого охлаждения образуется химически однородная структура, причем речь идет как о распределении компонентов по обеим поверхностям, так и по глубине (излому) фольги.

На рисунке 1 приведено распределение легирующих компонентов для поверхности фольги, образуемой при контакте с воздухом. Аналогичный результат получен и для гладкой поверхности, образуемой при контакте с диском-кристаллизатором.

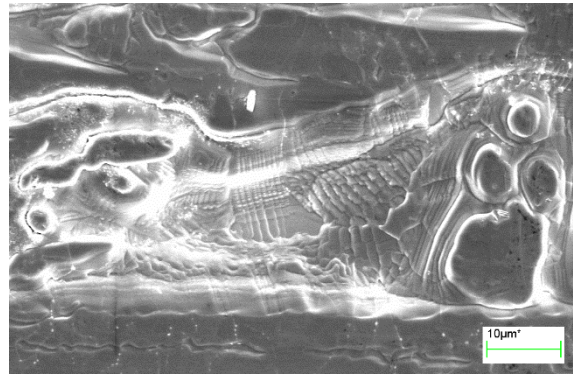


**Рисунок 1. – Распределение висмута и сурьмы по шероховатой поверхности фольги сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$**

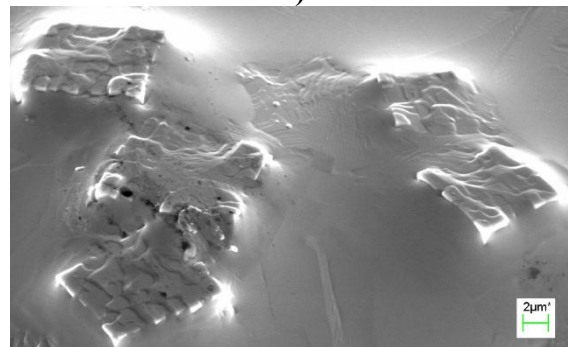
Морфология поверхностей фольги такова: поверхность фольги, образующаяся со стороны медного цилиндра при кристаллизации капли расплава, является гладкой. Данная поверхность может содержать впадины (рисунок 2а), которые образуются, по-видимому, из-за попадания воздуха между кристаллизатором и расплавом.

Противоположная ей поверхность фольги (шероховатая), образующаяся в контакте с атмосферой, может содержать выступы, в некоторых местах с огранкой правильной формы (рисунок 2б), которые представляют собой выход кристаллитов на поверхность.

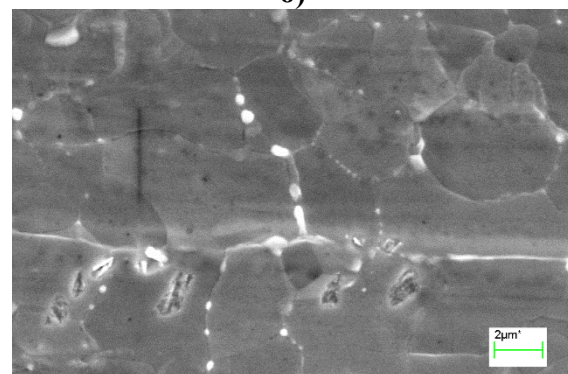
Удалось получить фотографию свободной поверхности (рисунок 2в), на которой проступают границы блоков или зерен, при этом никакой специальной обработки или химического травления образца не производилось.



а)



б)



в)

Рисунок 2. – Фотографии шероховатой поверхности разных фольг сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

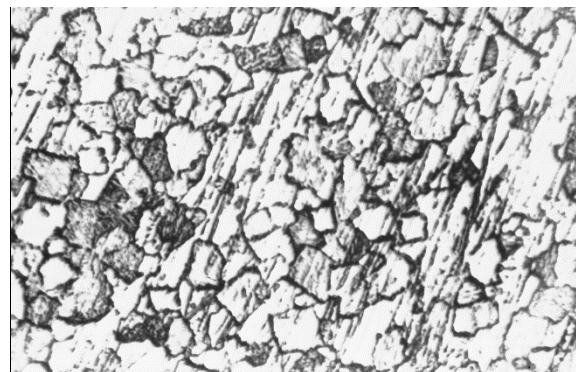


Рисунок 3. – Фотография шлифа поверхности фольги  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

**Металлографія паверхні исходных образцов.** Металлографічныя даследаванні сведчаюць аб тым, што быстразатвердзеныя фольгі маюць мікрокрысталічную структуру, утварэнне якой звязана са значным пераохалоджэннем расплава і высокай скорасцю зародышэафармавання. Форма зернаў – няправільная (рысунак 3). Сярэдняе памернае зерна, як паказалі разлікі, складае  $(14 \pm 1)$  мкм. Даная велічыня можа незначыльна вар'іравацца ў залежнасці ад таго, на якой паверхні – гладкай ці шэрохаватай – зробана шліф (большыя значэнні характэрны для шэрохаватай паверхні, якая пры затвердванні кантактавала з воздухам). Калі параўнаць гэта значэнне з памерамі зернаў, разлічанымі для фольгі, атрыманых прокаткай ці цэнтробежным ахалоджэннем, то яно некалькі вышэй, што сведчыць аб больш нізкіх скорасцях зародышэафармавання пры спінінгуванні.

Максімальнае колькасць зернаў прыходзіць альбо на абласць, у якую трапляе сярэдняе памернае зерна, альбо на прылеглаючую да яе абласць са значэннямі, меншымі за сярэдняе памернае зерна (рысунак 4). Колькасць зернаў, маючых памеры, меншыя, за сярэдняе значэнне, перавышае колькасць зернаў, маючых памеры, значэння якіх большыя за сярэдняе. Сярэдняе значэнне удельнай паверхні міжзернавых граніц складае каля  $290 \text{ мм}^{-1}$ .

**Полісныя шчыльнасці дыфракцыйных ліній исходных образцов.** Вынікі разліку полісных шчыльнасцей дыфракцыйных ліній прыведзены ў табліцы 1, з якой відаць, што фольгі маюць чётка выражаную двойную тэкстуру  $(10\bar{1}2) + (20\bar{2}0)$ , фарміраванне якой тлумачыцца механізмам росту крысталітаў.

Каждый атам вискута в кристаллической решетке связан с тремя другими атомами ковалентными связями, при этом две ковалентные связи находятся в плоскостях  $(01\bar{1}2)$ ,  $(\bar{1}012)$  и  $(1\bar{1}02)$ , а третья связывает два атома, расположенных в соседних плоскостях того же типа. На межфазной границе кристалл – жидкость, совпадающей с указанными плоскостями, образуется высокая плотность активных центров в виде ненасыщенных ковалентных связей, к которым легко присоединяются атомы из расплава, образуя ступеньки атомного размера.

Атам, знаходзячыся на краю ступенькі, мае ненасыщеную ковалентную сувязь, арыентаванную ўздоў плоскасцей  $(01\bar{1}2)$ ,  $(\bar{1}012)$  і  $(1\bar{1}02)$ , што спрыяе прысоедіненню атома з жідкасці. Пры пераохалоджэнні расплава адбываецца бокавое перамяшчэнне ступенькі, вызываючае актывны рост крысталітаў з данай арыентацыяй, што і абумоўлівае фарміраванне тэкстуры  $(10\bar{1}2)$ .

Табліца 1. – Значэнне полісных шчыльнасцей фольгі сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

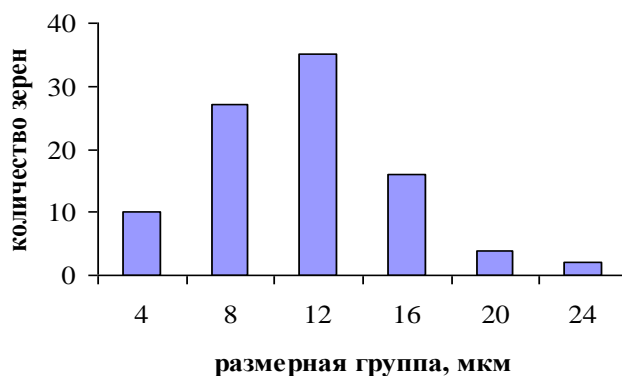
	Дыфракцыйныя лініі										
	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}4$	$11\bar{2}0$	$10\bar{1}5$	$20\bar{2}0$	$20\bar{2}2$	$10\bar{1}7$	$20\bar{2}5$	$21\bar{3}0$	$12\bar{3}2$	0009
1	5,1	0,0	0,0	0,1	4,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	6,5	0,1	0,1	0,2	1,1	0,9	0,0	0,1	0,1	0,0	0,1

Примечание – строка 1 – зеркальная поверхность, строка 2 – шероховатая поверхность.

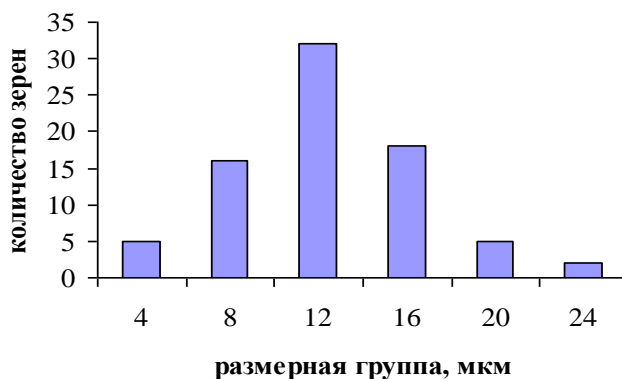
**Морфалогія паверхні отожженных образцов.** Распределение интенсивностей  $K_{\alpha}$ -линий вискута і сурьмы ў быстразатвердзенай фользе даследаванага сплава, отожженага пры тэмпературах, указаных у пункце артыкула «Метадыка атрымання і вымярэння», практычна не адрозніваецца ад распаўсюлення, атрыманага для неатожжана-



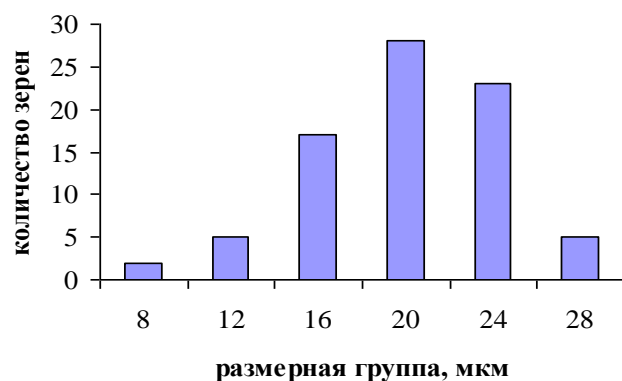
ных фольг и представленного на рисунке 1, что свидетельствует о том, что термическая обработка фольг не влияет на распределение компонентов (таблица 2).



**Рисунок 4.** – Гистограмма распределения среднего размера зерна исходной фольги по размерным группам



**Рисунок 5.** – Гистограмма распределения среднего размера зерна отожженной при 140 °C в течение 30 минут фольги по размерным группам



**Рисунок 6.** – Гистограмма распределения среднего размера зерна отожженной при 220 °C в течение 30 минут фольги по размерным группам

*Металлография поверхности отожженных образцов.* Термическая обработка фольг в течение 30 минут при 100, 120 и 140 °C практически не приводит к изменению

среднего размера зерна (рисунок 5). При таком же по продолжительности отжиге, но уже при 160 °С средний размер зерна составляет около 14 мкм, при 180 °С – 18 мкм. Отжиг при 220 °С приводит к увеличению зеренных размеров до 25 мкм.

На рисунке 6 представлена гистограмма распределения среднего размера зерна такой фольги: максимум распределения, как видно, сместился в область более высоких значений размера зерна. С увеличением температуры отжига и времени отжига возрастает доля крупных зерен и максимум распределения смещается в область более высоких значений длин хорд. Отсутствие на распределении второго максимума свидетельствует о протекании лишь собирательной рекристаллизации.

Среднее значение удельной поверхности межзеренных границ при температурах отжига 100, 120 и 140 °С составляет соответственно 290, 286 и 283 мм<sup>-1</sup>, т. е. меняется незначительно (в пределах погрешности).

Отжиг при 180 и 220 °С приводит к заметному уменьшению удельной поверхности межзеренных границ – 256 и 230 мм<sup>-1</sup> соответственно.

Рост одних зерен происходит за счет других, соседних, т. е. имеет место так называемая миграция высокоугловых границ. Сетка границ зерен в отожженных фольгах приближается к равноосной, в то время как у исходных фольг имеется неуравновешенность поверхностного натяжения (рисунок 3), которая и является условием протекания собирательной рекристаллизации.

Таблица 2. – Среднее содержание висмута и сурьмы на поверхности фольги, отожженной при температуре 220 °С в течение 1 часа, ат. %

Сторона фольги, на которой исследовалось распределение компонентов	Содержание Вi на поверхности фольги	Содержание Sb на поверхности фольги
Зеркальная	89,6	10,4
Шероховатая	88,4	11,6

**Полюсные плотности дифракционных линий отожженных образцов.** Отжиг фольг показал, что компонент текстуры ( $10\bar{1}2$ ) при температурах отжига выше 180 °С ослабевает, а компонент текстуры ( $20\bar{2}0$ ) усиливается (таблица 3). Указанная закономерность была обнаружена ранее и для фольг, полученных односторонним (расплав затвердевал на внутренней поверхности вращающегося цилиндра) и двухсторонним (расплав затвердевал между двумя поверхностями вращающихся навстречу друг другу цилиндров) сверхбыстрыми охлаждениями.

Таблица 3. – Полюсные плотности дифракционных линий фольг, отожженных при разных температурах в течение 1 часа

	Дифракционные линии										
	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}4$	$11\bar{2}0$	$10\bar{1}5$	$20\bar{2}0$	$20\bar{2}2$	$10\bar{1}7$	$20\bar{2}5$	$21\bar{3}0$	$12\bar{3}2$	$0009$
1	5,1	0,0	0,0	0,1	4,0	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2	4,9	0,1	0,0	0,0	4,2	0,5	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
3	1,3	0,1	0,2	0,7	5,6	0,6	0,0	0,0	0,2	1,4	0,9

Примечание – строка 1 – 120 °С, строка 2 – 180 °С, строка 3 – 220 °С.

### Заключение

Сверхбыстрая закалка фольги сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  спиннингованием приводит к образованию неустойчивой микрокристаллической структуры с однородным распре-

делением висмута и сурьмы по поверхности и глубине. Средний размер зерна исходных фольг составляет около 10 мкм, среднее значение удельной поверхности межзеренных границ – около  $290 \text{ мм}^{-1}$ .

Исходные фольги имеют четко выраженную двойную текстуру  $(10\bar{1}2)+(20\bar{2}0)$ .

Термическая обработка фольг выше температуры  $180 \text{ }^\circ\text{C}$  приводит к увеличению среднего размера зерна и уменьшению удельной поверхности межзеренных границ.

Распределение компонентов в отожженной фольге однородное.

Компонент текстуры  $(10\bar{1}2)$  при температурах отжига выше  $180 \text{ }^\circ\text{C}$  ослабевает, а компонент текстуры  $(20\bar{2}0)$  усиливается.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.03.2019

**Demidchik A. V. Structure of Quickly Turned Foil Alloy  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , Received by Spinning**

*The resulting ultrafast quenching of the  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  alloy foil has an unstable microcrystalline structure, the formation of which is associated with a significant supercooling of the liquid phase during the crystallization process. The distribution of the components in the original foil is homogeneous. The average grain size of the original foil is about  $10 \mu\text{m}$ , the average value of the specific surface of grain boundaries is about  $290 \text{ mm}^{-1}$ . Annealing of foils leads to an increase in the average grain size and a decrease in the specific surface of grain boundaries depending on the annealing temperature and its duration. The distribution of components in the annealed foil is uniform.*

УДК 538.9

**В. А. Лионо<sup>1</sup>, И. А. Лявшук<sup>2</sup> Е. В. Овчинников<sup>3</sup>,  
А. В. Сабуть<sup>4</sup>, С. С. Секержицкий<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>2</sup>ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>3</sup>д-р техн. наук, доц., зам. декана по научной работе

факультета инновационных технологий машиностроения

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической физики и теплотехники

Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>5</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: Sekerzhitsky@rambler.ru

### **ВЛИЯНИЕ ВЫБОРА ЯЧЕЙКИ В КРИСТАЛЛЕ НА ЯЧЕЙКУ ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ**

*Три любых некопланарных вектора решетки кристалла, соединяющих соседние гомологичные точки, формируют ячейку решетки с базисом  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . В любой решетке можно построить различные ячейки, в которых может находиться одна гомологичная точка (P-ячейка), две гомологичные точки (I), (C(AB)-ячейка), четыре гомологичные точки (F-ячейка) и даже восемь гомологичных точек (алмазоподобная ячейка). Каждой ячейке кристаллической решетки сопоставляется решетка в обратном пространстве. Ячейка обратной решетки связана с ячейкой прямой решетки. Проанализирован метод перехода между различными ячейками прямого и обратного пространства. Показано, что наиболее полное описание обратной решетки следует при выборе P-ячейки, во всех остальных случаях в обратной решетке появляются узлы с нулевым «весом», которые на самом деле не имеют смысла.*

#### **Введение**

Главным признаком кристаллических объектов является их решеточное строение. Это означает следующее: в кристалле, во-первых, можно выделить структурную единицу, которая распределена по всему объему кристалла. Это может быть атом, молекула, химический радикал. Если два любых таких объекта поменять местами, то кристалл не изменит ни одного из своих свойств. Такие «частицы» называют гомологичными. Во-вторых, если любую из этих точек принять за начальную и провести через нее три любые некопланарные прямые, а затем найти расстояние от начала координат до ближайшей гомологичной точки по каждому из направлений  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , то все точки с координатами  $t\vec{a}, n\vec{b}, p\vec{c}$  при любых целых  $t, n, p$  гомологичны. На этих векторах строится параллелепипед, который является своеобразным «атомом», т. е. наименьшей, неделимой частью кристаллического объекта.

Решетка определяется кристаллом, а этот параллелепипед, называемый ячейкой, зависит от исследователя. Поэтому ячейки могут включать не только гомологичные точки в ее вершинах, но и в объеме ячейки. Эти ячейки имеют название ячейки Бравэ, и часто название ячейки переносят на всю решетку, что неправильно. Ячейки могут быть разными, но их трансляции должны воспроизводить всю решетку.

Целью работы являлось доказательство отсутствия узлов обратной решетки для непримитивных ячеек Бравэ с индексами, запрещенными правилами погасания.

Объект исследования – кристаллографические координаты узлов обратной решетки в зависимости от выбора ячейки кристаллов.

Решаемые задачи:

- а) показать, что выбор ячейки кристалла влияет только на кристаллографические координаты узлов обратной решетки;
- б) показать, что взаимоконфигурация узлов обратной решетки не зависит от выбора ячейки кристалла;
- в) проанализировать метод перехода между координатами узлов в прямой (кристаллической) и обратной решетках, в зависимости от выбора ячейки в пространстве кристалла.

### Ячейки кристаллической и обратной решеток

Рассмотрим произвольно выбранную ячейку в пространстве кристалла. Выберем в кристалле плоскость, проходящую через начало координат. Т. к. кристаллическая решетка обладает трансляционной симметрией, то такая же плоскость, параллельная исходной, будет проходить через другие вершины ячейки. Между этими плоскостями могут быть гомологичные им плоскости. Расстояние между ними обозначается  $d$  (межплоскостное расстояние). Эти плоскости отсекают от ребер  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  отрезки  $\frac{a}{h}, \frac{b}{k}, \frac{c}{l}$  [1].

Рассматриваются ближайшие к началу координат плоскости из «стопы» гомологичных плоскостей. Ячейка кристалла в общем случае косоугольная, т. е. наряду с тремя линейными параметрами имеется три угловых  $\alpha, \beta, \gamma$ , обозначение которых по международному стандарту приведено на рисунке 1.

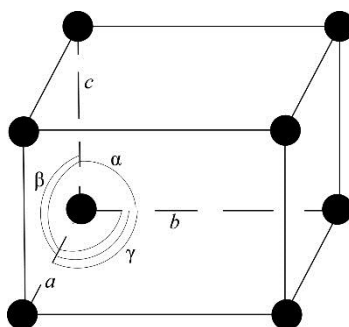


Рисунок 1. – Ячейка решетки кристалла

Межплоскостное расстояние  $d$  связано с параметрами ячейки  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$  или  $(a_j, \alpha_j)_{j=1,2,3}$  условием:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\frac{h}{a} \begin{vmatrix} h/a & \cos \gamma & \cos \beta \\ k/b & 1 & \cos \alpha \\ l/c & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} + \frac{k}{b} \begin{vmatrix} 1 & h/a & \cos \beta \\ \cos \gamma & k/b & \cos \alpha \\ \cos \beta & l/c & 1 \end{vmatrix} + \frac{l}{c} \begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & h/a \\ \cos \gamma & 1 & k/b \\ \cos \beta & \cos \alpha & l/c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}}, \quad (1)$$

т. е.  $d = f(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h, k, l)$ . Условие 1 называется квадратичной формулой [2]. Межплоскостное расстояние  $d$  определяется экспериментально рентгеновским дифрактометрическим методом:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения,  $\theta$  – угол, равный  $\theta = \frac{\varphi}{2}$ , где  $\varphi$  – угол между направлением падающего луча и отраженного от плоскости  $(hkl)$ .

Если при описании решетки кристалла взяты две различные ячейки, то один и тот же рентгеновский рефлекс будет описываться разными наборами  $(a_j, \alpha_j, h, k, l)$ , но значения  $d$  будут одинаковыми, т. к. эта величина определяется кристаллом, а не выбранной ячейкой.

В кристаллографии (и в кристаллофизике) используются две координатные системы [3]. Первая – декартовая система, которая называется кристаллофизической  $(K\Phi)$ , вторая – кристаллографической  $(K\Gamma)$ . У кристаллографической оси координат лежат на векторах  $\vec{a}_j$ , причем за единицу измерения вдоль каждой оси принят соответствующий параметр. Переход от  $(K\Gamma)$ -координат к  $(K\Phi)$ -системе осуществляется по формуле:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Phi} = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Gamma} = |M| \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Gamma}, \quad (3)$$

где  $|M|$  – метрический тензор.

Если  $a$  совпадает с осью  $X$   $(K\Phi)$ -системы,  $b$  – лежит в плоскости  $(XY)_{K\Phi}$ , то метрический тензор примет вид:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Phi} = \begin{pmatrix} a & b \cos \gamma & c \cos \beta \\ 0 & b \sin \gamma & c \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \\ 0 & 0 & \frac{cr}{\sin \gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Gamma} = |M| \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Gamma}, \quad (4)$$

где  $r = (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$ .

Если имеется тензор  $M^*$  такой, что  $M^* \cdot M = M \cdot M^* = I$ , где  $I$  – единичная матрица, то  $M^* = M^{-1}$  является обратным тензором для  $M$  [2]. Очевидно, что:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Gamma} = M^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{K\Phi}. \quad (5)$$

Для метрического тензора (4) обратный метрический тензор имеет вид:

$$M^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{\text{ctg } \gamma}{a} & \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}{ar \sin \gamma} \\ 0 & \frac{1}{b \sin \gamma} & \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{br \sin \gamma} \\ 0 & 0 & \frac{\sin \gamma}{cr} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

тензор  $M^* = M^{-1}$  можно записать в форме:

$$M^* = \begin{pmatrix} \frac{a^* r^*}{\sin \alpha^*} & \frac{a^* (\cos \gamma^* - \cos \alpha^* \cos \beta^*)}{\sin \alpha^*} & a^* \cos \beta^* \\ 0 & b^* \sin \alpha^* & b^* \cos \alpha^* \\ 0 & 0 & c^* \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $r^* = (1 - \cos^2 \alpha^* - \cos^2 \beta^* - \cos^2 \gamma^* + 2 \cos \alpha^* \cos \beta^* \cos \gamma^*)^{\frac{1}{2}}$ .

Если матрицу (6) записать в транспонированном виде, то видно сходство  $|M^*|^t$  с матрицей  $M$  (см. (3)). Параметры  $(a^*, b^*, c^*, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$  являются параметрами ячейки так называемого обратного пространства, в котором линейные параметры ячейки имеют размерность обратной длины.

Параметры  $\vec{a}_j^*$  и  $\vec{a}_k$  связаны соотношением  $(\vec{a}_j^* \cdot \vec{a}_k) = \delta_{jk}$ , где «дельта»-функция имеет значения:  $\delta_{jk} = 1$  при  $j = k$  и  $\delta_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ . Связь между численными значениями параметров ячеек кристаллической (индекс (0)) и обратной (индекс (\*)) решеток имеет вид:

$$\cos \alpha_j^{0(*)} = \frac{\cos \alpha_{j+1}^{*(0)} \cdot \cos \alpha_{j+2}^{*(0)} - \cos \alpha_j^{*(0)}}{\sin \alpha_{j+1}^{*(0)} \cdot \sin \alpha_{j+2}^{*(0)}}, \quad (8)$$

а также:

$$\sin \alpha_j^{0(*)} = \frac{r^{*(0)}}{\sin \alpha_{j+1}^{*(0)} \cdot \sin \alpha_{j+2}^{*(0)}}. \quad (9)$$

Для линейных параметров связь следующая:

$$\alpha_j^{0(*)} = \frac{\alpha_{j+1}^{*(0)} \cdot \alpha_{j+2}^{*(0)} \cdot \sin \alpha_j^{*(0)}}{V^{*(0)}}, \quad (10)$$

где  $V^0, V^*$  – объемы ячеек кристаллической (прямой (0)) и (обратной (\*)) решеток и численно равны детерминантам матриц (3) и (6) соответственно. Следовательно, решетка, обратная обратной, является решеткой кристалла [4].

Координаты узлов обратной решетки в кристаллографическом базисе – это три целых числа  $(hkl)$ , соответствующих индексам плоскости, которая отображается этим

узлом. Радиус-вектор узла обратной решетки  $\vec{r}^* \parallel d(hkl)$ , при этом  $(\vec{r}^*(hkl) \cdot \vec{d}(hkl)) = 1$ . Если выбраны вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  в пространстве кристалла (их называют базисом ячейки), то базис ячейки обратной решетки не может быть произвольным. Он обязательно соответствует условиям (8–10).

### Переходы между базисами в пределах одной решетки

Рассмотрим кристаллическую решетку, в которой построены две ячейки с базисами  $(\vec{a}_j)_{j=1,2,3}$  и  $(\vec{a}_k)_{k=1,2,3}$ . В одном из этих базисов возьмем точку в ячейке с известными кристаллографическими координатами  $(xyz)_1 = (xyz)_{1j=1,2,3}$ . Для определения координаты этой точки в базисе второй ячейки необходимо решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{2KG} = M_2^{-1} M_1 \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{1KG} . \quad (11)$$

Если в качестве точки взят узел ячейки (1), то после преобразования по формуле (8) узел преобразуется сам в себя, но его кристаллографические координаты, т. е. индексы, изменятся. Следовательно, индексы узлов обратной решетки не являются фиксированными параметрами, но зависят от базиса ячейки. Для изучения индексов узлов обратной решетки в зависимости от базиса выберем гранецентрированную ячейку ромбической сингонии. Ячейка кристалла выбирается с учетом условий:

- а) точечная симметрия ячейки должна соответствовать точечной симметрии макро- (моно-) кристалла;
- б) число прямых углов  $(\alpha, \beta, \gamma)$  должно быть наибольшим;
- в) полная поверхность должна быть наименьшей.

Очевидно, что эти требования противоречивы, например, гексагональная сингония в качестве обязательного точечного преобразования имеет повороты вокруг оси  $b$  или  $\bar{b}$ . Но построить параллелепипед с такой точечной симметрией невозможно. Выполнение условия (2) противоречит требованиям условия (3), т. к. приводит к появлению ячеек Бравэ  $F, I, G$  ( $AB$ ) типов. Наиболее простая ячейка – это ячейка  $P$ -типа, но число неизвестных параметров увеличивается от двух (ромбическая ячейка) в общем случае до шести. Следовательно, обратная решетка – это набор точек (узлов), кристаллографические координаты которых в любом базисе ячейки кристалла являются целыми числами. «Вес» узла, определяемый структурной амплитудой (экспериментальная величина), является параметром обратной решетки. Индексы узлов, а также тип ячейки Бравэ зависит от базиса выбранной ячейки кристалла. Объективным параметром узла обратной решетки является его значение в единицах СИ, т. к.  $r^* = d^{-1}$ .

Межплоскостное расстояние определяется по формуле (2) и абсолютно не зависит ни от  $(hkl)$ , ни от типа ячейки Бравэ кристалла. Если перечисленные требования к выбору ячейки кристалла дополнить двумя условиями (объем ячейки должен быть наименьшим, как и число гомологичных точек в ячейке), то в этом случае вместо ячейки  $F$ -типа ромбического кристалла можно выбрать  $I$ -ячейку моноклинного типа, которая в традиционной кристаллографии отсутствует, но с учетом дополнительных условий допустима. Проанализировано изменение индексов узлов обратной решетки ромбического кристалла ячейки  $F$ -типа при переходе к ячейке  $I$ -типа моноклинной сингонии.

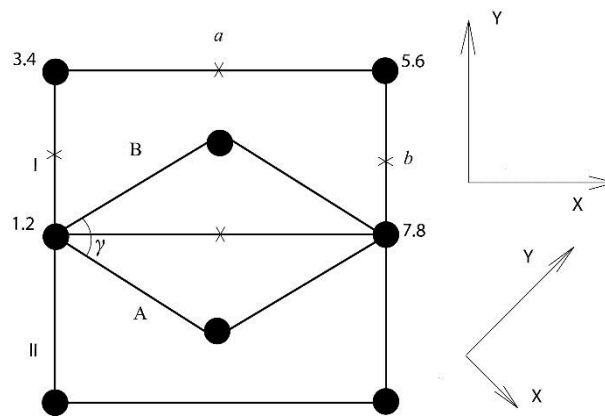


**Изменения индексов узлов кристаллической и обратной решеток при переходе от ромбической  $F$ -ячейки к  $I$ -ячейке моноклинного типа**

Проекция двух ячеек ромбической сингонии на плоскость ( $XY$ ) приведена на рисунке 2. Т. к. направление базисных векторов ромбической установки совпадает с направлениями кристаллографической системы, то метрический тензор  $P$ -ячейки имеет вид:

$$M_p = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}. \quad (12)$$

На рисунке 2 приведены направления координатных осей для ромбической и моноклинной установок.



(•) – узлы на  $[00W]$ , четные –  $Z = 0$ ;  
нечетные –  $Z = 1$ ; X – узлы  $Z = 0,5$ .

**Рисунок 2. – Проекция ячеек I, II на плоскость (XY)**

Параметры «моноклинной» ячейки:

$$\begin{cases} A = B = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, & C = c \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, & \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, & \sin \gamma = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \end{cases}. \quad (13)$$

Прямой и обратный метрический тензоры моноклинной ячейки имеют с учетом (13) вид [2]:

$$M_M = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Обратный метрический тензор  $M_P^{-1}$  равен:

$$M_P^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Следовательно, формула (11) примет вид:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{m,KГ} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{p,KГ}, \quad (16)$$

т. е. преобразование координат узлов решетки имеет вид:

$$(100)_{p,KГ} \rightarrow (110)_{m,KГ}; \left(\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}\right)_{p,KГ} \rightarrow \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)_{m,KГ}; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0\right)_{p,KГ} \rightarrow (100)_{m,KГ}.$$

Условие (16) выполняется для любых переходов от  $F$ -ячейки ромбической сингонии к  $I$ -ячейке моноклинной сингонии. Очевидно, что эта ячейка, во-первых, имеет меньший объем равный  $0,5abc$ , во-вторых, в этой ячейке не четыре, а две гомологичные точки, в-третьих, трансляция  $\hat{T}_m = m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C}$  воспроизводит всю решетку кристалла. Число параметров в  $P$ -ячейке и в  $M$ -ячейке одинаковое:  $a, b, c$  и  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно.

Очевидно, что обратная решетка не изменяется, какие бы ячейки в кристалле ни выбирались. Но индексы узлов зависят от выбора ячейки.

Пусть индексы узлов обратной решетки имеют значения  $(hkl)$  – для ромбической ячейки и  $(HKL)$  – моноклинной. Из формулы (1) следует:

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} = \frac{1}{\sin^2 \gamma} \frac{H}{A} \left( \frac{H}{A} - \frac{K}{A} \cos \gamma \right) + \frac{K}{A} \left( \frac{K}{A} - H \cos \gamma \right) + \frac{L^2}{C^2} \sin^2 \gamma, \quad (17)$$

поскольку  $A = B, C = c$ , то  $L = l$ .

$$\text{Следовательно, } \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = \frac{1}{A^2 \sin^2 \gamma} (H^2 + K^2 - 2HK \cos \gamma).$$

С учетом (16) получим:

$$\begin{aligned}
 b^2h^2 + a^2k^2 &= (H^2 + K^2)(a^2 + b^2) - 2HK(a^2 - b^2) = \\
 &= b^2(H^2 + K^2 + 2HK) + a^2(H^2 + K^2 - 2HK) = \quad . \quad (18) \\
 &= b^2(H + K)^2 + a^2(H - K)^2 .
 \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{cases} h = H + K \\ k = H - K \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} H = 0,5(h + k) \\ K = 0,5(h - k) \end{cases} \quad (20)$$

Центрированные грани и центрированный объем влияют на значения индексов. В первом случае индексы должны иметь одинаковую четность, во втором сумма индексов должна быть четной.

В таблице 1 приведены значения  $(hkl)$  и соответствующие им значения  $(HKL)$ .

Таблица 1. – Индексы одних и тех же узлов обратной решетки в зависимости от выбора ячейки кристалла:  $(hkl)$  – ромбическая ячейка;  $(HKL)$  – моноклинная ячейка

$hkl$	111	200	002	220	202	311	113	222
$HKL$	101	100	002	200	112	211	103	202
$hkl$	400	004	331	312	420	402	422	224
$HKL$	220	004	301	212	310	222	312	204

Индексы узлов обратной решетки, как и индексы плоскости, не являются однозначными параметрами обратной решетки и кристаллографической плоскости, т. к. зависят от исследователя, выбирающего ячейку кристалла. Свойства кристалла определяются его структурой и симметрией как прямой, так и обратной решеток. При этом учитывается, что определяющей является ячейка кристалла.

Однако можно осуществить и обратный переход, т. е., зная расположение узлов в обратной решетке, можно определять  $d(hkl)$  из эксперимента при монокристаллических исследованиях, т. к. рентгенограмма отражает сечение обратной решетки (и обратного пространства в общем случае) сферой отражения (Эвальда) [5]. От гранецентрированной ячейки можно перейти не только к ячейке  $I$ -типа, но и к примитивной ячейке, которую можно выбрать для любых структур.

### Изменение индексов узлов обратной решетки при переходе от гранецентрированной к примитивной ячейке

На рисунке 3 приведена схема выбора примитивной ячейки в решетке кристалла, у которой была выбрана гранецентрированная ячейка ромбической сингонии с параметрами  $a, b, c$ .

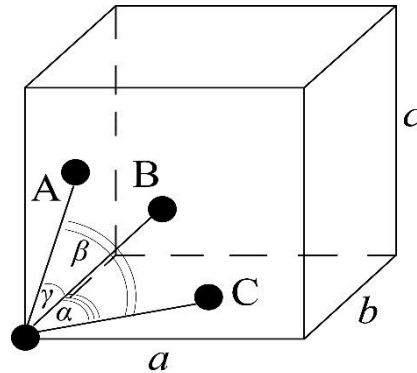


Рисунок 3. – Примитивная ячейка, выделенная в структуре  $F$ -ячейки ромбического кристалла

Координаты вершин выбранной ячейки  $P$ -типа в репере  $ГЦК$ -ячейки имеют значения  $000$ ,  $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$ ,  $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$ ,  $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ ,  $111$ ,  $\frac{1}{2}\frac{1}{2}1$ ,  $\frac{1}{2}1\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ . В этой  $P$ -ячейке оператор трансляции, определяющий всю решетку, имеет вид:

$$\hat{T} \Leftrightarrow m\vec{A} + n\vec{B} + p\vec{C}, \quad (21)$$

где  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  – базисные для  $P$ -ячейки векторы.

Если соединить концы этих векторов попарно, то строятся три треугольника с углами ячейки равной:  $U_\alpha = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{2}$ ,  $V_\beta = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{2}$ ,  $W_\gamma = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$ . Линейные размеры базисных векторов известны:  $A = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$ ,  $B = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$ ,  $C = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ .

Косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются по теореме косинусов:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a^2}{\left[ (a^2 + c^2)(a^2 + b^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \beta = \frac{b^2}{\left[ (b^2 + c^2)(a^2 + b^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \gamma = \frac{c^2}{\left[ (a^2 + c^2)(c^2 + b^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (22)$$

Т. е. для этой  $P$ -ячейки можно записать квадратичную формулу (1) и сравнить значения  $d$ , определяемые по индексам  $hkl$  ромбической и  $HKL$  примитивной ячеек.

Формулы расчета метрического тензора  $P$ -ячейки, как и ее квадратичной формулы, легко записываются, но они имеют достаточно громоздкий вид.

Для иллюстрации рассмотрим  $P$ -ячейку:  $A = B = C$ ,  $\alpha = \beta = \gamma$ . В этом случае [1] примет вид:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\frac{H}{A} \begin{vmatrix} H/A & 1/2 & 1/2 \\ K/A & 1 & 1/2 \\ L/A & 1/2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{K}{A} \begin{vmatrix} 1 & H/A & 1/2 \\ 1/2 & K/A & 1/2 \\ 1/2 & L/A & 1 \end{vmatrix} + \frac{L}{A} \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & H/A \\ 1/2 & 1 & K/A \\ 1/2 & 1/2 & L/A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix}}$$

т. е.:

$$h^2 + k^2 + l^2 = 3(H^2 + K^2 + L^2) - 2(HK + KL + LH). \tag{23}$$

В ячейке Бравэ  $P$ -типа базисом является значение  $[000]$ , т. е. внутри ячейки нет гомологичных точек, связанных трансляцией. Никаких условий, ограничивающих значения  $hkl$ , в таких ячейках нет.

В таблице 2 приведены значения  $HKL$  в ряду этих индексов без пропусков и индексы соответствующих им узлов в  $F$ -ячейке.

Таблица 2. – Индексы узлов обратной решетки в зависимости от выбора ячейки кристалла:  $(hkl)$  – ромбическая ячейка;  $(HKL)$  – примитивная ячейка

$HKL$	100	110	111	200	210	211	220	221
$hkl$	3	4	3	12	11	8	16	11
	111	200	111	222	311	220	400	311
$HKL$	311	222	321	322	400	410	330	331
$hkl$	19	12	20	19	48	43	36	27
	331	222	420	331	444	533	600	511

Легко убедиться, что всем индексам узлов в  $P$ -ячейке соответствуют индексы узлов в ячейке  $F$ -типа, т. е.  $hkl$  имеют одинаковую четность. В таблице 1 было показано, что в  $I$ -ячейке, построенной на базе  $F$ -ячейки, все узлы с одинаковой четностью соответствуют узлам с четной суммой индексов. В таблице 2 для значений  $HKL$  100 и 111 в  $F$ -ячейке соответствуют узлы с индексами  $h^2 + k^2 + l^2 = 3$ . Узлу  $HKL = (100)$  соответствуют  $hkl = \pm[(1,1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)]$ , а узлу  $HKL = (111)$  соответствуют узлы  $hkl = \pm(111)$ . Выбор ячейки Бравэ зависит от исследователя. Решетка кристалла, как и обратная решетка не могут описываться каким-либо символом Бравэ. Тип Бравэ относится только к ячейке, которая может не совпадать с общепринятыми. Например, в ячейке  $ГЦК$  ( $F$ -типа) можно выбрать ячейку  $I$ -типа в моноклинной сингонии при условии  $a = b$ . Очевидно, что индексы узлов обратной решетки зависят от выбора ячейки Бравэ, но при любом выборе ячейки абсолютные значения модулей радиусов-векторов узлов должны быть инвариантными  $|\vec{r}^*| = \frac{1}{d}$ , как и то, что  $\vec{r}^* \parallel \vec{d}$ . Отсюда следует, что узел  $\{100\}$  не является узлом с нулевым весом, он просто отсутствует в обратной решетке. Геометрическое положение узла  $\{100\}$  может быть определено на основе

базиса ячейки Бравэ. Однако «вес» этого узла может быть нулевым, т. е. этот узел инвариантен любой точке обратного пространства, не совпадающей с узлами решетки. Если этот узел при любом выборе ячейки Бравэ сохраняет свое геометрическое положение при нулевом «весе», то этому узлу следует придать смысл виртуального узла. Если это условие не выполняется, то для ячеек Бравэ непримитивного типа в обратном пространстве необходимо выбирать суперъячейку с параметрами, кратными  $\vec{a}_j^*$  [6]. Параметр  $(\vec{a}_j^* \cdot \vec{a}_k) = \delta_{jk}$  определяет лишь связь параметров для примитивной ячейки. Если ячейка не учитывается, то:

$$(\vec{a}_j^* \cdot \vec{a}_k)_n = \vec{a}_s^*, \quad (24)$$

где  $n$  – целое число. Для ячеек  $F$  - и  $I$  -типов  $n = 2$ . Для алмазоподобной ячейки –  $n = 4$ . Для базоцентрированной  $n = 2$  только для параметров центрированной грани. Для третьего параметра  $n = 1$ .

### Заключение

На примере трехслойной плотнейшей упаковки, для которой общепринятой является  $ГЦК$ -ячейка Бравэ, показано, что в решетках такого типа можно выбрать ячейки с точечными группами  $4/m\bar{3}m$  и  $3m$ .

Для всех ячеек обратная решетка имеет один и тот же вид, но координаты узлов, т. е. кристаллографические индексы плоскостей, отображаемых этими узлами, различные. Следовательно, тип ячейки Бравэ применим исключительно к выбранной исследователем ячейке. Решетка – как обратная, так и прямая – это свойство кристалла и не относится к какой-либо схеме Бравэ.

Кроме этого, рефлекс, запрещенный, т. е. подчиняющийся правилу погасания, в одной из выбранных схем ячейки Бравэ, запрещен и в любой другой схеме, например, рефлекс с индексами  $\{100\}$  в  $F$  - и  $I$  -ячейках отсутствует. Его нет и в случае ячейки  $P$  -типа. Но в таких ячейках все индексы разрешены, узел с  $|r^*| = \frac{1}{d}(100)$ .

Следовательно, такой узел, запрещенный при каком-либо выборе ячейки, равнозначен любой точке вне узлов решетки. Таким образом, необходимо от параметра обратной ячейки  $(\vec{a}_j^* \cdot \vec{a}_k) = \delta_{jk}$  переходить к параметру суперъячейки  $\vec{a}_s^* = n(\vec{a}^* \cdot \vec{a})$ .

Для  $F$  и  $I$ - типов ячеек Бравэ  $ГЦК$ -типа  $n = 2$ . Это следует учитывать, например, при анализе дисперсионных соотношений, при использовании теоремы Блоха и условий Борна – Кармана как следствия этой теоремы и др.

Результаты исследований могут быть использованы в теории и практике структурного анализа.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаскольская, М. П. Кристаллография : учеб. пособие для вузов / М. П. Шаскольская. – 2-е изд., перераб. и доп. – М., : Высш. шк., 1984. – 376 с.
2. Лиопо, В. А. Матричная кристаллография / В. А. Лиопо. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 1998. – 78 с.
3. Бокий, Г. Б. Кристаллохимия : учеб. пособие для вузов / Г. Б. Бокий. – М. : Наука, 1971. – 400 с.

4. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография / В. Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 384 с.
5. Ladd, M. Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.
6. Суперъячейка обратной решетки кристаллов / В. А. Лиопо [и др.] // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2017. – № 2. – С. 47–57.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.2019

***Liopo V. A., Liaushuk I. A., Auchynnikau Y. V., Sabutz A. V., Sekerzhitski S. S. Influence of Cell Choice in Crystal on Reciprocal Lattice Cell***

*Three any non-coplanar lattice vectors of the crystal connecting adjacent homologous points form a lattice cell with the basis  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . In any lattice it is possible to construct various cells in which there can be one homologous point (P-cell), two homologous points (I), (C(AB))-cells, four homologous points (F-cell) and even eight homologous points (diamond-like cell). Each cell of the crystal lattice is associated with a lattice in the reciprocal space. The cell of the reciprocal lattice is connected to the cell of the direct lattice. The transition method between various cells of direct and reciprocal space is analysed. It is shown that the most complete description of the reciprocal lattice follows when choosing P-cell, in all other cases in the reciprocal lattice there are knots with zero «weight» which actually do not make sense.*

УДК 535.4

**В. Н. Навныко<sup>1</sup>, М. А. Аманова<sup>2</sup>, В. В. Шепелевич<sup>3</sup>, В. В. Юдицкий<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической физики и прикладной информатики  
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина  
<sup>2</sup>аспирант каф. теоретической физики и прикладной информатики

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина  
<sup>3</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и прикладной информатики  
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

<sup>4</sup>инженер лаборатории автоматизации электротехнического оборудования  
РУП «БелТЭИ» Министерства энергетики Республики Беларусь  
e-mail: [1valnav@inbox.ru](mailto:1valnav@inbox.ru)

## ИЗМЕНЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ОБРАТНОГО ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КРИСТАЛЛА $Bi_{12}TiO_{20}$ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

*Изучено изменение компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости кубических фоторефрактивных кристаллов класса симметрии 23 под действием электрического поля пространственного заряда объемной голографической решетки. При расчетах принимались во внимание первичный и вторичный электрооптические эффекты. Построены поверхности нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла  $Bi_{12}TiO_{20}$  для типичных ориентаций вектора напряженности электрического поля пространственного заряда в кристаллографической системе координат, используемых при записи голографических решеток. Получены сечения поверхностей и определены кристаллографические направления, вдоль которых достигаются экстремальные значения нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости. Показано, что при фиксированном направлении вектора напряженности электрического поля пространственного заряда вторичный электрооптический эффект может обуславливать как увеличение, так и уменьшение нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости.*

### Введение

Экспериментальное наблюдение изменения показателя преломления в кристаллах  $LiNbO_3$  и  $LiTaO_3$  под действием светового излучения впервые описано в [1]. Первоначально фотоиндуцированное изменение показателя преломления рассматривалось как ухудшение оптических характеристик кристалла. После изучения физического механизма фотоиндуцированного изменения показателя преломления в более поздних работах [2–4] этот феномен стал называться фоторефрактивным эффектом и рассматриваться в качестве одного из механизмов записи объемных голограмм в кристаллах. Теория фоторефрактивного эффекта и феноменологическая модель формирования электрического поля пространственного заряда голографической решетки (далее – электрическое поле), основанные на предположении о фотоиндуцированном перераспределении носителей заряда между дефектными центрами внутри кристалла, в наиболее подробном варианте представлены в [5; 6].

В работе [7] впервые было высказано предположение о существовании дополнительного механизма фоторефракции. Суть его заключается в появлении механических деформаций кристалла, которые индуцируются посредством обратного пьезоэлектрического эффекта под действием электрического поля. Возникающие деформации за счет фотоупругого эффекта обуславливают дополнительную модуляцию обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла. Совместное действие обратного пьезоэлектрического эффекта и фотоупругости далее будем называть вторичным электрооптическим эффектом.



Влияние вторичного электрооптического эффекта на свойства голограмм в кубических фоторефрактивных кристаллах впервые рассмотрено в работе [8]. Теоретическая модель дифракции световых волн на фотоиндуцированных фазовых голограммах в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах с одновременным учетом оптической активности, первичного и вторичного электрооптических эффектов предложена в работах [9–10].

В [11] приведены аналитические выражения для нахождения изменения компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости (далее – обратный тензор) для фоторефрактивных кристаллов класса симметрии 23 с учетом первичного и вторичного электрооптических эффектов. Исследованы зависимости изменения компонентов обратного тензора от направления вектора голографической решетки.

В [12] показано, что при учете вторичного электрооптического эффекта полученные теоретически и экспериментально графики зависимости коэффициента усиления при двухволновом взаимодействии на пропускающей голограмме в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  среза (110) от ориентационного угла, образованного вектором голографической решетки и направлением [001], совпадают. В работах [13–15] подтверждена справедливость описания вторичного электрооптического эффекта в фоторефрактивных кристаллах класса симметрии 23.

Предложенные в [11] выражения применяются для нахождения постоянных связи в уравнениях связанных волн при расчете выходных характеристик голографических решеток, сформированных в кубических фоторефрактивных кристаллах. Например, в [16] теоретически и экспериментально изучено влияние оптической активности и пьезоэлектрического эффекта на двухволновое взаимодействие на пропускающей голографической решетке в кубическом фоторефрактивном кристалле среза (110). Получены выражения для определения оптимальных азимутов поляризации предметной и опорной световых волн, при которых достигается наибольший уровень энергетического обмена между этими волнами. Закономерности двухволнового взаимодействия на пропускающей голографической решетке рассмотрены в [17]. Показано, что оптимизация энергетического обмена при встречном двухволновом взаимодействии должна производиться с учетом вклада вторичного электрооптического эффекта.

В [18] получены уравнения связанных волн, описывающие двухпучковое взаимодействие на отражательных голографических решетках в кубических фоторефрактивных кристаллах, и выполнен анализ анизотропии вкладов внутримодовых и межмодовых процессов. В [19] приведены выражения, которые могут быть использованы для нахождения напряженности электрического поля предметной волны при встречном двухволновом взаимодействии в кубическом фоторефрактивном пьезокристалле. В [20] изучено влияние вторичного электрооптического эффекта на энергетический обмен при встречном двухволновом взаимодействии на отражательной решетке. Определены направления вектора отражательной голографической решетки в кристаллографической системе координат, для которых достигается максимальная относительная интенсивность предметной волны.

Аналитический обзор современного состояния исследований в научных публикациях по голографии фоторефрактивных пьезокристаллов представлен в [21].

В настоящей работе произведен анализ закономерностей изменения компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (ВТО) под действием электрического поля  $\vec{E}$ . В работе рассмотрены типичные для голографических экспериментов ориентации вектора  $\vec{E}$  в кристаллографической системе координат и определены максимальные и минимальные значения нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости. Изучены закономерности измене-

ния компонентов обратного тензора диэлектрической проницаемости под действием вторичного электрооптического эффекта.

### Теоретическая модель

Для решения системы уравнений связанных волн (например, [16]) необходимо раскрыть тензорные свертки  $(\vec{e}_{R,S}\Delta\hat{\epsilon}\vec{e}_{S,R})$ , где  $\vec{e}_{R,S}$  – векторы, используемые для задания поляризации световых волн;  $\Delta\hat{\epsilon}$  – изменение тензора диэлектрической проницаемости, возникающее под действием электрического поля и соответствующее амплитуде голографической решетки в кристалле. Для нахождения изменения тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta\hat{\epsilon}$  используют равенство:

$$(\hat{\epsilon}_0 + \Delta\hat{\epsilon})(\hat{b}_0 + \Delta\hat{b}) = 1, \quad (1)$$

где  $\hat{\epsilon}_0$ ,  $\hat{b}_0$  – прямой и обратный тензоры диэлектрической проницаемости невозмущенного кристалла;  $\Delta\hat{b}$  – изменение обратного тензора. С учетом равенства  $\hat{\epsilon}\hat{b} = 1$  и в приближении малости слагаемого  $\Delta\hat{\epsilon}\Delta\hat{b}$  выражение (1) можно представить в виде:

$$\Delta\hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon}_0\Delta\hat{b}\hat{\epsilon}_0. \quad (2)$$

Фоторефрактивные кристаллы класса симметрии 23 являются оптически изотропными средами [22], для которых выражение (2) можно представить в виде:

$$\Delta\hat{\epsilon} = -n_0^4\Delta\hat{b}, \quad (3)$$

где  $n_0$  – показатель преломления невозмущенного кристалла.

Для задания  $\Delta\hat{b}$  используем выражения, впервые приведенные в [11]:

$$\Delta b_{mn} = b_{mn}E, \quad (4)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля.

В [11] были получены следующие выражения для  $b_{mn}$ :

$$\begin{aligned} b_{11} &= p_1n_1R_1 + p_2n_2R_2 + p_3n_3R_3, \quad b_{22} = p_1n_2R_2 + p_2n_3R_3 + p_3n_1R_1, \\ b_{33} &= p_1n_3R_3 + p_2n_1R_1 + p_3n_2R_2, \quad b_{12} = b_{21} = p_4(n_1R_2 + n_2R_1) + r_{41}n_3, \\ b_{13} &= b_{31} = p_4(n_1R_3 + n_3R_1) + r_{41}n_2, \quad b_{23} = b_{32} = p_4(n_2R_3 + n_3R_2) + r_{41}n_1, \\ R_1 &= \gamma_{11}Q_1 + \gamma_{12}Q_2 + \gamma_{13}Q_3, \quad R_2 = \gamma_{21}Q_1 + \gamma_{22}Q_2 + \gamma_{23}Q_3, \quad R_3 = \gamma_{31}Q_1 + \gamma_{32}Q_2 + \gamma_{33}Q_3, \\ \gamma_{11} &= (\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)/D, \quad \gamma_{22} = (\Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}^2)/D, \quad \gamma_{33} = (\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2)/D, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = (\Gamma_{13}\Gamma_{23} - \Gamma_{12}\Gamma_{33})/D, \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = (\Gamma_{12}\Gamma_{23} - \Gamma_{13}\Gamma_{22})/D, \\ \gamma_{23} &= \gamma_{32} = (\Gamma_{12}\Gamma_{13} - \Gamma_{11}\Gamma_{23})/D, \\ D &= \Gamma_{11}(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) - \Gamma_{22}\Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}\Gamma_{12}^2 + 2\Gamma_{12}\Gamma_{13}\Gamma_{23} \\ \Gamma_{11} &= c_1n_1^2 + c_3(n_2^2 + n_3^2), \quad \Gamma_{22} = c_1n_2^2 + c_3(n_1^2 + n_3^2), \quad \Gamma_{33} = c_1n_3^2 + c_3(n_1^2 + n_2^2), \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = n_1n_2(c_2 + c_3), \quad \Gamma_{13} = \Gamma_{31} = n_1n_3(c_2 + c_3), \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = n_2n_3(c_2 + c_3), \\ Q_1 &= 2e_{14}n_2n_3, \quad Q_2 = 2e_{14}n_1n_3, \quad Q_3 = 2e_{14}n_1n_2. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения для ненулевых компонентов тензоров линейного электрооптического ( $\hat{r}^S$ ), фотоупругого ( $\hat{p}^E$ ) и обратного пьезоэлектрического ( $\hat{e}$ ) эффектов, а также компонентов тензора упругости ( $\hat{c}^E$ ):  $r_{123}^S = r_{132}^S = r_{213}^S = r_{231}^S = r_{312}^S = r_{321}^S \equiv r_{41}$ ,  $e_{123} = e_{132} = e_{213} = e_{231} = e_{312} = e_{321} \equiv e_{14}$ ,  $c_{11}^E = c_{22}^E = c_{33}^E \equiv c_1$ ,  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E = c_{21}^E = c_{31}^E = c_{32}^E \equiv c_2$ ,  $c_{44}^E = c_{55}^E = c_{66}^E \equiv c_3$ ,  $p_{11}^E = p_{22}^E = p_{33}^E \equiv p_1$ ,  $p_{12}^E = p_{23}^E = p_{31}^E \equiv p_2$ ,  $p_{13}^E = p_{21}^E = p_{32}^E \equiv p_3$ ,  $p_{44}^E = p_{55}^E = p_{66}^E \equiv p_4$ .

Индекс  $S$  для тензора линейного электрооптического эффекта  $\hat{r}^S$  означает, что компонента  $r_{41}$  тензора линейного электрооптического эффекта измерялась для зажатого кристалла; компоненты тензоров упругости  $\hat{c}^E$  и фотоупругого эффекта  $\hat{p}^E$  измерялись при постоянном электрическом поле [23].

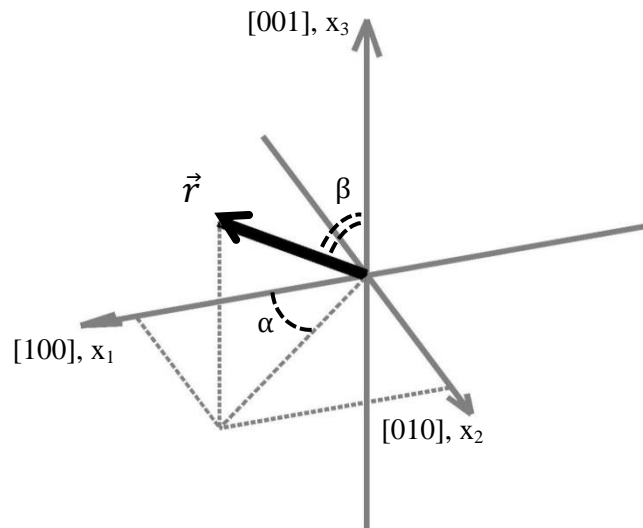
При численных расчетах рассматривался кристалл с параметрами ВТО, заимствованными из работы [24]: показатель преломления невозмущенного кристалла  $n_0 = 2,58$ ; коэффициенты упругости  $c_1 = 1,37 \times 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_2 = 2,8 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $c_3 = 2,6 \times 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>; электрооптический коэффициент  $r_{41} = -4,75 \times 10^{-12}$  м/В; коэффициенты фотоупругости  $p_1 = -0,173$ ,  $p_2 = 0,001$ ,  $p_3 = 0,002$ ,  $p_4 = 0,005$ ; пьезоэлектрический коэффициент  $e_{14} = 1,1$  К/м<sup>2</sup>. Напряженность электрического поля при расчетах принималась равной  $E = 0,6$  кВ/м.

Для характеристики изменения тензорного свойства в заданном направлении используем указательную поверхность нормальной составляющей обратного тензора, которая описывается уравнением [25; 26]:

$$\chi(\vec{r}) = \vec{r} \Delta \hat{b} \vec{r} = \Delta b_{mn} r_m r_n, \quad (5)$$

где  $\chi$  – нормальная составляющая обратного тензора (далее – нормальная составляющая) в направлении единичного вектора  $\vec{r}$  (рисунок 1);  $r_i$  – компоненты вектора  $\vec{r}$ . Нормальная составляющая  $\chi$  численно равна проекции вектора  $\Delta \hat{b} \vec{r}$  на направление, параллельное вектору  $\vec{r}$ .

В сферической системе вектор  $\vec{r}$  задается выражениями:  $r_1 = \cos\alpha \sin\beta$ ,  $r_2 = \sin\alpha \sin\beta$ ,  $r_3 = \cos\beta$ , где  $\alpha$  – угол между осью  $x_1$  и проекцией вектора  $\vec{r}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $x_3$ ,  $\beta$  – угол между осью  $x_3$  и вектором  $\vec{r}$ . Оси сферической системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  совпадают по направлению с осями кристаллографической системы координат:  $x_1 \parallel [100]$ ,  $x_2 \parallel [010]$ ,  $x_3 \parallel [001]$ .



**Рисунок 1. – Задание вектора напряженности электрического поля голографической решетки в кристаллографической системе координат**

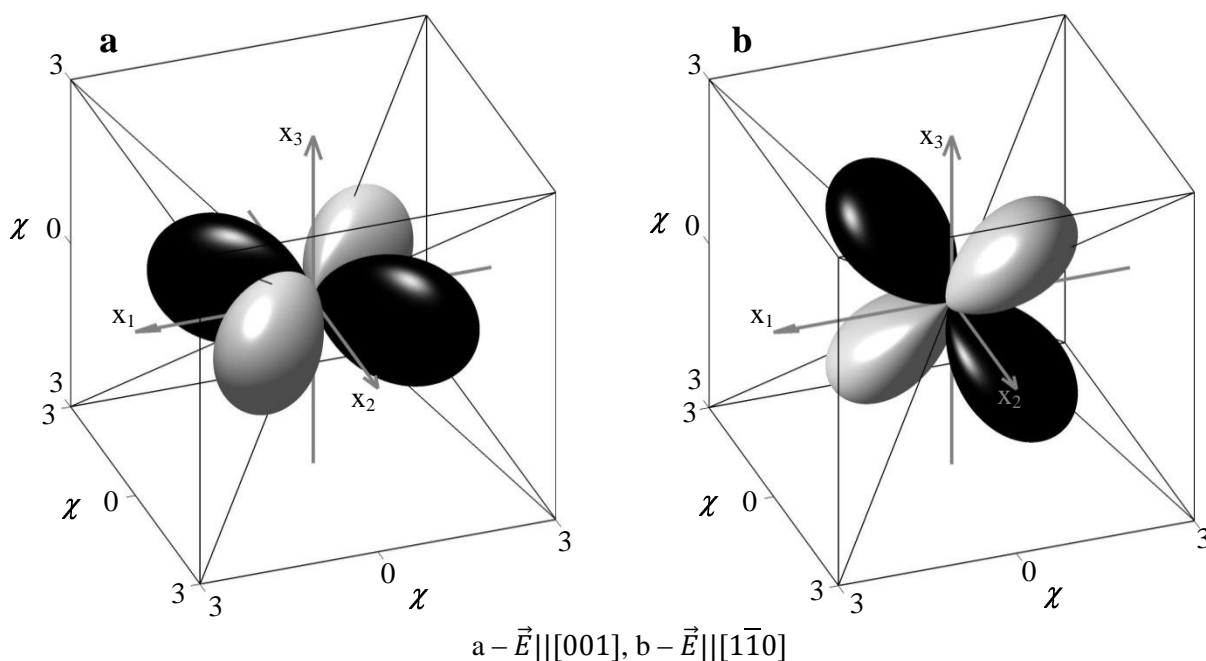
Методика построения указательной поверхности нормальной составляющей заключается в следующем. задается направление вектора  $\vec{E}$ , и на основании выражения (4) вычисляются компоненты обратного тензора  $\Delta b_{mn}$ . По всем возможным направлениям вектора  $\vec{r}$ , исходящим из начала сферической системы координат, откладываются отрезки, численно равные нормальной составляющей  $\chi$ . Концы этих отрезков в совокупности образуют указательную поверхность нормальной составляющей. Для некоторых

направлений вектора  $\vec{r}$  нормальные составляющие могут принимать отрицательные значения. В этом случае удобно окрашивать часть указательной поверхности в белый цвет, если нормальная составляющая имеет положительный знак, и в черный цвет, если нормальная составляющая  $\chi$  имеет отрицательное значение.

Как видно из (3), изменение компонентов тензора диэлектрической проницаемости для фоторефрактивных кристаллов класса симметрии 23 прямо пропорционально изменению компонентов обратного тензора. Отсюда следует, что для указательных поверхностей нормальной составляющей прямого и обратного тензоров диэлектрической проницаемости экстремальные направления, вдоль которых параметр  $\chi$  принимает максимальное или минимальное значение, совпадают.

### Полученные результаты и их обсуждение

На рисунке 2 представлены указательные поверхности нормальной составляющей, построенные для  $\vec{E} \parallel [001]$  (рисунок 2a) и  $\vec{E} \parallel [1\bar{1}0]$  (рисунок 2b).



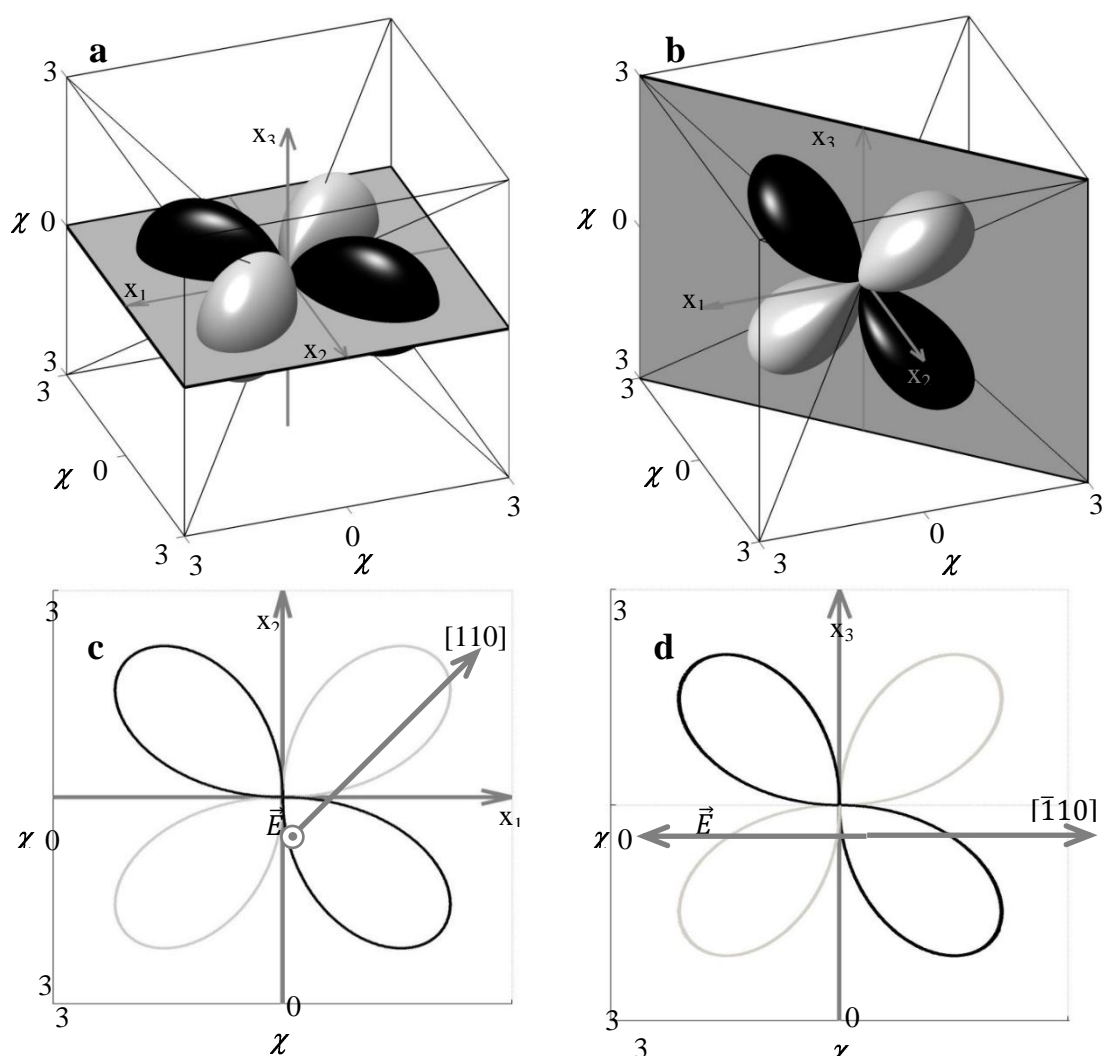
**Рисунок 2. – Указательные поверхности нормальной составляющей обратного тензора,  $\chi \times 10^{-7}$**

Как видно из рисунка 2, указательные поверхности имеют сложную форму и состоят из четырех одинаковых по величине и форме соприкасающихся яйцеобразных областей: двух белых и двух черных. Внешняя симметрия указательных поверхностей может быть описана группой  $mmm$  и соответствует тензорам, у которых в главной системе координат одна из диагональных компонент равна нулю, а две другие компоненты равны по модулю и имеют различные знаки [26]. При изменении направления вектора  $\vec{E}$  на противоположное направление указательная поверхность также будет изменять свой цвет на противоположный цвет.

Указательные поверхности отличаются пространственной ориентацией относительно вектора  $\vec{E}$ . При  $\vec{E} \parallel [001]$  (рисунок 2a) экстремальные направления указательной поверхности перпендикулярны вектору  $\vec{E}$ , и поверхность совмещается сама с собой при повороте на угол  $180^\circ$  относительно вектора  $\vec{E}$ .

При  $\vec{E} \parallel [1\bar{1}0]$  (рисунок 2b) экстремальные направления указательной поверхности лежат в одной плоскости с вектором  $\vec{E}$ , и поверхность не совмещается при повороте относительно вектора  $\vec{E}$ . Это обусловлено тем, что на рисунке 2a вектор  $\vec{E}$  совпадает по направлению с поворотной осью симметрии второго порядка ( $x_3$ ), а на рисунке 2b вектор  $\vec{E}$  направлен по биссектрисе между поворотными осями симметрии второго порядка.

Для количественного анализа приведенных на рисунке 2 указательных поверхностей рассмотрим их сечения. Для указательной поверхности, представленной на рисунке 2a, удобно выбрать секущую плоскость, перпендикулярную оси  $x_3$  и проходящую через начало координат. Секущая плоскость для указательной поверхности, представленной на рисунке 2b, перпендикулярна направлению  $[110]$  и проходит через начало координат. На рисунках 3a и 3b схематически отображено взаимное расположение секущих плоскостей и указательных поверхностей. На рисунках 3c и 3d изображены следы указательных поверхностей на плоскостях сечения.

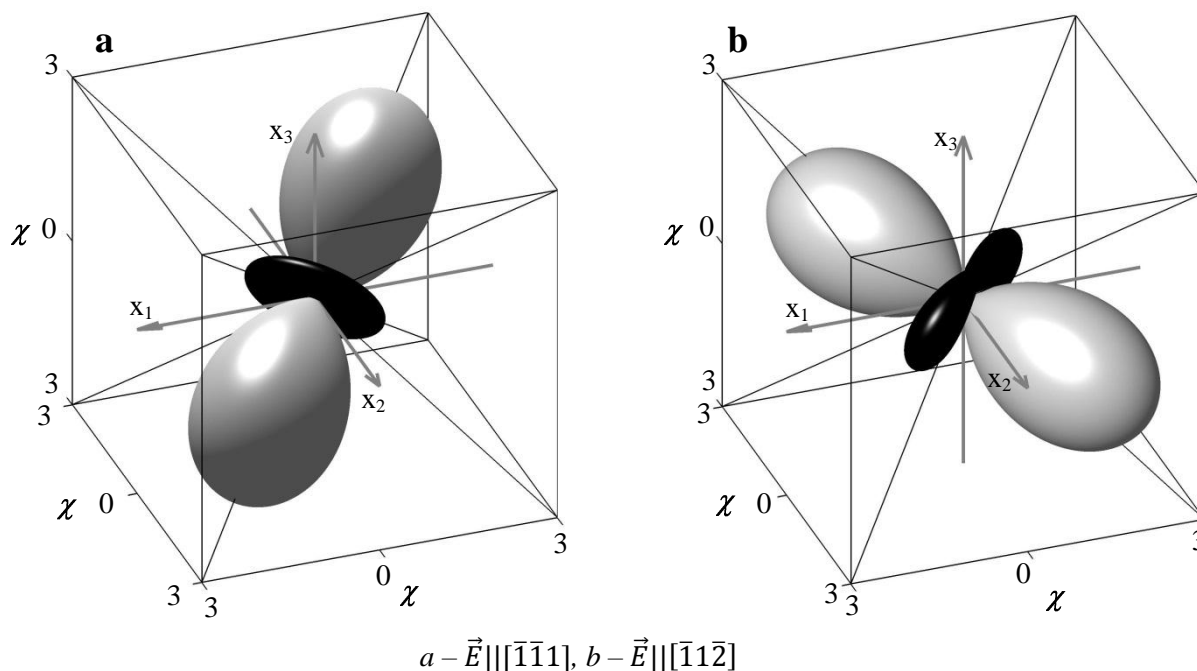


*a, b – взаимное расположение указательных поверхностей и секущих плоскостей;  
c, d – следы указательных поверхностей на плоскостях сечения*

**Рисунок 3. – Сечения указательных поверхностей, представленных на рисунке 2,  $\chi \times 10^{-7}$**

Как следует из рисунка 3, следы сечений указательных поверхностей, рассчитанных при  $\vec{E} \parallel [001]$  и  $\vec{E} \parallel [1\bar{1}0]$ , практически совпадают. На рисунке 3с экстремальные направления указательной поверхности совпадают с кристаллографическими направлениями  $[110]$ ,  $[\bar{1}10]$ ,  $[\bar{1}\bar{1}0]$  и  $[1\bar{1}0]$ . На рисунке 3d нормальная составляющая достигает экстремальных значений вдоль биссектрис, лежащих в плоскости сечения и делящих углы между кристаллографической осью  $x_3$  и вектором  $\vec{E}$ .

На рисунке 4 – указательные поверхности, рассчитанные при  $\vec{E} \parallel [\bar{1}\bar{1}1]$  (рисунок 4а) и  $\vec{E} \parallel [\bar{1}\bar{1}\bar{2}]$  (рисунок 4б).



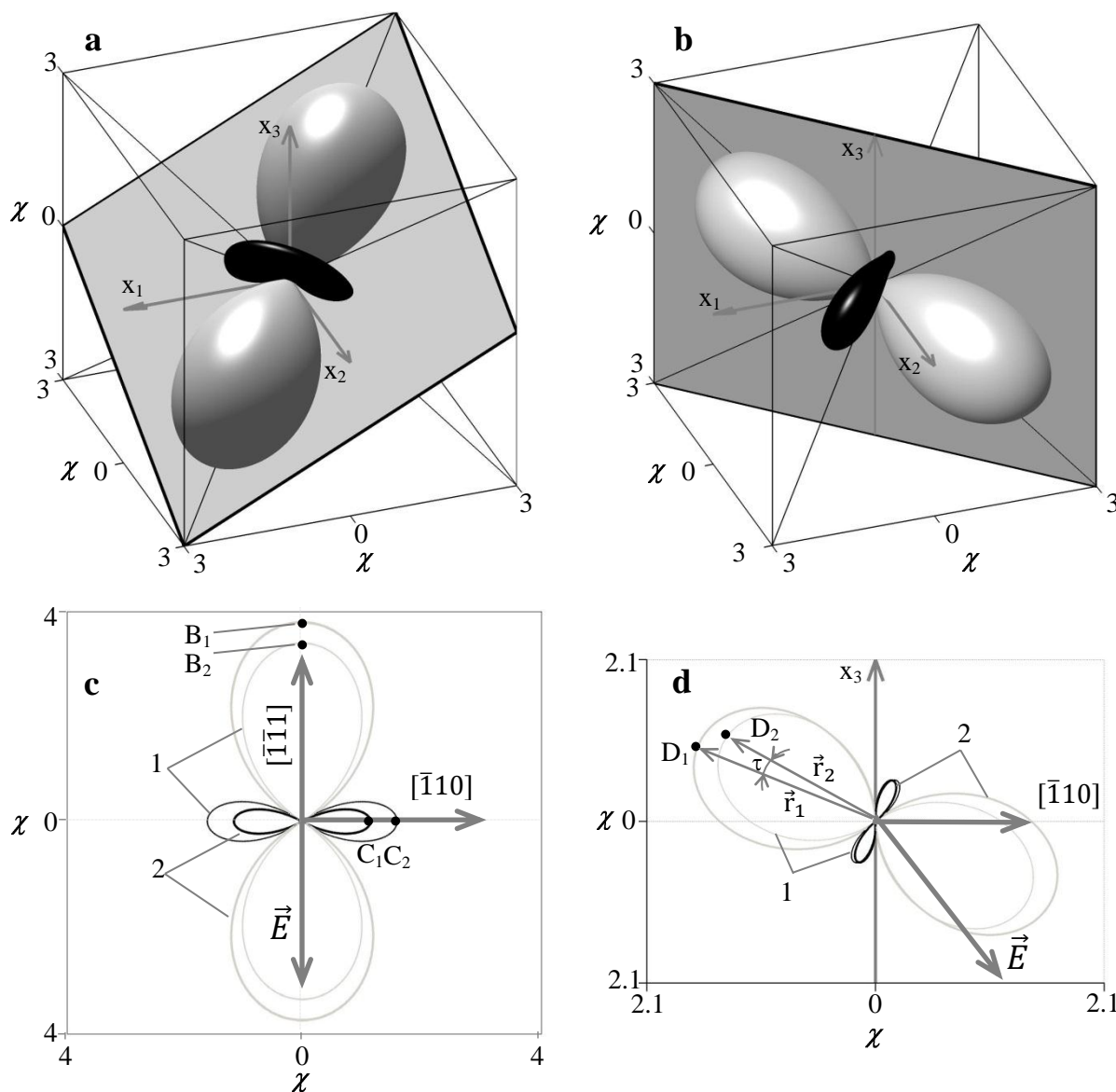
**Рисунок 4. – Указательные поверхности нормальной составляющей обратного тензора,  $\chi \times 10^{-7}$**

Указательная поверхность при  $\vec{E} \parallel [\bar{1}\bar{1}1]$  (рисунок 4а) представляет собой сложную фигуру, состоящую из двух частей: две белых яйцеобразных соприкасающихся поверхности и перпендикулярная им торообразная поверхность. Эта поверхность описывается предельной группой  $\infty/m\bar{m}$ . Поворотная ось симметрии бесконечного порядка параллельна вектору  $\vec{E}$  и, соответственно, любое перпендикулярное вектору  $\vec{E}$  сечение указательной поверхности является фигурой вращения. Внешняя симметрия указательной поверхности соответствует такому тензору второго ранга, для которого в главной системе координат две диагональные компоненты равны и отличаются от третьей компоненты по величине и по знаку [26].

Рассчитанная для  $\vec{E} \parallel [\bar{1}\bar{1}\bar{2}]$  указательная поверхность (рисунок 4б) внешне сходна с представленной на рисунке 4а поверхностью, но имеет менее симметричную внешнюю форму и не содержит поворотных осей симметрии бесконечного порядка. Представленная на рисунке 4б указательная поверхность имеет форму, переходную между отображенными на рисунках 4а и 2б поверхностями. Это означает, что при вращении вектора  $\vec{E}$  от направления  $\langle 111 \rangle$  к направлению  $\langle 110 \rangle$  указательная поверхность будет видоизменяться от формы, представленной на рисунке 4а, к форме, представленной

на рисунке 2b. Одна из переходных форм при трансформации указательной поверхности и представлена на рисунке 4b.

Проанализируем сечения представленных на рисунке 4 указательных поверхностей плоскостями, проходящими через начало координат и параллельными плоскостям (112) (рисунки 5a и 5c) и (110) (рисунки 5b и 5d). На рисунках 5a и 5b схематически отображено взаимное расположение секущих плоскостей и указательных поверхностей.



*a, b – взаимное расположение указательных поверхностей и секущих плоскостей;  
c, d – следы указательных поверхностей на плоскостях сечения,  
рассчитанные без учета (1) и с учетом (2) обратного пьезоэлектрического эффекта*

**Рисунок 5. – Сечения указательных поверхностей,  
представленных на рисунке 4,  $\chi \times 10^{-7}$**

На рисунках 5c и 5d в изображены следы указательных поверхностей на плоскостях сечения.

Рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{E}$  ориентирован вдоль направления  $[\bar{1}\bar{1}1]$  (рисунок 5c). В этом случае максимальное значение нормальной составляющей достигается вдоль направлений  $[\bar{1}\bar{1}1]$  и  $[11\bar{1}]$ , а наименьшее значение – перпендикулярно векто-

ру  $\vec{E}$ . В общем случае, когда вектор  $\vec{E}$  ориентирован вдоль одного из направлений комплекса  $\langle 111 \rangle$ , экстремальные направления части указательной поверхности, окрашенной в белый цвет, параллельны вектору  $\vec{E}$ . Для части указательной поверхности, окрашенной в черный цвет, экстремальным является любое направление, перпендикулярное вектору  $\vec{E}$ . При изменении направления вектора  $\vec{E}$  на противоположное цвет указательной поверхности также будет изменяться на противоположный. Учет вторичного электрооптического эффекта обуславливает увеличение нормальной составляющей вдоль экстремальных направлений части указательной поверхности, окрашенной в белый цвет. При этом вдоль экстремальных направлений части указательной поверхности, окрашенной в черный цвет, имеет место уменьшение численного значения нормальной составляющей.

Наиболее сложным для анализа является случай, когда вектор  $\vec{E}$  ориентирован вдоль направления  $[\bar{1}1\bar{2}]$  (рисунок 5d). Экстремальные направления указательной поверхности лежат в плоскости сечения и не совпадают по направлению с параллельными и перпендикулярными вектору  $\vec{E}$  осями. Учет вторичного электрооптического эффекта обуславливает не только количественное изменение максимальных и минимальных значений нормальной составляющей, но и качественную трансформацию внешней формы указательной поверхности. Под действием вторичного электрооптического эффекта увеличивается максимальное значение нормальной составляющей ( $D_2 \rightarrow D_1$ ) для части указательной поверхности, окрашенной в белый цвет, и одновременно происходит смещение максимума в плоскости сечения на угловое расстояние  $\tau$ , между векторами  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , проведенными к точкам  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Аналогичные изменения имеют место при трансформации части указательной поверхности, окрашенной в черный цвет, под действием вторичного электрооптического эффекта.

### Заклучение

Таким образом, в кристаллографической системе координат определены направления, вдоль которых достигаются максимальные и минимальные значения нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла ВТО при ориентации вектора напряженности электрического поля пространственного заряда вдоль направлений  $[001]$ ,  $[\bar{1}\bar{1}0]$ ,  $[\bar{1}\bar{1}1]$  и  $[\bar{1}\bar{1}2]$ . Показано, что при  $\vec{E} \parallel [\bar{1}\bar{1}1]$  вторичный электрооптический эффект приводит к уменьшению максимального значения нормальной составляющей вдоль экстремальных направлений, совпадающих с вектором  $\vec{E}$ .

Минимальное значение нормальной составляющей вдоль экстремальных направлений, перпендикулярных вектору  $\vec{E}$ , под действием вторичного электрооптического эффекта по модулю уменьшается. В общем случае под действием вторичного электрооптического эффекта имеет место как изменение максимального и минимального значений нормальной составляющей, так и изменение экстремальных направлений указательной поверхности нормальной составляющей обратного тензора диэлектрической проницаемости.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Optically induced refractive index inhomogeneities in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$  / A. Ashkin [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 1966. – Vol. 9, № 1. – P. 72–74.
2. Chen, F. S. A laser-induced inhomogeneity of refractive indices in KTN / F. S. Chen // J. Appl. Phys. – 1967. – Vol. 38. – P. 3418–3420.



3. Chen, F. S. Holographic storage in lithium niobate / F. S. Chen, J. T. LaMacchia, D. B. Fraser // *Appl. Phys. Lett.* – 1968. – Vol. 13, № 7. – P. 223–225.
4. Chen, F. S. Optically induced change of refractive indices in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$  / F. S. Chen // *J. Appl. Phys.* – 1969. – Vol. 40. – P. 3389–3396.
5. Динамическая самодифракция когерентных световых пучков / В. Л. Винецкий [и др.] // *УФН.* – 1979. – Т. 129, вып. 1. – С. 113–137.
6. Holographic storage in electrooptic crystals / N. V. Kukhtarev [et al.] // *Ferroelectrics.* – 1979. – Vol. 22. – P. 949–961.
7. Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах / А. А. Изванов [и др.] // *Автоматрия.* – 1986. – № 2. – С. 79–84.
8. Степанов, С. И. Фотоупругий вклад в фоторефрактивный эффект в кубических кристаллах / С. И. Степанов, С. М. Шандаров, Н. Д. Хатьков // *ФТТ.* – 1987. – Т. 24, № 10. – С. 3054–3058.
9. Mandel, A. Light diffraction in holographic arrays – different mechanisms of photorefractive effect in ferroelectrics / A. Mandel, N. Khatkov, S. Shandarov // *Ferroelectrics.* – 1988. – Vol. 83. – P. 215–220.
10. Shepelevich, V. V. Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals / V. V. Shepelevich, S. M. Shandarov, A. E. Mandel // *Ferroelectrics.* – 1990. – Vol. 110. – P. 235–249.
11. Шандаров, С. М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С. М. Шандаров, В. В. Шепелевич, Н. Д. Хатьков // *Оптика и спектроскопия.* – 1989. – Т. 67, № 4. – С. 819–822.
12. Solyman, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solyman, D. J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford : Clarendon Press, 1996. – 494 p.
13. Pauliat, G. Influence of piezoelectricity on the photorefractive effect / G. Pauliat, P. Mathey, G. Roosen // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 1991. – Vol. 8. – P. 1942–1946.
14. Kukhtarev, N. V. The influence of photoelasticity on the self-diffraction of light on cubic photorefractive crystals / N. V. Kukhtarev, T. I. Semenc, P. Hribek // *Ferroelectr. Lett.* – 1991. – Vol. 13. – P. 29–35.
15. Gunter, P. Clamped-unclamped electro-optic coefficient dilemma in photorefractive phenomena / P. Gunter, M. Zgonik // *Opt. Lett.* – 1991. – Vol. 16. – P. 1826–1828.
16. Shepelevich, V. V. Orientation and polarization effects of two-beam coupling in a cubic optically active photorefractive piezoelectric BSO crystal / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov, V. Shepelevich // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 1994. – Vol. 11, № 8. – P. 1394–1402.
17. Optimization of two-wave interaction efficiency in cubic photorefractive sillenite-type crystals with optical rotary power and piezoeffect in diffusion regime / V. V. Shepelevich [et al.] // *Ferroelectrics.* – 1999. – Vol. 234 (1/4). – P. 289–309.
18. Векторное двухволновое взаимодействие на отражательных голографических решетках в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах / А. М. Плещовских [и др.] // *Квант. электроника.* – 2005. – Т. 35, № 2. – С. 163–168.
19. Дифракция световых волн на отражательных голограммах в кубических пьезокристаллах / В. В. Шепелевич [и др.] // *Письма в ЖТФ.* – 2003. – Т. 29, № 18. – С. 22–28.
20. Навныко, В. Н. Процессы энергетического переноса при двухволновом взаимодействии на отражательных решетках в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  произвольного среза / В. Н. Навныко, В. В. Шепелевич // *Изв. Гомел. гос. ун-та им. Франциска Скорины.* – 2006. – Т. 6, ч. 2. – С. 143–146.

21. Шепелевич, В. В. Запись и считывание голограмм в кубических гиротропных фоторефрактивных пьезокристаллах (Обзор) / В. В. Шепелевич // ЖПС. – 2011. – Т. 78, № 4. – С. 493–515.
22. Петров, М. П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М. П. Петров, С. И. Степанов, А. В. Хоменко. – СПб. : Наука, 1992. – 320 с.
23. Gunter, P. Clamped-unclamped electro-optic coefficient dilemma in photorefractive phenomena / P. Gunter, M. Zgonik // Opt. Lett. – 1991. – Vol. 16. – P. 1826–1828.
24. Energy exchange optimization in (110)-cut ВТО crystal by choice of interacting waves polarization / А. Е. Zagorskiy [et al.] // Opt. Mat. – 2001. – Vol. 18. – P. 131–133.
25. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. – М. : Наука, 1979. – 639 с.
26. Сонин, А. С. Курс макроскопической кристаллофизики / А. С. Сонин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 256 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.10.2019

***Naunika V. N., Amanova M. A., Shepelevich V. V., Yudzitski U. V. Variation of Components of the Inverse Permittivity Tensor in  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  Crystal by Electric Space Charge Field***

*Variation of the inverse permittivity tensor components of the cubic photorefractive crystals of class 23 by electric space charge field of the volume holographic grating is studied. The primary and secondary electrooptic effects are taken into consideration. Normal component surfaces of the inverse permittivity tensor of  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  crystal for typical orientations of the strength vector of the electric space charge field in the crystallographic coordinate system used for forming the holographic grating are constructed. Sections of surfaces are obtained and the crystallographic directions along which the normal component of the inverse permittivity tensor tends to extreme values are defined. It is shown that the secondary electrooptic effect for fixed strength vector of the electric space charge field can increase as well as decrease the normal component of the inverse permittivity tensor.*

УДК 539.12:530.145

**В. А. Плетюхов<sup>1</sup>, И. В. Капица<sup>2</sup>, В. В. Кисель<sup>3</sup>, В. М. Редьков<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>студент V курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

<sup>4</sup>д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник лаборатории теоретической физики

Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

e-mail: otf@brsu.brest.by

## Р-НЕИНВАРИАНТНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

### ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$ И ТРЕМЯ МАССАМИ

*В подходе Гельфанда – Яглома получены четыре типа Р-неинвариантного релятивистского волнового уравнения для частицы со спином  $s = \frac{1}{2}$  и тремя различными массами. Каждое из них может представить интерес в качестве классической основы для описания трех поколений нейтрино, рассматриваемых как единый физический объект.*

#### Введение

В настоящее время наличие у нейтрино массы (хотя и весьма малой, но все-таки ненулевой) считается твердо установленным фактом. В пользу этого свидетельствуют, например, осцилляции нейтрино, которые невозможны для строго безмассовых частиц. Таким образом, обычно используемое в классической теории поля описание нейтрино посредством безмассового уравнения Дирака является, строго говоря, некорректным.

В работе [1] было построено релятивистское волновое уравнение (РВУ) первого порядка, не распадающееся по группе Лоренца, для микрочастицы со спином  $s = \frac{1}{2}$  и тремя различными значениями массы, которое рассматривалось как альтернатива уравнению Дирака с точки зрения описания всех трех сортов нейтрино с единых позиций. Важной чертой указанного РВУ является его инвариантность относительно операции пространственного отражения.

Здесь необходимо сделать небольшой исторический экскурс. В те годы, когда формировался постулативный базис теории РВУ (подробнее см. [2]), считалось, что «правильные» уравнения, описывающие физические процессы в микромире, должны быть инвариантными не только в смысле собственной группы Лоренца, но и по отношению к операции пространственного отражения (так называемая  $P$ -инвариантность или  $P$ -четность). Поэтому требование  $P$ -инвариантности, наряду с требованиями лоренцевской инвариантности и возможности лагранжевой формулировки, включалось в систему обязательных постулатов теории РВУ [2; 3]. Однако впоследствии выяснилось, что в процессах, идущих с участием нейтрино, например при  $\beta$ -распаде ядер, закон сохранения  $P$ -четности может не выполняться.

В контексте обсуждаемой проблемы это означает, что при описании нейтрино в подходе теории РВУ требование  $P$ -инвариантности соответствующего уравнения

можно опустить. В свою очередь, отказ от этого требования существенно расширяет границы применимости методов теории РВУ в нейтринной физике.

В данной работе мы исследуем возможность построения  $P$ -неинвариантного РВУ для микрообъекта со спином  $s = \frac{1}{2}$  и тремя массовыми состояниями в подходе Гельфанда – Яглома [3; 4].

### 1. Некоторые сведения из теории РВУ

Как известно [2; 3], теория РВУ для частиц с ненулевой массой базируется на стандартной матрично-дифференциальной форме уравнения первого порядка

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \quad (\mu = 1 \div 4), \quad (1)$$

где  $\psi(x)$  – многокомпонентная волновая функция,  $\Gamma_\mu$  – квадратные числовые матрицы,  $m$  – массовый параметр. Релятивистская инвариантность уравнения (1) предполагает, что волновая функция  $\psi(x)$  преобразуется по приводимому представлению  $T$  собственной группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых компонент  $\tau \sim (l_1, l_2)$ . В описании спина  $s$  участвуют представления  $\tau$ , удовлетворяющие условию

$$|l_1 - l_2| \leq s \leq l_1 + l_2. \quad (2)$$

Среди матриц  $\Gamma_\mu$  основную роль играет матрица  $\Gamma_4$  в том смысле, что алгебраические свойства этой матрицы определяют как спин, так и возможные значения массы частицы, описываемой уравнением (1). Наиболее удобным в указанном смысле является канонический базис  $\xi_{s,s_3}^{(\tau)}$ , называемый иногда базисом Гельфанда – Яглома [4], в котором матрица  $\Gamma_4$  имеет блочную структуру

$$\Gamma_4 = \bigoplus_s C^s \otimes I_{2^{s+1}}. \quad (3)$$

Блоки  $C^s$  в (3) формируются представлениями  $\tau \sim (l_1, l_2)$ , удовлетворяющими условию (2). При этом, если блок  $C^s$  имеет отличные от нуля вещественные собственные значения  $\lambda_i^{(s)}$  (хотя бы одно), то микрочастица обладает спином  $s$ , а возможные значения ее массы вычисляются по формуле

$$m_i^{(s)} = \frac{m}{|\lambda_i^{(s)}|}. \quad (4)$$

### 2. Основное содержание

Для построения интересующего нас уравнения будем исходить из набора неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)' \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (5)$$

где знак «штрих» введен для различения кратных (повторяющихся) компонент. В соответствии с (2) представления, содержащиеся в наборе (5), могут описывать спины  $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ . Следовательно, матрица  $\Gamma_4$  (3) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\Gamma_4 = \left(C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2\right) \oplus \left(C^{\frac{3}{2}} \otimes I_4\right) = \Gamma_4^{\frac{1}{2}} \oplus \Gamma_4^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Для удобства и упрощения записи дальнейших формул и выражений введем нумерацию представлений, содержащихся в (5), которая одновременно будет служить и для обозначения строк и столбцов спиновых блоков  $C^s$ :

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \sim 1, \left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim 2, \left(0, \frac{1}{2}\right)' \sim 3, \left(\frac{1}{2}, 0\right)' \sim 4, \left(1, \frac{1}{2}\right) \sim 5, \left(\frac{1}{2}, 1\right) \sim 6. \quad (7)$$

В обозначениях (7) получаем следующие самые общие выражения для спиновых блоков  $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$ , соответствующие выбранному нами набору представлений (5):

$$C^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{14}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{16}^{\frac{1}{2}} \\ C_{21}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{23}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{25}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & C_{32}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{34}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{36}^{\frac{1}{2}} \\ C_{41}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{43}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{45}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & C_{52}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{54}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{56}^{\frac{1}{2}} \\ C_{61}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{63}^{\frac{1}{2}} & 0 & C_{65}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & C_{56}^{\frac{1}{2}} \\ C_{65}^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где на данном этапе компоненты блоков  $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$  – произвольные комплексные числа.

Как показано в [5], зацепления между кратными представлениями в (5) могут быть «разорваны», т. е., не уменьшая общности, можно положить

$$C_{14}^{\frac{1}{2}} = C_{23}^{\frac{1}{2}} = C_{32}^{\frac{1}{2}} = C_{41}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (9)$$

Далее, поскольку нас интересует только спин  $s = \frac{1}{2}$ , надо выбрать

$$C_{56}^{\frac{3}{2}} = C_{65}^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (10)$$

откуда автоматически следует:

$$C_{56}^{\frac{1}{2}} = C_{65}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (11)$$

С учетом (9) – (11) спиновые блоки  $C^{\frac{1}{2}}, C^{\frac{3}{2}}$  (8) принимают вид:

$$C^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & C_{16}^{1/2} \\ C_{21}^{1/2} & 0 & 0 & 0 & C_{25}^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{34}^{1/2} & 0 & C_{36}^{1/2} \\ 0 & 0 & C_{43}^{1/2} & 0 & C_{45}^{1/2} & 0 \\ 0 & C_{52}^{1/2} & 0 & C_{54}^{1/2} & 0 & 0 \\ C_{61}^{1/2} & 0 & C_{63}^{1/2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

С точки зрения физических приложений излагаемой теории интерес представляют только такие уравнения, с которыми можно инвариантно связать наблюдаемые величины, например заряд, энергию, импульс и другие. Иными словами, помимо релятивистской инвариантности строящегося уравнения, обязательным требованием является возможность его получения из некоторой лоренц-инвариантной функции Лагранжа.

Лагранжиан уравнения (1) имеет вид

$$L = -\psi^+ \eta (\Gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi, \quad (13)$$

где  $\eta$  – матрица вещественной лоренц-инвариантной билинейной формы  $\psi^+ \eta \psi$ , имеющая в базисе Гельфанда – Яглома структуру, аналогичную (6):

$$\eta = \left( \eta^{1/2} \otimes I_2 \right) \oplus \left( \eta^{3/2} \otimes I_4 \right). \quad (14)$$

$P$ -инвариантности билинейной формы и лагранжиана (13) при этом не требуется. Требование лоренц-инвариантности и вещественности формы означает, что ненулевые элементы  $\eta_{\tau\bar{\tau}}^s$  матрицы  $\eta$  должны удовлетворять условиям [2]:

$$\left( \eta_{\tau\bar{\tau}}^s \right)^* = \eta_{\tau\bar{\tau}}^s, \quad (15)$$

$$\eta_{\tau\bar{\tau}}^s = -\eta_{\tau\bar{\tau}}^{s+1}. \quad (16)$$

Не уменьшая общности, условию (15) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{21}^{1/2} = \eta_{34}^{1/2} = -\eta_{43}^{1/2} = i, \quad \eta_{56}^{1/2} = -\eta_{65}^{1/2} = if \quad (f = \pm 1). \quad (17)$$

В общем случае требование возможности лагранжевой формулировки РВУ вида (1) приводит к условию

$$C_{\tau\bar{\tau}'}^s \eta_{\tau'\bar{\tau}}^s = \left( C_{\tau'\bar{\tau}}^s \right)^* \eta_{\tau\bar{\tau}}^s, \quad (18)$$

которое применительно к нашему случаю при выборе (17) элементов матрицы  $\eta$  накладывает следующие ограничения на компоненты спинного блока  $C^{1/2}$ :

$$C_{12}^{1/2}, C_{21}^{1/2}, C_{34}^{1/2}, C_{43}^{1/2} \text{ – чисто мнимые;} \quad (19)$$

$$C_{61}^{1/2} = -f \left( C_{25}^{1/2} \right)^*, \quad C_{52}^{1/2} = -f \left( C_{16}^{1/2} \right)^*, \quad (20)$$

$$C_{63}^{1/2} = -f(C_{45}^{1/2})^*, C_{54}^{1/2} = -f(C_{36}^{1/2})^*. \quad (21)$$

Условиям (19) – (21) можно удовлетворить, полагая, например:

$$\begin{aligned} C_{12}^{1/2} = -C_{21}^{1/2} = iC_1, C_{34}^{1/2} = -C_{43}^{1/2} = iC_3, \\ C_{16}^{1/2} = -C_{25}^{1/2} = iC_2, C_{36}^{1/2} = -C_{45}^{1/2} = iC_4, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $C_1, C_3$  – произвольные вещественные,  $C_2, C_4$  – произвольные комплексные числа. Спиновой блок  $C^{1/2}$  при этом принимает вид

$$C^{1/2} = i \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 \\ -fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_4^{1/2} = C^{1/2} \otimes I_2 = C \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (23)$$

где  $\gamma_4, \gamma_5$  – матрицы Дирака и

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ fC_2^* & fC_4^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Спектр массовых состояний обсуждаемой микрочастицы связан с корнями  $\lambda_i$  матрицы  $C$  (24) соотношением (4). Характеристическое уравнение для матрицы  $C$  имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(C_1 + C_3) + \lambda(C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2) + f|C_2|^2C_3 + f|C_4|^2C_1 = 0. \quad (25)$$

Из (25) вытекает следующая система уравнений для  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= C_1 + C_3, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 &= C_1C_3 - f|C_2|^2 - f|C_4|^2, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -f|C_2|^2C_3 - f|C_4|^2C_1. \end{aligned} \quad (26)$$

Как видно из (4), в силу произвольности массового параметра  $m$ , один из корней  $\lambda_i$ , не уменьшая общности, можно выбрать равным 1. Пусть

$$\lambda_3 = 1. \quad (27)$$

Тогда для нахождения двух оставшихся корней получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(C_1 + C_3 - 1) - f|C_2|^2 C_3 - f|C_4|^2 C_1 = 0, \quad (28)$$

где произвол в выборе параметров  $C_1, C_2, C_3, C_4$  ограничен условием

$$C_1 C_3 - C_1 - C_3 + 1 + f|C_2|^2 (C_3 - 1) + f|C_4|^2 (C_1 - 1) = 0. \quad (29)$$

Условие (29) выполняется, например, при

$$C_1 = C_3 = 1. \quad (30)$$

На параметры  $C_2, C_4$  при этом никаких ограничений не накладывается.

Уравнение (28) при условии (30) трансформируется к виду

$$\lambda^2 - \lambda - f|C_2|^2 - f|C_4|^2 = 0, \quad (31)$$

откуда следует:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + f|C_2|^2 + f|C_4|^2}. \quad (32)$$

Поскольку корни  $\lambda_{1,2}$  должны быть вещественными и разными, то при  $f = -1$  на параметры уравнения  $C_2, C_4$  накладывается ограничение

$$|C_2|^2 + |C_4|^2 < \frac{1}{4}. \quad (33)$$

В случае же, когда  $f = 1$ , выбор  $C_2, C_4$  ничем не ограничен.

Помимо (17) матрицу билинейной формы можно задать иным, неэквивалентным способом, а именно:

$$\eta_{12}^{1/2} = -\eta_{21}^{1/2} = -\eta_{34}^{1/2} = \eta_{43}^{1/2} = i, \quad \eta_{56}^{1/2} = -\eta_{65}^{1/2} = if \quad (f = \pm 1). \quad (34)$$

При этом условие (19) не изменится, а (20), (21) трансформируются так:

$$C_{61}^{1/2} = -f(C_{25}^{1/2})^*, \quad C_{51}^{1/2} = -f(C_{16}^{1/2})^*, \quad (35)$$

$$C_{63}^{1/2} = f(C_{45}^{1/2})^*, \quad C_{54}^{1/2} = f(C_{36}^{1/2})^*. \quad (36)$$

Вводя по-прежнему обозначения (22), для спинового блока  $C^{1/2}$  получим в этом случае выражение



$$C^{\frac{1}{2}} = i \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & -C_3 & 0 & -C_4 & 0 \\ 0 & fC_2^* & 0 & -fC_4^* & 0 & 0 \\ -fC_2^* & 0 & fC_4^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_4^{\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = C' \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (37)$$

где

$$C' = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ fC_2^* & -fC_4^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Характеристическое уравнение матрицы  $C'$  (38) имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2(C_1 + C_3) + \lambda(C_1C_3 - f|C_2|^2 + f|C_4|^2) + f|C_2|^2C_3 - f|C_4|^2C_1 = 0. \quad (39)$$

Полагая, как и ранее (см. (27)), один из корней равным 1, для нахождения двух остальных корней получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(C_1 + C_3 - 1) - f|C_2|^2C_3 + f|C_4|^2C_1 = 0, \quad (40)$$

на параметры которого налагается ограничение

$$C_1C_3 - C_1 - C_3 + 1 + f|C_2|^2(C_3 - 1) - f|C_4|^2(C_1 - 1) = 0. \quad (41)$$

Условие (41) выполняется при естественном выборе (30) вещественных параметров  $C_1, C_3$ . При этом уравнение (40) принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda - f|C_2|^2 + f|C_4|^2 = 0. \quad (42)$$

Отсюда для корней  $\lambda_1, \lambda_2$  получаем выражение

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + f|C_2|^2 - f|C_4|^2}, \quad (43)$$

имеющее смысл при выполнении условий

$$|C_2|^2 - |C_4|^2 > -\frac{1}{4} \text{ при } f = 1, \quad (44)$$

$$|C_2|^2 - |C_4|^2 < \frac{1}{4} \text{ при } f = -1. \quad (45)$$

### Заключение

Таким образом, исходя из набора (5) неприводимых представлений группы Лоренца, можно построить, вообще говоря, четыре различных типа  $P$ -неинвариантного

РВУ для микрообъекта со спином  $s = \frac{1}{2}$  и тремя массовыми состояниями. В базисе Гельфанда – Яглома при использовании индексной нумерации (7) неприводимых компонент, входящих в (5), спиновые блоки  $C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2$  матрицы  $\Gamma_4$  (6) и блоки  $\eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2$  матрицы билинейной формы  $\eta$  (14) для каждого из этих типов уравнений имеют, как следует из вышепроведенного исследования, вид:

Первый тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ C_2^* & C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (46)$$

где  $C_2, C_4$  – произвольные комплексные числа, не равные одновременно нулю. Массовый спектр (4) определяется корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + |C_2|^2 + |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (47)$$

Второй тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ -C_2^* & -C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (48)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - |C_2|^2 - |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1, \quad (49)$$

где произвол в выборе параметров  $C_2, C_4$  ограничен условием (33).

Третий тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ C_2^* & -C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (50)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + |C_2|^2 - |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1 \quad (51)$$

при выполнении ограничения (44).

Четвертый тип

$$C^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C_2 \\ 0 & 1 & C_4 \\ -C_2^* & C_4^* & 0 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4; \quad \eta^{\frac{1}{2}} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_5\gamma_4, \quad (52)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - |C_2|^2 + |C_4|^2}, \quad \lambda_3 = 1. \quad (53)$$

где параметры  $C_2, C_4$  подчиняются условию (45).

Выбор определенных значений параметров  $C_2, C_4$  может быть осуществлен путем сопоставления полученных результатов с экспериментальными данными для масс флейворных нейтрино.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гугнюк, М. Л. Описание поколений нейтрино в подходе теории релятивистских волновых уравнений / М. Л. Гугнюк, В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 5–11.
2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
3. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.
4. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, № 8. – С. 703–733.
5. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.09.2019

*Pletyukhov V. A., Kapitsa I. V., Kisel V. V., Red'kov V. M. P-Noninvariant Relativistic Wave Equation for the Particle with Spin  $\frac{1}{2}$  and Three Masses*

*Four types of P-noninvariant relativistic wave equation for the particle with spin  $s = \frac{1}{2}$  and three different masses are obtained in the Gelfand – Yagolam approach. Each of them can present an interest as a classical basis for describing three generations of neutrinos, considered as a single physical object.*

УДК 669.2/8:620

**В. С. Савенко<sup>1</sup>, Н. В. Степанев<sup>2</sup>**<sup>1</sup>д-р техн. наук, проф., зав. каф. физики и математики

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

<sup>2</sup>магистрант физико-инженерного факультета

Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

e-mail: [savenko-vl@rambler.ru](mailto:savenko-vl@rambler.ru)<sup>1</sup>

**РАСЧЕТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ ФАКТОРОВ  
И ИХ ГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
ПРИ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATLAB**

*Исследованы физические условия создания пондеромоторных эффектов при электропластической деформации для получения материалов с комплексом высоких физико-механических и служебных характеристик. Показано, что в условиях электропластичности реализация оптимальных значений пондеромоторных факторов достигается при частотах, когда магнитное поле не успевает существенно проникать в материал, при этом скорость диффузии будет зависеть как от проводимости металла, так и частоты тока. С ростом частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, а с увеличением радиуса образца наблюдается рост напряженности магнитного поля и уменьшение плотности тока.*

**Введение**

Перспективным направлением развития физики твердого тела и физического материаловедения в настоящее время является создание высокоинтенсивных технологий для получения материалов с комплексом высоких физико-механических и служебных характеристик.

Один из наиболее эффективных подходов для решения данной задачи реализуется при электронно-пластической деформации (ЭПД) металлов при возбуждении их электронной подсистемы высокоэнергетическими воздействиями с целью программированного управления деформационными процессами.

Импульсный ток большой плотности, пропущенный через металл во время деформации выше предела текучести, вызывает ЭПД в том числе за счет пондеромоторных эффектов, которые обуславливают дополнительные механические напряжения ионного остова кристаллической решетки металла.

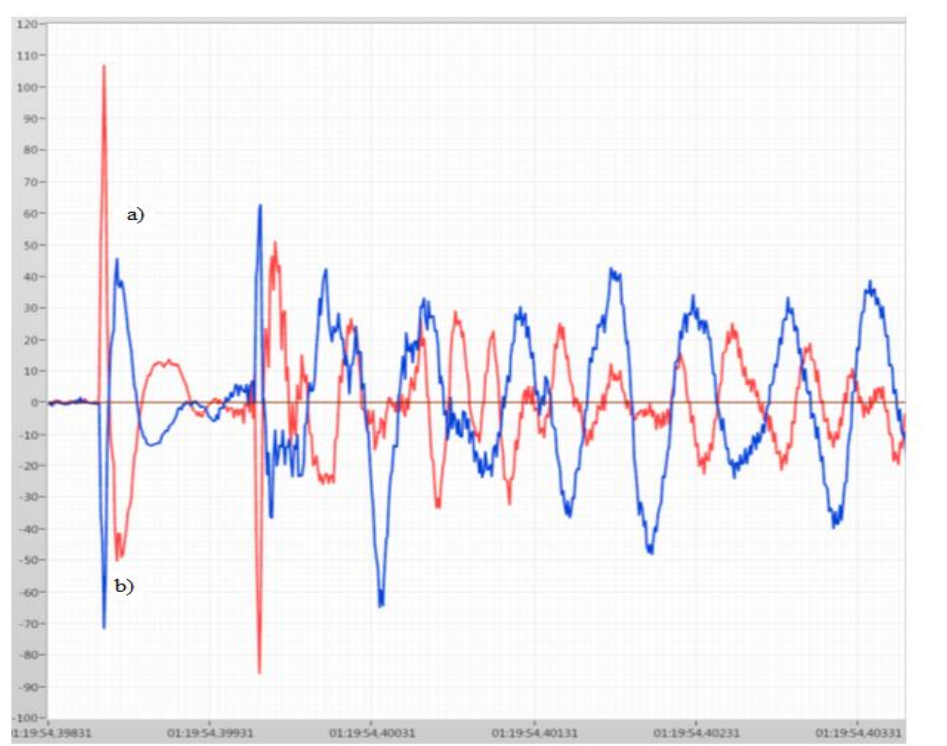
В зоне деформации с периодичностью подачи импульсов тока на фронте их нарастания создается ультразвуковая вибрация, которая активно влияет на кинетику пластической деформации, модифицируя служебные характеристики материала (рисунки 1) [1–3].

Электропластичность в нагруженном проводящем материале в зоне деформации обуславливает перераспределение плотности носителей по сечению проводника от равномерного при отсутствии тока к максимальному на поверхности в начале импульса с последующим переходом к максимуму на оси образца с одновременным возбуждением импульсов ускорения в радиальном и осевом направлениях. На рисунке 2 показано ускорение для импульса тока длительностью 1 мкс с полосой частот 2–20 кГц.

В научно-прикладном аспекте необходимо рассчитывать и моделировать с помощью математических программ и графических изображений физические условия создания пондеромоторных факторов применительно к конкретным технически важным материалам в условиях деформирования статическими, динамическими и знакопеременными нагрузками.



**Рисунок 1. – Переходные процессы ультразвуковой вибрации от действия импульсов тока в условиях деформации выше предела текучести**



**Рисунок 2. – Импульсы ускорения в радиальном и осевом направлениях при периодическом возбуждении импульса тока: а) осевое; б) радиальное**

Наиболее подходящим для этих целей является математический пакет MatLab – один из используемых вычислительных средств, имеющих собственный язык программирования, применяемый во многих областях науки и являющийся предпочтительным для расчетов и графических изображений в моделировании физических процессов.

В пакете MatLab важная роль отводится специальным подпрограммам – Toolboxes, которые служат эффективным средством для решения различного рода линейных и нелинейных дифференциальных уравнений для физических периодических процессов, а также для системных дифференциальных уравнений в частных производных с большим числом переменных, что позволяет визуализировать процессы, происходящие во времени и пространстве с использованием функции plot3.

### Основные результаты

Электропластическая деформация проводящих материалов вызывает ряд факторов вторичного силового действия импульсного тока большой плотности, создающего в деформационной зоне, которая находится под механическим напряжением выше предела текучести, пондеромоторные пинч- и скин-эффекты за счет влияния собственного магнитного поля тока и поляризации электронной подсистемы металла с созданием поперечного электрического поля Холла, препятствующего дальнейшему сжатию электронной плазмы.

Механизм пинч-эффекта заключается в появлении вокруг образца с током кольцевых линий собственного магнитного поля и поперечного поля Холла, действующего на движущиеся заряды электронной плазмы в поперечном направлении и смещающего их к оси проводника.

Воздействие собственного магнитного поля тока обуславливает поляризацию электронной плазмы металла и, как следствие, появление поперечного электрического поля Холла [5–8].

Пусть  $H_m(x, t)$  – собственное магнитное поле в образце. Рассмотрим уравнение вида:

$$H_m(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', t) f(x') dx', \quad (1)$$

где  $G(x, x', t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(x' - x)^2}{4Dt}\right]$ .

Перепишем (1) в виде:

$$H_m(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^{\infty} \left\{ f(x') \exp\left[-\frac{(x' - x)^2}{4Dt}\right] + f(-x') \exp\left[-\frac{(x' + x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (2)$$

Удовлетворяя граничному условию, будем иметь:

$$H_m(0, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{x'^2}{4Dt}\right] \cdot \{f(x') - f(-x')\} dx'. \quad (3)$$

Условие будет выполнено, если  $f(-x') = -f(x')$  ( $0 \leq x' \leq \infty$ ).

Подставим (3) с учетом условия в (2) и получим:

$$H_m(x,t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \int_0^\infty f(x') \left\{ \exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x'+x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (4)$$

Подставим (3) в (4):

$$H_m(x,t) = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x'-x)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[-\frac{(x'+x)^2}{4Dt}\right] \right\} dx'. \quad (5)$$

Разобьем интеграл на два слагаемых и введем новые переменные интегрирования:

$$\alpha = \frac{x' - x}{\sqrt{4Dt}}, \quad \beta = \frac{x' + x}{\sqrt{4Dt}}. \quad (6)$$

Получим:

$$\begin{aligned} H_m(x,t) &= \frac{H_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \right] = \\ &= \frac{H_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{2H_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}} e^{-\alpha^2} \end{aligned}$$

или

$$H_m(x,t) = H_0 \theta\left(\frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}}\right), \quad (7)$$

где  $\theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$ .

Тогда (7) – вещественное магнитное поле в образце.

Напряженность собственного магнитного поля  $\vec{H}$ . Пусть  $r$  – сечение образца, в котором определяется напряженность поля. Выделим элементарный участок  $d\vec{l}$  и положим, что для всех элементарных участков импульсный ток имеет одно значение, т. е. полная напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} I \int \frac{\sin \alpha}{r^2} d\vec{l}. \quad (8)$$

Из (8) следует

$$\frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{d\vec{\alpha}}{r \sin \alpha}. \quad (9)$$

Учтем, что  $r \sin \alpha = R$ , получим:

$$\frac{d\vec{l}}{r^2} = \frac{d\vec{\alpha}}{R}. \quad (10)$$

Подставим в (10) формулу (9) и перейдем к интегрированию по углу  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin \alpha}{R} d\vec{\alpha} = \frac{1}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \cdot d\vec{\alpha} = -\frac{1}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (11)$$

Тогда

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (12)$$

Электромагнитное поле для статики описывается системой уравнений Максвелла, законом Ома и уравнениями связи, т. к. ток изменяется по гармоническому закону. Учтем, что ток  $i = \int \vec{j} dS$  и  $H$  изменяются по гармоническому закону:

$$H = \int dH_r. \quad (13)$$

Согласно (13),

$$dH_r = dH \cos \theta = \frac{R}{r} dH. \quad (14)$$

Используя закон Био – Савара – Лапласа, получим:

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (15)$$

или

$$dH_r = \frac{IRdl}{4\pi r^3}. \quad (16)$$

Подставим последнее выражение в формулу (15):

$$\vec{H}_0 = \frac{IR}{4\pi r^3} \int d\vec{l} = \frac{IRdl}{4\pi r^3}. \quad (17)$$

Если подставить (17) в (7), то значение напряженности магнитного поля в образце будет равно:



$$\vec{H} = \frac{IRdl}{4\pi r^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\vec{\alpha} \left( \frac{x}{\sqrt{4\pi Dt}} \right). \quad (18)$$

Расчет плотности тока  $j$  в образце проведен для случая, когда импульсный ток в образце имеет только одну составляющую  $A_x(y, z)$ ,  $I_y = 0$ ,  $I_z = 0$ .

Тогда можно использовать решения для потенциала собственного магнитного поля в трех областях.

Для верхней:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-\lambda|z-h|} + \vec{j}_1 e^{-\lambda|z+h|} \right) \frac{e^{2j\lambda y}}{\lambda} d\lambda. \quad (19)$$

Для второй области:

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 \mu_2 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{q_2 z} + \vec{j}_2 e^{-q_2 z} \right) \frac{e^{\lambda(2jy-h)}}{\lambda} d\lambda. \quad (20)$$

Для нижней:

$$\vec{A}_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_3 \frac{e^{\lambda(2jy+z-h)}}{\lambda} d\lambda. \quad (21)$$

Решение уравнений (19–21) возможно с учетом:

$$k^2 = -J\sigma\omega\mu\mu_0; \quad q^2 = \lambda^2 - k^2 \quad (22)$$

$$\vec{j}_1 = \frac{(\lambda^2 \mu_2^2 - q_2^2)(e^{q_2 T} - e^{-q_2 T})}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}, \quad (23)$$

$$\vec{j}_2 = \frac{2q_2(q_2 - \lambda \mu_2)e^{-q_2 T} + 2q_2(q_2 + \lambda \mu_2)e^{q_2 T}}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}, \quad (24)$$

$$\vec{j}_3 = \frac{4\lambda q_2 \mu_2 e^{\lambda T}}{(\lambda \mu_2 + q_2)^2 e^{q_2 T} - (\lambda \mu_2 - q_2)^2 e^{-q_2 T}}. \quad (25)$$

Плотность токов можно определить через потенциал:

$$\vec{j} = -J\sigma\omega A_2. \quad (26)$$

Как видно из уравнений (19–26), основными параметрами, определяющими формирование токов, являются магнитная проницаемость, электрическая проводимость материала образца и частота тока.

Расчет в математическом пакете MatLab с исходными данными для поставленной задачи (рисунки 3).

```

1      % исходные данные
2      c = 3*10^10;           % см/с, электродинамическая постоянная
3      si = 3.7*10^7;        % Ом/м, удельная проводимость алюминия
4      m = 1.2566*10^(-6);   % Н/А^2, магнитная постоянная для алюминия
5      j = 10^3;             % А/мм^2, плотность тока
6      S = 4;                % мм^2, площадь поперечного сечения проводника
7      r1 = 0.4;             % мм, радиус образца #1
8      r2 = 1.9;             % мм, радиус образца #2
9      t = 10^(-4);         % с, длительность импульсов тока
10     w1 = 500;              % Гц, частота следования импульсов #1
11     w2 = 700;              % Гц, частота следования импульсов #2
12     w3 = 900;              % Гц, частота следования импульсов #3
13     DM                     % коэффициент магнитной диффузии
14     Hz(x,t)                % значение магнитного поля в образце

```

Рисунок 3. – Исходные данные для решения задачи

Рассмотрим уравнение, которое согласуется с уравнением диффузии, выбрав проекцию на ось  $Z$  (рисунок 4). Т. к. поле вне образца изменяется по гармоническому закону, следующая  $Z$ -проекция магнитного поля образца будет на границе при  $x = 0$ . Гармоническая зависимость определяет скин-эффект в стационарном состоянии.

```

16     while diff(n)/diff(t)=D*laplace^2*n
17     for i=1:n
18         diff(H)/diff(t)=(c^2./4*pi*si*m).*laplace^2*H;
19         for j=1:n
20             while DM=(c^2)/(4*pi*si*m)
21                 if (i==j)
22                     diff(Hz)/diff(t)=DM.*(diff^2)*Hz./diff(x^2);
23                 end
24             end
25         end;
26         x=0;
27         for i=1:n
28             Hz(0,t)=Ho.*cos(wt);
29         end;

```

Рисунок 4. – Постановка исходной задачи

Поскольку уравнение линейно и содержит вещественные коэффициенты, то его можно упростить, перейдя к комплексной записи, и искать решение другой вспомогательной задачи с заменой  $\cos(\omega t)$  на комплексную экспоненту. Решение исходной задачи с вещественным полем можно получить из решения вспомогательной задачи с комплексным полем путем отделения вещественной части.

```

31 x=0;
32 while cos(wt)
33     for i=1:n
34         Hz(0,t)=Ho.*exp^-(iwt);
35     end;
36 end;
37 max=x;
38 for i=1:n
39     for x=1:n
40         Hz(x,t)=H(x).*exp^-(iwt);
41     end
42 end;
43 for i=1:n
44     if max==x
45         (diff^2 *H) ./ (diff(x^2)) = -(2*i) ./ (bi^2) *H;
46     end
47 end;
    
```

Рисунок 5. – Решение исходной задачи с вещественным полем

Т. к. магнитное поле вне образца пропорционально  $e^{-i\omega t}$ , то решение вспомогательной задачи следует искать в виде, показанном на рисунке 5. Подставляя эту зависимость в уравнение с частными производными, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами находится в виде суммы экспонент  $Ae^{ikx}$  с постоянными коэффициентами  $A$  и  $k^2$ . Коэффициент  $k$  находится подстановкой  $e^{ikx}$  в исходное уравнение. Получившееся алгебраическое уравнение  $k^2 = \frac{2i}{\delta^2}$  имеет два корня  $k_{\pm} = \frac{1+i}{\delta}$ :  $k_+$  отвечает убывающему, а  $k_-$  – нарастающему

вглубь образца (при  $x \rightarrow \infty$ ) переменному магнитному полю. Нарастающее к оси образца магнитное поле следует опустить, т. к. оно отвечает бессмысленному увеличению магнитного поля вплоть до бесконечного значения при удалении от источника.

Таким образом, внутри проводника решение вспомогательной задачи имеет вид, как показано на рисунке 6.

```

51 e=0.001;
52 x=[0,inf];
53 for k=1:n
54     for i=k+1:n
55         x=A(i,k)/a(k,k);
56         for j=k:n
57             A(i,j)=A(i,j)-x*A(k,j);
58         end
59         if A(i,j)~=0
60             Hz(x,t)=A.*exp^-(1-i).*x/bi).*exp^-(iwt);
61         end
62     end
    
```

Рисунок 6. – Решение вспомогательной задачи с вещественным полем

Коэффициент  $A$  можно найти из условия непрерывности тангенциальной проекции напряженности магнитного поля на границе образца при  $x = 0$ .

Поскольку вне проводника при  $x = 0$  напряженность магнитного поля изменяется по закону  $H_z(0, t) = H_0 e^{-i\omega t}$ , заключаем, что  $A = H_0$ . Определяя вещественную часть комплексной функции, найдем вещественное магнитное поле в образце (рисунок 7).

```

64 - x=0;
65 - Hz(0,t)=Ho.*exp^(-i*wt);
66 - A=Ho;
67 - e=0.001;
68 - for i=n-1:(-1):1
69 -     for j=i+1:n
70 -         if A(i,j)~=0
71 -             Hz(x,t)=Ho.*exp^(-(1-i).*x/bi).*exp^(-i*wt);
72 -         end
73 -     end
74 -     Hz(0,t)=Ho.*exp^(-x/bi).*cos(w.*t-(x./bi));
75 - end

```

Рисунок 7. – Нахождение вещественного магнитного поля  $H_z$

Как видно из графических изображений (рисунок 8), в образце деформационного алюминия наблюдается изменение магнитного поля, причем при перемещении от центра к поверхности образца напряженность магнитного поля увеличивается и достигает значения 225 Э, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность магнитного поля принимает наибольшее значение в 25 Э.

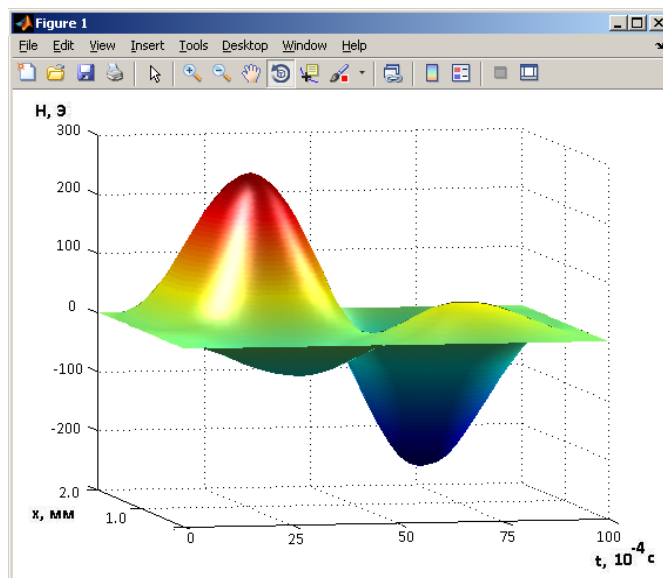
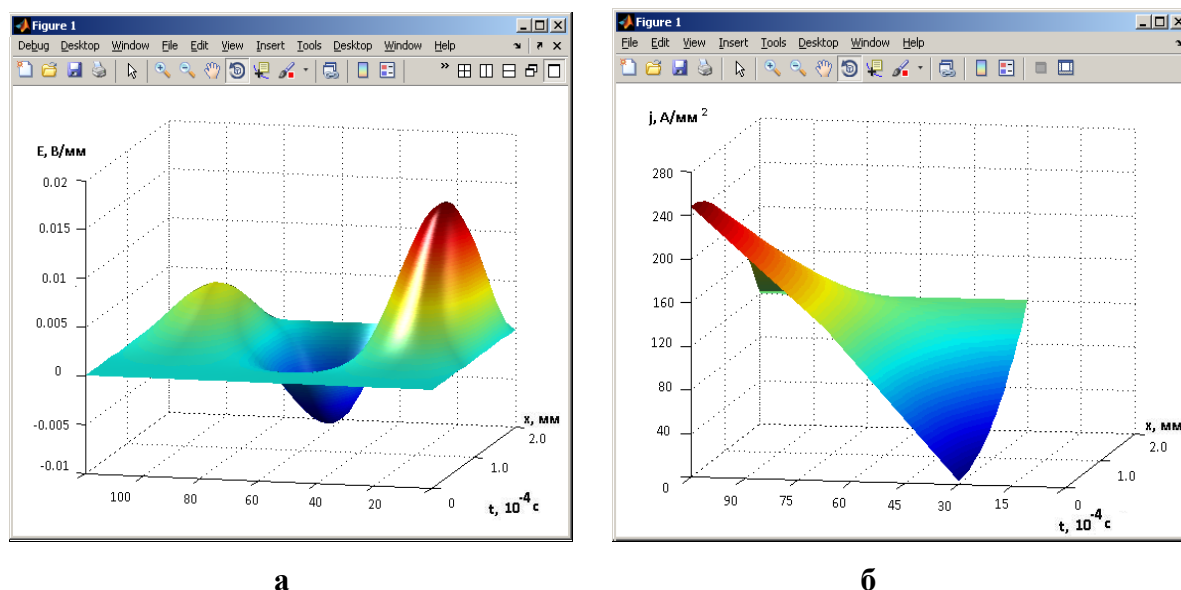


Рисунок 8. – Изменение магнитного поля в образце

Построение графических изображений распределения электрического поля и плотности электрического тока при вторичных пондеромоторных факторах в явлении электропластичности (рисунки 9а, 9б) показали, что напряженность электрического поля изменяется от оси к стенкам и достигает максимального значения 0,025 В/мм, на расстоянии в 1 мм от центра поперечного сечения образца напряженность электрического поля принимает значение в 0,01 В/мм. Плотность тока будет также неравномерно распределяться по сечению образца. Как видно из рисунка 9б, при перемещении от центра к поверхности образца плотность тока увеличивается и достигает максимального значения 320 А/мм<sup>2</sup>.



**Рисунок 9. – Электрическое поле и плотность тока:**  
**а – распределение электрического поля; б – плотности тока в образце**

### Заключение

Рассмотрены физические условия создания пондеромоторных эффектов при электропластической деформации проводящих материалов. Импульсный ток большой плотности, пропущенный через зону деформации, обуславливает виброакустические колебания кристаллической решетки в различных направлениях и дополнительные деформационные напряжения. В условиях электропластичности реализация оптимальных значений пондеромоторных факторов достигается при частотах, когда магнитное поле не успевает существенно проникать в материал, при этом скорость диффузии будет зависеть как от проводимости металла, так и частоты тока. С ростом частоты следования импульсов тока магнитное и электрическое поля смещаются к поверхности образца, а с увеличением радиуса образца наблюдается рост напряженности магнитного поля и уменьшение плотности тока. При одной и той же геометрии образцов пинч-эффект выражен сильнее на материале с более высокой электропроводностью.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савенко, В. С. Вклад пондеромоторных факторов в реализацию электропластической деформации / В. С. Савенко, О. А. Троицкий, А. Г. Силивонец // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2017. – № 1. – С. 85–91.

2. Троицкий, О. А. Физические и технологические основы электропластической деформации металлов : монография / О. А. Троицкий, В. В. Савенко. – Мозырь : МГПУ им. И. П. Шамякина, 2016. – 208 с.
3. Bennett, W. H. Magnetically self-focussing streams / W. H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – № 45. – P. 890.
4. Рошупкин, А. М. О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / А. М. Рошупкин, И. Л. Батаронов // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30, № 11. – С. 3311–3318.
5. Савенко, В. С. Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий : монография / В. С. Савенко. – 2-е изд., доп. и перераб. – Минск : БГАФК, 2003. – 203 с.
6. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю. И. Баранов [и др.]. – М. : МГИУ, 2001. – 844 с.
7. Батаронов, И. Л. О механизме влияния электрического тока на пластическую деформацию металлов / И. Л. Батаронов, А. М. Рошупкин // Физика прочности и пластичности металлов и сплавов : тез. докл. 11 Всесоюз. конф. – Куйбышев, 1986. – С. 87–88.
8. Савенко, В. С. К расчету плотности тока и напряженности магнитного поля в условиях электропластичности / В. С. Савенко, О. А. Троицкий // Электромагнитное поле и материалы : материалы 26-й Междунар. конф. – М. : МЭИ, 2018. – С. 134–138.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.02.2019

**Savenko V. S., Stepaneev N. V. Calculation of Pre-Motor Factors and Their Graphic Images at Electroplastic Deformation of Metals Using the Matlab Package**

*The physical conditions for the creation of ponderomotive effects during electroplastic deformation are studied to obtain materials with a complex of high physicomechanical and service characteristics. It is shown that under electroplasticity conditions, the realization of optimal values of ponderomotive factors is achieved at frequencies when the magnetic field does not have time to significantly penetrate the material, and the diffusion rate will depend on both the conductivity of the metal and the frequency of the current. With increasing pulse repetition frequency, the magnetic and electric fields shift to the sample surface, and with increasing sample radius, the magnetic field strength increases and the current density decreases.*

УДК 512.542

**Д. В. Грицук<sup>1</sup>, А. А. Трофимук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, докторант каф. алгебры и геометрии  
Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины  
e-mail: <sup>1</sup>dmitry.gritsuk@gmail.com; <sup>2</sup>alexander.trofimuk@gmail.com

## **СТРОЕНИЕ $\pi$ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ ИНДЕКСЫ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМКНУТИЙ ИЛИ КОФАКТОРЫ ПОДГРУПП ИЗ ФАКТОРОВ ОГРАНИЧЕНЫ\***

*Установлено, что если порядки кофакторов субнормальных подгрупп либо их индексы в нормальных замыканиях свободны от квадратов, то производная  $\pi$ -длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 2, если  $2 \notin \pi$  и производная  $\pi$ -длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 4, если  $2 \in \pi$ .*

### **Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Хорошо известно, что свойство нормальности подгруппы в группе не является транзитивным. В 1957 году Гашюц [3] установил строение разрешимых групп, у которых нормальность обладает транзитивным свойством ( $t$ -группы). Такие группы можно представить в виде полупрямого произведения нормальной абелевой холловой подгруппы нечетного порядка и дедекиндовой подгруппы.

Группы, близкие к  $t$ -группам, можно определять при помощи дефекта субнормальной подгруппы  $H$ , т. е. длины наименьшего субнормального ряда от подгруппы  $H$  до группы  $G$ . Очевидно, что каждая собственная нормальная подгруппа имеет дефект 1, поэтому в  $t$ -группах все субнормальные подгруппы имеют дефект 1. Группы с субнормальными подгруппами дефекта 2 исследовались в [4].

В теории групп всякую подгруппу  $H$  группы  $G$  можно окружить двумя нормальными в  $G$  подгруппами – нормальным замыканием  $H^G$  и ядром  $H_G$ , где  $H^G$  является наименьшей нормальной в  $G$  подгруппой, содержащей  $H$ , а  $H_G$  – наибольшей нормальной в  $G$  подгруппой, содержащейся в  $H$ . Понятно, что в  $t$ -группах

$$|H^G : H| = |H : H_G| = 1$$

для каждой субнормальной подгруппы  $H$ . Если  $G$  не является  $t$ -группой, то

$$|H^G : H| > 1, |H : H_G| > 1$$

для каждой субнормальной ненормальной подгруппы  $H$ .

В работе [5] Го Вэньбинь, Ху Бинь и В. С. Монахов изучили инварианты разрешимой группы  $G$  в зависимости от значений числовой функции  $t(G)$ , определенной следующим образом:

$$t_p(G) = \max\{n|p^n T|H^G : H|, H \text{ sn } G\}, p \in \pi(G). \\ t(G) = \max_{p \in \pi(G)}(t_p(G)).$$

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).

Следуя Хупперту, будем использовать запись  $p^m T |H^G : H|$  для обозначения того, что  $p^m$  делит  $|H^G : H|$ , а  $p^{m+1}$  не делит  $|H^G : H|$ . Запись  $H \text{ sn } G$  обозначает, что подгруппа  $H$  субнормальна в группе  $G$ .

Если  $t(G) = 0$ , то  $H^G = H$  для всех субнормальных подгрупп  $H$  группы  $G$  и группа  $G$  становится  $t$ -группой. В [5] в зависимости от значений  $t(G)$  найдены верхние границы нильпотентной, производной и  $p$ -длины разрешимой группы  $G$ .

Напомним, что кофактором подгруппы  $H$  группы  $G$  называется факторгруппа  $H/H_G$ .

В работе [6] решена двойственная задача: исследованы инварианты разрешимой группы  $G$  в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп.

В. С. Монаховым в 2006 г. [7] было предложено понятие производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  как наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех субнормальных  $(\pi', \pi)$ -рядов группы  $G$ , где  $\pi$  – некоторое подмножество множества простых чисел  $P$ , а  $\pi'$  – дополнение к  $\pi$  во множестве  $P$ .

В дальнейшем производную  $\pi$ -длину  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  будем обозначать через  $l_\pi^\alpha(G)$ . Если  $\pi(G) = \pi$ , то значение  $l_\pi^\alpha(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ .

В работе [8] изучены свойства производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, в работе [9] исследованы  $\pi$ -разрешимые группы, у которых силовские  $p$ -подгруппы циклические для всех  $p \in \pi$ . В частности, показано, что производная  $\pi$ -длина таких  $\pi$ -разрешимых групп не превышает 2.

Вполне естественно развить рассмотренные выше результаты работ [5] и [6] на случай  $\pi$ -разрешимых групп. Основным результатом является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда  $l_\pi^\alpha(G/\Phi(G)) \leq 2$ , если  $2 \notin \pi$ , и  $l_\pi^\alpha(G/\Phi(G)) \leq 4$ , если  $2 \in \pi$  в каждом из следующих случаев:

- 1) порядок кофактора  $H/H_G$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ ;
- 2) индекс  $|H^G : H|$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ .

### Вспомогательные результаты

Через  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы  $G$  соответственно;  $Z_m$  – циклическая группа порядка  $m$ ;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно, а  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ .

Для доказательства основного результата данной статьи понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $N$  – минимальная нормальная  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $p \in \pi$ . Тогда  $|N| \leq p^2$  в каждом из следующих случаев:

- 1) порядок кофактора  $H/H_G$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ ;
- 2) индекс  $|H^G : H|$  свободен от квадратов, где  $H$  – произвольная субнормальная подгруппа  $G$ .

### Доказательство.

1. Пусть  $M$  – максимальная подгруппа в  $N$ . Тогда  $|N : M| = p$ . Т. к.  $M_G$  – наибольшая нормальная подгруппа в  $G$ , содержащаяся в  $M$ , то  $M_G = 1$  и  $M \cong M/M_G$ . Т. к.  $M$  субнормальна, то по условию  $M$  циклическая и  $|M| \leq p$ , т. к.  $M$  – элементарная абелева подгруппа. Поэтому  $|N| \leq p^2$ .



2. Пусть  $K$  – подгруппа простого порядка в  $N$ . Т. к.  $N$  нормальная примарная группа, то  $K$  субнормальна в  $G$  и  $p^2$  не делит  $|K^G:K|$ . Поскольку  $N$  – минимальная нормальная подгруппа, то  $N = K^G$  и  $|K^G:K| = p$ . Поэтому  $|N| \leq p^2$ . Лемма доказана.

**Лемма 2** [10, леммы 1, 2].

1) Если  $H$  и  $K$  подгруппы группы  $G$  и  $K \subseteq H$ , то  $K_G \leq K_H$ .

2) Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – подгруппа из  $G$  и  $N \subseteq H$ . Тогда  $N \leq H_G$  и  $H_G/N = (H/N)_G$ .

3) Если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$  и  $H$  – подгруппа из  $G$ , то

$$H_G N \leq (HN)_G.$$

4) Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $H$  – подгруппа из  $G$ . Тогда

$$H^G N/N = (H/N)^G.$$

Обозначим, в зависимости от ситуации, через  $F$  класс всех групп, у которых порядки кофакторов  $H/H_G$  свободны от квадратов, где  $H$  – произвольные субнормальные подгруппы из  $G$ , либо класс всех групп, у которых индексы  $|H^G:H|$  свободны от квадратов, где  $H$  – произвольные субнормальные подгруппы из  $G$ .

**Лемма 3.** Класс  $F$  – гомоморф.

Доказательство. Кофактор подгруппы  $H$  в группе  $G$  обозначим  $\text{Cof}_G(H)$ .

Пусть  $\bar{N} = H/N$  – произвольная субнормальная подгруппа группы  $\bar{G} = G/N$ . Тогда  $N \leq H \leq G$  и по лемме 2 (2)

$$\text{Cof}_{\bar{G}}(\bar{N}) \simeq (H/N)/(H_G/N) \simeq H/H_G \simeq \text{Cof}_G(H).$$

По лемме 2 (4) получаем

$$|(H/N)^G:H/N| = |H^G/N:H/N| = |H^G:H|.$$

Лемма доказана.

**Лемма 4** [8, лемма 4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $t$  – натуральное число. Предположим, что  $l_\pi^a(G/N) \leq t$  для всех неединичных нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$ , но  $l_\pi^a(G) > t$ . Тогда:

1)  $O_{\pi'}(G) = 1$ ;

2) в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа;

3)  $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$  для некоторого простого  $p \in \pi$ ;

4)  $O_{p'}(G) = 1$  и  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ .

**Лемма 5** [11, теорема 3.1]. Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа с силовской  $p$ -подгруппой порядка  $p^n$ . Тогда

1) если  $p \notin \{2,3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$ ;

2) если  $p \in \{2,3\}$ , то  $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$ .

**Лемма 6** [8, теорема 2]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  – ее  $\pi$ -холлова подгруппа. Если  $G_\pi$  абелева, то  $l_\pi^a(G) \leq 1$ .

Для  $p$ -разрешимой группы  $G$  Холл и Хигмен ([1, теорема VI.6.6]) доказали, что  $l_p(G) \leq r_p(G)$ , где  $r_p(G)$  – главный  $p$ -ранг группы  $G$ . Этот результат уточняет

**Лемма 7** [12, теорема 2]. Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа. Если  $l_p(G) = r_p(G)$ , то либо  $r_p(G) = 1$  либо  $r_p(G) = 2$  и  $p \in \{2,3\}$ . В частности, если  $r_p(G) \geq 3$ , то  $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$ .

**Лемма 8.** Пусть  $G$  –  $p$ -разрешимая группа и силовская  $p$ -подгруппа  $P$  имеет порядок  $p^3$ . Тогда  $l_p(G) \leq 1$  при  $p > 3$ .

Доказательство. Т. к.  $|P| = p^3$ , то  $r_p(G) \leq 3$ . Если  $r_p(G) = 3$ , то силовская подгруппа  $P$  абелева и  $l_p(G) \leq 1$ . Если  $r_p(G) = 2$ , то  $l_p(G) \leq r_p(G) = 2$ . Если  $l_p(G) = 2$ , то по лемме 7  $p \in \{2, 3\}$ . Поэтому  $l_p(G) \leq 1$  для  $p > 3$ .

Если  $r_p(G) = 1$ , то  $l_p(G) \leq r_p(G) = 1$ . Лемма доказана.

**Лемма 9** [11] Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ . Тогда

$$l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G).$$

### Доказательство теоремы

Пусть  $2 \notin \pi$ . Предположим, что  $G$  – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условию, для которой оценки из заключения теоремы не выполняются. По лемме 3 каждая фактор-группа  $G/N$  наследует условия теоремы.

Предположим, что  $\Phi(G) \neq 1$ . Тогда, если  $2 \notin \pi$ , то

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) = l_\pi^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \leq 2$$

и, если  $2 \in \pi$ , то

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) = l_\pi^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \leq 4.$$

Поэтому в дальнейшем считаем, что  $\Phi(G) = 1$  и по лемме 4 в группе  $G$  существует только одна минимальная нормальная подгруппа  $N$ ,

$$N = F(G) = O_p(G) \text{ и } C_G(F(G)) = F(G).$$

Тогда по лемме 1  $|N| \leq p^2$ .

Если  $|N| = p$ , то фактор-группа  $G/N$  изоморфна подгруппе циклической группы порядка  $p - 1$ . Поэтому холлова  $\pi$ -подгруппа  $G_\pi/N$  группы  $G/N$  является циклической, где  $G_\pi$  – холлова  $\pi$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда по лемме 6  $l_\pi^a(G/N) \leq 1$ . Т. к. подгруппа  $N$  абелева, то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

Если  $|N| = p^2$ , то фактор-группа  $G/N$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, p)$ , силовская  $p$ -подгруппа которой имеет порядок  $p$ . Поэтому силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  имеет порядок  $p^3$ . Очевидно, что  $l_p(G) > 1$ . Из леммы 8 следует, что  $p = 3$ , т. к.  $2 \notin \pi$ . Поэтому  $G/N$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2, 3)$  и  $|GL(2, 3)| = 2^4 \cdot 3$ . Значит,  $\pi = \{3\}$ , т. к.  $2 \notin \pi$ , и силовская 3-подгруппа имеет порядок  $3^3$ . По лемме 5  $l_\pi^a(G) = l_3^a(G) \leq 2$ .

Пусть  $\pi_1 = \pi \setminus \{2\}$ . По лемме 9 получим, что

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq l_{\pi_1}^a(G/\Phi(G)) + l_2^a(G/\Phi(G)) \leq 2 + 2 = 4.$$

Теорема доказана.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 322 с.
3. Gaschütz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
4. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

5. Guo, W. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups / W. Guo, B. Hu, V. S. Monakhov // Commun. Algebra. – 2004. – Vol. 33, № 3. – P. 855–863.
6. Monakhov, V. S. On cofactors of subnormal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 9. – P. 650169-1–1650169-9.
7. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – P. 573–581.
8. Грицук, Д. В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
9. Monakhov, V. S. On derived  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with supersolvable  $\pi$ -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, 2. – P. 233–241.
10. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.
11. Грицук, Д. В. Зависимость производной  $p$ -длины  $p$ -разрешимой группы от порядка ее силовской  $p$ -подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.
12. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.03.2019

**Gritsuk D. V., Trofimuk A. A. The Structure of a  $\pi$ -Soluble Group in which the Indices of Normal Closure or Cofactors of Subgroups of the Factors are Limited**

*The structure of  $\pi$ -soluble groups with limited the indices of normal closures or cofactors of subgroups of the factors was investigated. It is established that if the orders of cofactors of subnormal subgroups or their indices in normal closures are square-free, then the derived  $\pi$ -length of the factor group  $G/\Phi(G)$  does not exceed 2, if  $2 \notin \pi$  and the derivative  $\pi$  is the length of the factor group  $G/\Phi(G)$  does not exceed 4 if  $2 \in \pi$ .*

УДК 519.6 + 517.983.54

**О. В. Матысик**

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: matysikoleg@mail.ru

**ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ НЕЯВНОГО ТИПА**

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Изучен случай неединственного решения операторного уравнения. Показано, что в этом случае итерационный метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода Ландвебера.

**1. Постановка задачи.** В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \quad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль является собственным значением оператора  $A$ , т. е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что  $y \in R(A)$ , т. е. при точной правой части  $y$  уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для решения задачи предлагается неявный итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A(y - Ax_{n+1}), \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

**2. Сходимость неявного метода итераций в случае неединственного решения уравнения.** Обозначим через  $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ ,  $M(A)$  – ортогональное дополнение ядра  $N(A)$  до  $H$ . Пусть  $P(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $N(A)$ , а  $\Pi(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $M(A)$ . Справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $A \geq 0$ ,  $y \in H$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$ , тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:

а)  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ ,  $\|Ax_n - y\| \rightarrow J(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$ ;

б) приближения (2) сходятся тогда и только тогда, когда уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. В последнем случае  $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение.

Доказательство.

Применим оператор  $A$  к (2), уменьшив в формуле (2) индекс на единицу. Получим  $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2(y - Ax_n)$ , отсюда  $A(E + \alpha A^2)x_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 y$ , где  $y = P(A)y + \Pi(A)y$ . Т. к.  $AP(A)y = 0$ , то имеем  $(E + \alpha A^2)(Ax_n - \Pi(A)y) =$

$= Ax_{n-1} - \Pi(A)y$ . Обозначим  $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$ ,  $v_n \in M(A)$ , тогда  $(E + \alpha A^2)v_n = v_{n-1}$ . Отсюда  $v_n = (E + \alpha A^2)^{-1} v_{n-1}$ , следовательно,  $v_n = (E + \alpha A^2)^{-n} v_0$ . Имеем  $A \geq 0$  и  $A$  – положительно определен в  $M(A)$ , т. е.  $(Ax, x) > 0$  для  $\forall x \in M(A)$ . Т. к.  $\alpha \in (0, +\infty)$ , то  $\left\| (E + \alpha A^2)^{-1} \right\| \leq 1$ , поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \left\| (E + \alpha A^2)^{-n} v_0 \right\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} \right\| \leq \left\| \int_0^\tau \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} \right\| + \left\| \int_\tau^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} \right\| \leq \left\| \int_0^\tau dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ q^n(\tau) \left\| \int_\tau^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \|E_\tau v_0\| + q^n(\tau) \|v_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$  ( $E_\tau$  сильно стремится к 0 в силу свойств спектральной функции [1]).

Здесь  $(1 + \alpha \lambda^2)^{-1} \leq q(\tau) < 1$  при  $\lambda \in [\tau, \|A\|]$ . Следовательно,  $v_n \rightarrow 0$ , откуда  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$  и  $\Pi(A)y \in A(H)$ . Отсюда справедливо записать  $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A, y)$  [2; 3]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть приближения (2) сходятся. Покажем, что уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. Из сходимости  $\{x_n\} \in H$  к  $z \in H$  и из а) следует, что  $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$ , поэтому  $\Pi(A)y \in A(H)$  и уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо.

Пусть теперь  $\Pi(A)y \in A(H)$  (уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо), следовательно,  $\Pi(A)y = Ax^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение уравнения (1) (оно единственно в  $M(A)$ ). Тогда метод (2) примет вид:

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \alpha A(y - Ax_n), \quad (E + \alpha A^2)x_n = x_{n-1} + \alpha Ay, \\ (E + \alpha A^2)x_n &= x_{n-1} + \alpha A \Pi(A)y = x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} - \\ &- \alpha A^2 x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = (E + \alpha A^2)x_{n-1} + \alpha A^2(x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда  $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2 (E + \alpha A^2)^{-1} (x^* - x_{n-1})$ .

Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha (E + \alpha A^2)^{-1} A^2 P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0.$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha (E + \alpha A^2)^{-1} A^2 \Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} +$$

$$+\alpha(E+\alpha A^2)^{-1} A^2 \left[ \Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1} \right] = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha(E+\alpha A^2)^{-1} A^2 \left[ x^* - \Pi(A)x_{n-1} \right],$$

т. к.  $x^* \in M(A)$ .

Обозначим  $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$ , тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha(E+\alpha A^2)^{-1} A^2 \left[ x^* - \Pi(A)x_{n-1} \right]$$

получим

$$\Pi(A)x_n - x^* = w_n = w_{n-1} - \alpha(E+\alpha A^2)^{-1} A^2 w_{n-1} = (E+\alpha A^2)^{-1} w_{n-1} = (E+\alpha A^2)^{-n} w_0$$

и, аналогично  $v_n$ , покажем, что  $w_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Т. к.  $\alpha \in (0, +\infty)$ ,  $(Ax, x) > 0$  для  $\forall x \in M(A)$ , то  $\left\| (E+\alpha A^2)^{-1} \right\| \leq 1$ , и поэтому

$$\begin{aligned} \|w_n\| &= \left\| (E+\alpha A^2)^{-n} w_0 \right\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{dE_\lambda w_0}{(1+\alpha\lambda^2)^n} \right\| \leq \left\| \int_0^\xi \frac{dE_\lambda w_0}{(1+\alpha\lambda^2)^n} \right\| + \left\| \int_\xi^{\|A\|} \frac{dE_\lambda w_0}{(1+\alpha\lambda^2)^n} \right\| \leq \left\| \int_0^\xi dE_\lambda w_0 \right\| + \\ &+ q^n(\xi) \left\| \int_\xi^{\|A\|} dE_\lambda w_0 \right\| \leq \|E_\xi w_0\| + q^n(\xi) \|w_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty, \xi \rightarrow 0$ . Здесь  $(1+\alpha\lambda^2)^{-1} \leq q(\xi) < 1$  при  $\lambda \in [\xi, \|A\|]$ . Таким образом,

$\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$ . Отсюда получим  $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$ . Теорема 1 доказана.

**Замечание 1.** Т. к. у нас  $x_0 = 0$ , то  $x_n \rightarrow x^*$ , т. е. итерационный процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

### 3. Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ , следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для отыскания решения используется метод (2).

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближенно, т. е. вместо  $y$  известно  $\delta$ -приближение  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$ . Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

Сходимость методов (2) и (3) в исходной норме пространства  $H$  была изучена в [4]. Там показано, что метод (3) сходится при условии  $\alpha \in (0, +\infty)$ , если число итера-

ций  $n$  выбирать в зависимости от уровня погрешности  $\delta$  так, чтобы  $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е.  $x = A^s z, s > 0$ , в работе [4] получена оценка погрешности метода итераций (3):  $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} (4n\alpha)^{-s/2} \|z\| + 2\sqrt{n\alpha}\delta, n \geq 1$ . Минимизация по  $n$  полученной оценки дает оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \cdot s^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)},$$

которая получается при  $n_{\text{опт}} = 2^{-2} s^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} \|z\|^{2/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)}$ .

Оптимальная оценка погрешности имеет порядок  $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ , и, как следует из монографии [5], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями  $x = A^s z, s > 0$ . Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций Ландвебера  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0$  [2; 3; 5–14] показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы.

Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом случае явный метод предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В указанном явном методе на параметр  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может привести к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на  $\alpha \in (0, +\infty)$  нет. Это позволяет считать  $\alpha \in (0, +\infty)$  произвольно большим (независимо от  $\|A\|$ ). в связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И, тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$  [3, 8]. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме.

Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде  $x - x_n = A^{-1} (E + \alpha A^2)^{-n} y = (E + \alpha A^2)^{-n} x$ .

Как было показано в [4],  $x - x_n$  мало в исходной норме гильбертова пространства  $H$  при  $n \rightarrow \infty$ , но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится.

Действительно, с помощью интегрального представления оператора  $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$ ,

где  $M = \|A\|$  и  $E_\lambda$  – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left( A(E + \alpha A^2)^{-n} x, (E + \alpha A^2)^{-n} x \right) = \int_0^M \lambda \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^{2n}} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции  $f(\lambda) = \frac{\lambda}{(1 + \alpha \lambda^2)^{2n}}$  при  $\lambda \in [0, M]$ . Функция  $f(\lambda)$  – частный случай при  $s = 1$

функций, оцененных в работе [4]. Там показано, что при условии  $\alpha \in (0, +\infty)$

$$\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq (8n\alpha)^{-1/2}.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка  $\|x - x_n\|_A^2 \leq (8n\alpha)^{-1/2} \|x\|^2$ . Отсюда  $\|x - x_n\|_A \leq (8n\alpha)^{-1/4} \|x\|$ . Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокорпредставимости порядка  $s = 1/2$  для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [4], справедливо равенство  $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] (y - y_\delta)$ . Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} \left[ 1 - (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через  $g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} \right]^2$  подынтегральную функцию, а через  $g_1(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} \right]$ , тогда  $g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[ 1 - (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} \right]$ . Функция  $g_1(\lambda)$  была оценена в [4], где показано, что при условии  $\alpha \in (0, +\infty)$   $g_1(\lambda) \leq 2\sqrt{n\alpha}$ . При  $\alpha \in (0, +\infty)$  имеем  $\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq 1, \forall \lambda \in [0, M]$ , поэтому  $1 - (1 + \alpha \lambda^2)^{-n} \leq 1$ .

Отсюда  $g(\lambda) \leq 2\sqrt{n\alpha}$ . Таким образом,  $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 2\sqrt{n\alpha} \delta^2$ , следовательно,  $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \sqrt[4]{4n\alpha} \delta, n \geq 1$ .

Поскольку  $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  и

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \sqrt[4]{4n\alpha} \delta,$$



то для сходимости  $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  достаточно, чтобы  $\sqrt[4]{n\delta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .

Итак, доказана

**Теорема 2.** При условии  $\alpha \in (0, +\infty)$  итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбрать из условия  $\sqrt[4]{n\delta} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода итераций (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \sqrt[4]{(8n\alpha)^{-1}} \|x\| + \sqrt[4]{4n\alpha\delta}, n \geq 1. \quad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по  $n$ . Для этого при заданном  $\delta$  найдем такое значение числа итераций  $n$ , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по  $n$  от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-5/2} \alpha^{-1} \left( \delta^{-1} \|x\| \right)^2. \quad (6)$$

Подставив  $n_{\text{опт}}$  в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{7/8} \sqrt{\delta \|x\|}. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии  $\alpha \in (0, +\infty)$  в энергетической норме имеет вид (7) и получается при  $n_{\text{опт}}$  из (6).

**Замечание 2.** Из неравенства (7) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра  $\alpha$ . Но  $n_{\text{опт}}$  зависит от  $\alpha$  и, поскольку на  $\alpha$  нет ограничений сверху ( $\alpha \in (0, +\infty)$ ), то за счет выбора  $\alpha$  можно получить  $n_{\text{опт}} = 1$ , т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять  $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-5/2} \left( \delta^{-1} \|x\| \right)^2$ .

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства  $H$ . Эти условия дает

**Теорема 4.** Если выполнены условия 1)  $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ , 2)  $E_\varepsilon x = 0$ , где  $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$ ,

$\varepsilon$  – фиксированное положительное число ( $0 < \varepsilon < \|A\|$ ), то из сходимости  $x_{n,\delta}$  к  $x$  в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Доказательство

Т. к. по условию теоремы  $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$  и  $E_\varepsilon x = 0$ , то имеем  $E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x) = 0$

и  $(E_\varepsilon (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$ , т. е.  $\int_0^\varepsilon d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$ . Следовательно,

$\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$ . Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \|x_{n,\delta} - x\|^2 &= \int_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = \\ &= \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x_{n,\delta} - x\|_A^2. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

**Замечание 3.** Т. к.  $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ E - (E + \alpha A^2)^{-n} \right] y_\delta$ , то для того, чтобы  $x_{n,\delta}$

удовлетворяло условию  $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ , достаточно потребовать, чтобы  $E_\varepsilon y_\delta = 0$ . Таким образом, если  $E_\varepsilon x = 0$  и  $E_\varepsilon y_\delta = 0$ , то из сходимости метода итераций (3) в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства  $H$ , следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокообразной представимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором  $A$  следует перейти к уравнению  $A^* A x = A^* y$ . Тогда при приближенном элементе  $y_\delta$  метод (3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^* A \left( A^* y_\delta - A^* A x_{n+1,\delta} \right), \quad x_{0,\delta} = 0.$$

Предложенный метод может быть применен для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в томографии, математической экономике, акустике, сейсмике, спектроскопии, диагностике плазмы.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
2. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
3. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
4. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Вісн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.
5. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
6. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
7. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
8. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

9. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
10. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных уравнений первого рода / О.В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. П. Е. Алексеева. – 2015. – № 4 (111). – С. 52–61.
11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – № 2 (119). – P. 33–41.
12. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. П. Е. Алексеева. – 2016. – № 2 (113). – С. 47–54.
13. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в методе простых итераций с попеременно чередующимся шагом решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Изв. Смолен. гос. ун-та. – 2015. – № 5 (33). – С. 58–66.
14. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, № 3. – P. 373–389.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.04.2019

***Matysik O. V. The Iterative Regularization of Linear Incorrect Equations of the First Kind by the Method of Implicit Type***

*In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and self-conjugate operator the implicit iteration method is proposed. The case of non-uniqueness of solving operator equation is investigated. It is shown, that in this case the iteration method converges to the decision with the minimal norm. In energy norm of Hilbert space for the proposed method convergence is proved and a priori estimations of this method error have been received. Use of energy norm allows to make a method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution of the equation. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of Landweber has been done.*

УДК 378.147:51

**И. Н. Мельникова<sup>1</sup>, В. В. Войтович<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [375298029207@mail.ru](mailto:375298029207@mail.ru)**НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ  
ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ  
К ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ**

*При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук, а также при решении прикладных физических задач требуется знание математики на достаточно высоком уровне. Поэтому при изучении математических предметов у физиков необходимо математические понятия рассматривать в тесной связи с физическими понятиями. В публикации проводится изучение дифференциальных уравнений и их систем на примерах физических задач с целью более глубокого усвоения этих понятий.*

Физико-математические факультеты университетов уделяют большое внимание изучению дифференциальных уравнений, требующих формального их решения, а также решению технических и прикладных задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения играют значительную роль в приложениях математики к техническим наукам. С помощью данных уравнений многие прикладные процессы описываются полнее. Они помогают решать многие вопросы общетехнических, а также специальных прикладных дисциплин: физики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производств, биологии, т. к. дифференциальные уравнения часто возникают в процессе решения данных вопросов.

Многочисленные и разнообразные технические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют глубокого знания разных физических и математических законов.

При помощи задач инженерно-технического характера появляется возможность овладеть методами решения дифференциальных уравнений. Упомянутые выше задачи облегчают изучение ряда важнейших дисциплин, которые являются основой образования специалиста любой отрасли.

**Задача.** Найти формулу критических скоростей тонкого вращающегося вала длиной  $l$ . Радиус поперечного сечения вала  $a$ , вес  $P$  и модуль упругости материала  $E$ .

**Решение.**

1) При увеличении угловой скорости вращающегося вала от значения  $\omega = 0$  до некоторого предельного значения  $\omega = \omega_1$ , называемого критической угловой скоростью, вал сохраняет свою прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости  $\omega_1$  вал искривляется и начинает бить. При дальнейшем увеличении  $\omega$  биение прекращается, а затем вновь возникает при второй критической скорости  $\omega_2$ , и так периодически.

2) При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент  $d\xi$  вала (рисунок) действует центробежная сила  $F = m\omega^2\eta$ , где  $m$  – масса элемента  $d\xi$ ,  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $\eta$  – прогиб, равный радиусу вращения элемента  $d\xi$ .

Вес элемента  $d\xi$  равен  $\frac{P}{l}d\xi$ , а масса  $m = \frac{P}{gl}d\xi$ . Таким образом, элементарная центробежная сила  $dF = \frac{P}{gl}\omega^2 \cdot \eta \cdot d\xi$ . Прогиб  $\eta$  является функцией  $\xi$ , определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, выражение  $\frac{P}{gl} \cdot \omega^2 \eta = f(\xi)$

и окончательно элементарная центробежная сила

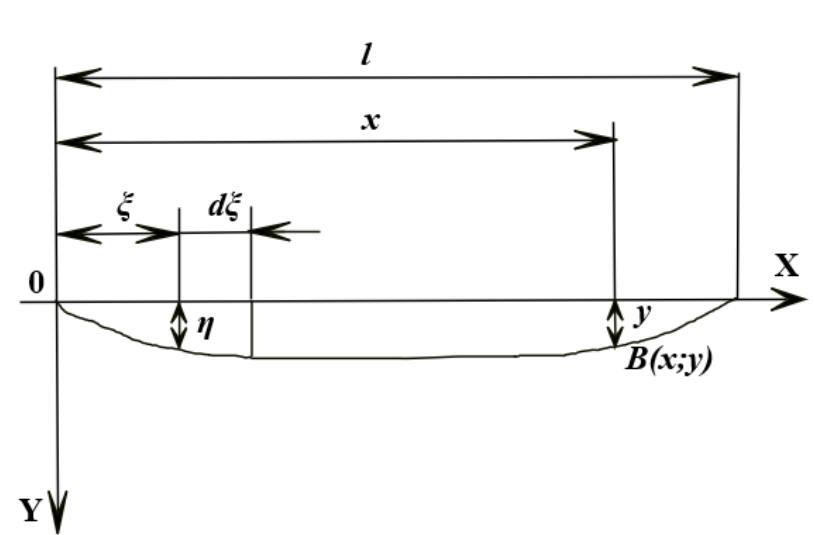
$$dF = f(\xi)d\xi = \frac{P}{gl} \cdot \omega^2 \eta d\xi. \quad (1)$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения  $B$  будет:

$$dF \cdot (x - \xi) = (x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi.$$



Рисунок

Дифференцируя под знаком интеграла дважды это выражение по параметру  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= \int_0^x f(\xi) d\xi + (x-x)f(x) \frac{dx}{dx} - (x-0)f(0) \frac{d}{dx} = \\ &= \int_0^x f(\xi) d\xi; \\ \frac{d^2M}{dx^2} &= \int_0^x 0 \cdot d\xi + f(x) \frac{dx}{dx} - f(0) \frac{d}{dx}(0) = f(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Т. к. на основании равенства (1)  $f(x) = \frac{P}{gl} \omega^2 y$ , то выражение (2) примет вид:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{P\omega^2}{gl} y.$$

Получаем дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{P\omega^2}{EJgl} y = 0. \quad (3)$$

Вводим обозначение  $\frac{P\omega^2}{EJgl} = q^4$ . Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - q^4 y = 0.$$

Решая это неполное линейное уравнение четвертого порядка, получаем характеристическое уравнение:

$$r^4 - q^4 = 0,$$

или

$$(r - q)(r + q)(r^2 + q^2) = 0.$$

Корнями характеристического уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= q, \\ r_2 &= -q, \\ r_3 &= qi, \\ r_4 &= -qi. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии вала будет:

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \sin qx + C_4 \cos qx. \quad (4)$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  используем граничные условия задачи. На открытых концах вала прогиб и кривизна оси вала равна нулю. Математически это выражается четырьмя граничными условиями:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ при } x = 0, y = 0, \\ 2) \text{ при } x = 0, \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \\ 3) \text{ при } x = l, y = 0, \\ 4) \text{ при } x = l, \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \end{array} \right\}$$

Дифференцируя дважды общее решение (4), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} + C_3 q \cos qx - C_4 q \sin qx, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} - C_3 q^2 \sin qx - C_4 q^2 \cos qx. \end{array} \right\}$$

Граничные условия дают следующую систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 e^{q \cdot 0} + C_2 e^{-q \cdot 0} + C_3 \sin(q \cdot 0) + C_4 \cos(q \cdot 0) = 0, \\ C_1 q^2 e^{q \cdot 0} + C_2 q^2 e^{-q \cdot 0} - C_3 q^2 \sin(q \cdot 0) - C_4 q^2 \cos(q \cdot 0) = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0 \end{array} \right\}$$

или

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \sin ql - C_4 \cos ql = 0. \end{array} \right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем:

$$\left. \begin{array}{l} C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0, \end{array} \right\} \quad (5)$$

или

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = -C_1, \\ C_4 = 0. \end{array} \right\}$$

Поступая аналагічна с двумя последующими уравнениями той же системы, получим:

$$\left. \begin{aligned} C_3 \sin ql + C_4 \cos ql &= 0, \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя выражение (5) в (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} C_3 \sin ql &= 0, \\ C_1 (e^{ql} - e^{-ql}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Т. к. при  $l \neq 0$  и  $q \neq 0$  последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то окончательно имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 &= 0, \\ C_4 &= 0, \\ C_3 \sin ql &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Если  $C_3 = 0$ , то уравнение упругой линии вала будет  $y = 0$ , т. е. упругая линия совпадает с осью  $x$  и вал не искривлен. При искривлении вала необходимо, чтобы  $C_3 \neq 0$ . Но тогда, очевидно, необходимо, чтобы

$$\sin ql = 0.$$

Отсюда  $ql = k\pi$  и  $q = \frac{k\pi}{l}$ , где  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

При  $k = 0$  получим  $q = 0$ , и уравнение упругой линии вала будет:

$$y = C_1 + C_2 + C_4 = 0 \text{ – вал прямой.}$$

При остальных значениях  $q$  вал искривляется. В таких случаях уравнение упругой линии

$$y = C_3 \sin ql, \text{ при } q = q_1 = \frac{\pi}{l}; q = q_2 = \frac{2\pi}{l}; q = q_3 = \frac{3\pi}{l}.$$

Упругая линия будет синусоидой:

$$\left. \begin{aligned} y &= C_3 \sin \frac{\pi}{l} x, \\ y &= C_3 \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ y &= C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x, \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$



содержащей по длине вала 1, 2, 3 и больше полуволн. Таким образом, при критическом значении

$$q_{кр} = \frac{k\pi}{l}$$

упругая линия будет синусоидой с  $k$  полуволнами по длине.

Вернемся к ранее введенному обозначению

$$q^4 = \frac{P\omega^2}{EJgl}.$$

Подставляя в это последнее равенство критические значения  $q_{кр}$  и  $\omega_{кр}$ , получим:

$$q_{кр}^4 = \frac{P\omega_{кр}^2}{EJgl}, \quad \frac{k^4\pi^4}{l^4} = \frac{P\omega_{кр}^2}{EJgl}$$

или

$$\omega_{кр} = \frac{k^2\pi^2}{l} \sqrt{\frac{EJg}{Pl}}.$$

Вычислим момент инерции площади сечения вала. Момент инерции  $J$  материальной точки относительно оси представляет собой, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции всей площади поперечного сечения вала выражается формулой:

$$J = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum R^2 \Delta m = \int R^2 dm,$$

где  $\Delta m$  – масса элементарной частицы;  $R$  – расстояние какой-либо точки элементарной частицы от оси,  $dm$  – дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для вала) при плотности  $\rho = 1$ .

В общем случае  $dm = \rho dv$  и  $J = \rho \int R^2 dv$ .

Момент инерции  $J$  всей площади поперечного сечения вала относительно диаметра будет:

$$J = \frac{\rho\pi a^4}{4}.$$

Эту величину можно получить из справочных таблиц или вычислить при помощи определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра.

Масса вала равна  $m = \rho\pi a^2 l = \frac{P}{g}$ .

Таким образом, момент инерции сечения вала  $J = \frac{Pa^2}{4gl}$ , и для определения критической скорости получим выражение  $\omega_{кр} = \frac{k^2 \pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}$ .

Минимальная критическая скорость будет:  $\omega_1 = \frac{\pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}$ .

Вычислим момент инерции площади поперечного сечения стального вала  $J$  для конкретных данных:  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$ ,  $l = 0,5 (\text{м})$ ,  $R = a = 0,5 \cdot 10^{-2} (\text{м})$  и для модуля упругости стали  $E = 21 \cdot 10^{10} \left( \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right)$ .

$$J = \frac{\rho \cdot 3,14 \cdot a^4}{4} = \frac{7,8 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^4}{4} = 3,82 \cdot 10^{-6}.$$

Для определения критической скорости возьмем  $k = 2$ .

$$\omega_{кр} = \frac{2^2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,5^2} \sqrt{21 \cdot 10^{10}} = 180729,44.$$

Тогда минимальная критическая скорость будет равна

$$\omega_1 = \frac{3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,5^2} \sqrt{21 \cdot 10^{10}} = 45182,36.$$

Затем для определения критической скорости возьмем  $k = 1$ .

$$\omega_{кр} = \frac{1^2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,5^2} \sqrt{21 \cdot 10^{10}} = 45182,36.$$

$$\omega_{кр} = \frac{3^2 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,5^2} \sqrt{21 \cdot 10^{10}} = 406641,26.$$

Задачи подобного типа могут быть полезны преподавателям старших классов средней школы при проведении занятий в математических кружках, а также студентам высших технических учебных заведений.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронков, И. М. Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – М., 1995. – 595 с.
2. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – М., 1957. – 425 с.

4. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 3-е изд. – Минск : Наука и техника, 1979. – 572 с.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
6. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 717 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.10.2019

***Melnikova I. N., Voytovich V. V. Some Applications of the Theory of Differential Equations and Their Systems to Physical Processes***

*When studying natural phenomena, solving many problems of physics and technology, chemistry and biology, other sciences, knowledge of mathematics at a sufficiently high level is required, as well as the ability to use this knowledge in solving applied physical problems. Therefore, when studying mathematical subjects at physicists, it is necessary to consider mathematical concepts in close connection with physical concepts. The publication studies differential equations and their systems using physical problems as examples to better understand these concepts.*

УДК 517.9

**А. Н. Сендер**

канд. физ.-мат. наук, доц.,

зав. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: alexander\_sender@tut.by

**P-АДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ КАК АППАРАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ  
ЛОКАЛЬНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$** 

Рассматривается приближение непрерывных  $p$ -адических функций  $p$ -адического аргумента с помощью сплайнов, имеющих следующий вид:  $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , где их параметры определяются из интерполяционных отношений с помощью приближенной функции. Теорема о равномерной сходимости приближения непрерывной функции с помощью сплайнов доказывается для различных  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

В теории чисел наряду с полем действительных чисел огромную роль играет поле  $p$ -адических чисел [1; 2], на котором возможно построение нетривиального анализа. А.М. Островский доказал, что на поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  имеются только два существенно разных нормирования: обычный модуль  $|\cdot|$  и  $p$ -адическая норма  $|\cdot|_p$ .

Пусть  $p$  – простое число,  $x \in \mathbb{Q}$ . В поле  $\mathbb{Q}$  введем норму по правилу

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где  $\gamma(x)$  определяется из представления  $x = p^\gamma \frac{m}{n}$ ,  $m, n, \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Q}$  и числа  $m$  и  $n$  взаимно просты с  $p$ .

Норма  $|x|_p$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $|x|_p \geq 0$ , если  $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- 2)  $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ ;
- 3)  $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ .

В случае когда  $|x|_p \neq |y|_p$ , мы имеем равенство  $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$ . Определенная таким образом норма  $|x|_p$  называется  $p$ -адической нормой. Поле  $\mathbb{Q}$ , пополненное по  $p$ -адической норме, называется полем  $p$ -адических чисел. Поле  $\mathbb{Q}$ , пополненное по обычному модулю называется полем вещественных чисел.

Существует несколько реализаций  $p$ -адических чисел, одну из которых мы только что упомянули. Приведем другую их реализацию.  $P$ -адическим числом называется формальный степенной ряд вида  $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$ , где  $0 \leq x_k \leq p-1$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  и  $x_N \neq 0$ . Множество таких чисел обозначается через  $\mathbb{Q}_p$ . Целой частью  $p$ -адического числа называется число вида  $[x]_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$ , а дробной частью – число вида

$\{x\}_p = \sum_{k=N}^{-1} x_k p^k$ . Множество чисел с нулевой дробной частью называется целыми  $p$ -адическими числами и обозначается через  $\mathbb{Z}_p$ .

Теперь, когда мы уже определили  $p$ -адические числа как формальные степенные ряды, то норму в  $\mathbb{Q}_p$  можно переписать в виде:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-N}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, формальные степенные ряды, являющиеся элементами  $\mathbb{Q}_p$ , сходятся по  $p$ -адической норме. Теперь приведем основные свойства  $\mathbb{Q}_p$ : все треугольники равнобедренные и остроугольные, т. е. если одна сторона треугольника меньше другой, то третья равна большей; каждый шар в  $\mathbb{Q}_p$  является открыто-замкнутым; каждая точка шара является его центром; для двух шаров в  $\mathbb{Q}_p$  возможны две ситуации: два шара либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом;  $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$  – компактное открытое множество (обычно компакт замкнут).

Следует отметить, что  $\mathbb{Q}_p$  и  $\mathbb{R}$  являются полными и локально-компактными, но  $\mathbb{R}$  – является связным, а  $\mathbb{Q}_p$  – вполне несвязно. Из указанных свойств  $\mathbb{Q}_p$  как ультраметрического пространства вытекает его полная несвязность.

Сформулируем теорему о равномерном приближении непрерывной функции локально-постоянной функцией.

**Теорема 1** [3]. Пусть  $X \subset \mathbb{Z}_p$  и  $f : X \rightarrow \mathbb{Q}_p$  – непрерывная функция. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая локально-постоянная функция  $g$ , что для любого  $x \in X$   $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$ .

Теорией аппроксимации в неархимедовом анализе (в частности,  $p$ -адическом) занимались многие математики, однако большинство работ по  $p$ -адической интерполяции и аппроксимации посвящены обобщению интерполяционных теорем Дьедонне и Малера либо являются частными случаями теоремы Стоуна – Вейерштрасса.

Одной из задач исследования является нахождение сплайна, который равномерно приближал бы функцию из пространства  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ . По теореме 1 любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально-постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на  $\mathbb{Z}_p$ . Но т. к.  $\mathbb{Z}_p$  является компактом, то локально-постоянная функция есть конечная линейная комбинация индикаторов шаров. Более того, индикатор является непрерывной функцией и конечные линейные комбинации индикаторов шаров плотны в  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ . Поэтому чтобы равномерно приблизить сплайнами произвольную непрерывную функцию, достаточно уметь приближать  $p$ -адическими сплайнами индикатор шара, лежащего в единичном шаре, т. е. в  $\mathbb{Z}_p$ .

Данная работа посвящена приближению непрерывной функции  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{K}$ , где  $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$ , по норме  $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p$ .  $\mathbb{K}$  – трансцендентное расширение поля  $\mathbb{Q}_p$ , содержащее  $\mathbb{Q}_p$  и  $p^\alpha$ , т. е.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \mathbb{Q}_p((p^\alpha)) = \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^{\alpha k}, x_k \in \mathbb{Q}_p \right\} = \\ &= \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} \left( \sum_{j=n_k}^{\infty} x_{k,j} p^j \right) p^{\alpha k}, x_{k,j} \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\} = \\ &= \begin{cases} \sum_{(k,j) \in Q(x) \subset \mathbb{Z}^2 / \sim} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \text{если } \alpha \text{ – рациональный,} \\ \sum_{(k,j) \in Q(x) \subset \mathbb{Z}^2} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \text{если } \alpha \text{ – иррациональный,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $Q(x)$  – множество индексов, по которым идет суммирование. По теоремам о существовании и единственности продолжения неархимедовой нормы норма  $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$ , заданная на  $\mathbb{Q}_p$ , продолжается на все поле  $\mathbb{K}$ .

Приближение будет осуществляться линейными комбинациями сдвигов функции  $\frac{1}{|x|_p^\alpha}$  методом интерполяции: значение аппроксиманта должно совпадать со значениями функции на дискретном множестве (чаще всего на конечном). Эти соотношения интерполяции всегда приводят к системе линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. В качестве аппроксиманта будем брать функцию

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^\alpha}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha$  – положительное рациональное число. В итоге аппроксимант будет иметь вид:

$$L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x - x_k|_p), \quad (1)$$

где  $x_k$  – узлы интерполяции (в нашем случае числа  $\{0, 1, 2, \dots, p^{n+m} - 1\}$ , занумерованные в лексикографическом порядке), а коэффициенты  $\lambda_k$  находятся из системы линейных уравнений (соотношений интерполяции):

$$\sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x_i - x_k|_p) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, p^{n+m}. \quad (2)$$

Аппроксимант вида (1) называется  $p$ -адическим сплайном.

Следующая лемма является вспомогательной при доказательстве утверждения леммы 2.

**Лемма 1.** Функция  $\varphi_\alpha(x) = |x|_p^{-\alpha}$  является непрерывной в  $\mathbb{Z}_p$ .

**Доказательство.** Т. к. функция  $\varphi_\alpha|_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}}$  – локально-постоянная, то она непрерывна. Проверим непрерывность функции  $\varphi_\alpha$  в точке нуль. Для этого нужно показать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_\alpha(x) = 0$ . Бесконечно малая величина  $x$  представляется в виде

$$x = ap^{l(n)},$$

где

$$|a|_p = 1 \text{ и } l(n) \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Тогда

$$|\varphi_\alpha(x)|_p = \left| \left| ap^{l(n)} \right|_p^{-\alpha} \right|_p = p^{-\alpha l(n)}.$$

Если  $x \rightarrow 0$ , то  $l(n) \rightarrow +\infty$  и  $|\varphi_\alpha(x)|_p \rightarrow 0$ . Поэтому  $\varphi_\alpha \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ , что и требовалось доказать.

В данной статье исследуется расстояние в пространстве  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$  между характеристической функцией шара  $B[a, p^{-m}]$  ( $m$  – фиксированное неотрицательное целое число) и соответствующим  $p$ -адическим сплайном в зависимости от параметра  $\alpha$ . Показано, что при  $0 < \alpha \leq 1$  расстояние не уменьшается, а при  $\alpha > 1$  расстояние вычисляется точно либо оценивается сверху величиной, стремящейся к нулю, когда  $n$  стремится к бесконечности.

Мы будем рассматривать случай, когда  $f = I_{B[a, p^{-m}]}$ , где  $I_{B[a, p^{-m}]}$  – характеристическая функция шара  $B[a, p^{-m}]$ . Такой выбор функции  $f$  не ограничивает общности, поскольку  $I_{B[a, p^{-m}]} \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$  и конечные линейные комбинации характеристических функций шаров плотны в  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ . Задача интерполирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты  $\lambda_k$  для функции вида (1) из равенства (2).

Формула (2) – это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p^{n+m}$ , причем элементы матрицы этой системы равны

$$A_{ij} = \varphi_\alpha(|x_i - x_j|_p), \quad i, j = 1, \dots, p^{n+m}.$$

Матрица  $A$  имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)},$$

где  $I_k = \left( \delta_{\left[ \begin{smallmatrix} i-1 \\ p^k \end{smallmatrix} \right], \left[ \begin{smallmatrix} j-1 \\ p^k \end{smallmatrix} \right]} \right)_{i,j=1}^{p^{n+m}}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+m$  – блочно-диагональная матрица размерности  $p^{n+m} \times p^{n+m}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$  (подробнее в [4; 5]).

Более наглядно матрицу  $I_k$  можно изобразить следующим образом:

$$\left( \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

Матрица  $A$  для случая, когда  $p = 3$ , имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right).$$

Преобразуем матрицу к виду  $A = \sum_{k=0}^{n+m} a_k I_k$ . Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)} = (I_1 - I_0) p^{\alpha(n+m-1)} + (I_2 - I_1) p^{\alpha(n+m-2)} + \dots + \\ &\quad + (I_{n+m} - I_{n+m-1}) p^{\alpha(n+m-n-m)} = -I_0 p^{\alpha(n+m-1)} + \\ &\quad + I_1 p^{\alpha(n+m-2)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_k p^{\alpha(n+m-k+1)} (p^\alpha - 1) + \dots + I_n p^{\alpha(n+m-n-m)}, \end{aligned}$$

откуда получим значения коэффициентов:

$$a_0 = -p^{\alpha(n+m-1)}, \quad a_k = p^{\alpha(n+m-k-1)} (p^\alpha - 1), \quad k = 1, \dots, n+m-1, \quad (3)$$

$$a_{n+m} = 1. \quad (4)$$

Тогда для матрицы  $A$  (см. [2]) существует обратная матрица

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{n+m} b_k I_k, \quad (5)$$



где

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_k = -\frac{a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}, \quad k = 1, \dots, n+m. \quad (6)$$

Справедлива следующая теорема о вычислении коэффициентов  $\lambda_k$  для сплайна вида (1).

**Теорема 2.** *Задача (2) имеет единственное решение для любой правой части, а для  $f = I_{B[a, p^{-m}]}$  коэффициенты  $\lambda_i$  вычисляются по следующим формулам:*

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^n b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k, \quad 1 \leq i \leq p^{n+m} : x_i \in B[a, p^{-m}], \quad (7)$$

$$\lambda_i = p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k, \quad 1 \leq i \leq p^{n+m} : x_i \in S[a, p^{-m+N}], \text{ где } N = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Для доказательства теоремы о приближении функции из пространства  $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$   $p$ -адическим сплайном вида (1) нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением утверждения: *если  $|x|_p > |y|_p$ , то  $|x+y|_p = |x|_p$* , которое доказывается методом математической индукции [3].

**Утверждение 1.** *Если  $|x_1|_p > \dots > |x_n|_p$ , то  $|x_1 + \dots + x_n|_p = |x_1|_p$ .*

Чтобы доказать равномерную сходимость данного  $p$ -адического сплайна к характеристической функции шара, нужно вначале показать справедливость следующей леммы.

**Лемма 2.** *Справедлива следующая формула:*

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}}. \quad (9)$$

**Доказательство.** Возьмем произвольный  $x \in \mathbb{Z}_p = \prod_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k, p^{-n-m}]$ . Очевидно, что  $x$  попадет в некоторый шар  $B[x_\nu, p^{-n-m}]$ ,  $\nu \in \{1, 2, \dots, p^{n+m}\}$ . Рассмотрим модуль разности:

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x - x_i|_p) \right|_p. \quad (10)$$

Поскольку  $|x - x_i|_p = |x_i - x_\nu|_p$ ,  $\forall i \neq \nu$ ,  $i = 1, \dots, p^{n+m}$  (утверждение 1), то левая часть равенства (10) приведет к виду:

$$\begin{aligned} & \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \sum_{i=\nu+1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p = \\ & = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x_\nu, \alpha) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p = \\ & = \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - I_{B[a, p^{-m}]}(x_\nu) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Т. к.  $x \in B[x_v, p^{-n-m}]$  и поскольку в  $\mathbb{Q}_p$  шары либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом, то либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \cap B[a, p^{-m}] = \emptyset,$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 0,$$

либо

$$B[x_v, p^{-n-m}] \subset B[a, p^{-m}],$$

и тогда

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v) = 1.$$

В обоих случаях имеем

$$I_{B[a, p^{-m}]}(x) = I_{B[a, p^{-m}]}(x_v).$$

Отсюда, учитывая (10) и (11), получим равенство:

$$\left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x \in \mathbb{Z}_p. \quad (12)$$

Возьмем максимум от обеих частей, при этом получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = |\lambda_v|_p \frac{1}{\left| |x^* - x_v|_p \right|_p^\alpha}, \quad x^* \in B[x_v, p^{-m-n}],$$

где  $x^*$  – точка, в которой достигается максимум правой части равенства (12), согласно лемме 1 о непрерывности функции  $\varphi_\alpha(x)$  в  $\mathbb{Z}_p$ . Чтобы значение правой части (12) было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы  $x^* \in S[x_v, p^{-m-n}]$  и было максимальным число  $|\lambda_v|_p$ . Удовлетворив этим требованиям, получим утверждение леммы.

Используя результаты леммы 2, получаем теорему о равномерном приближении характеристической функции шара с помощью  $p$ -адического сплайна.

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Тогда справедливы соотношения:

- 1)  $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}$  для  $\alpha > 2$ .
- 2)  $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 2) \right|_p = \frac{1}{p^{(n+1)}}$  для  $\alpha = 2$ .
- 3)  $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}$  для  $1 < \alpha < 2$ .
- 4)  $\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[0,1]}(x) - L_{n,m}(x, 1) \right|_p \geq \frac{1}{p}$  для  $\alpha = 1$ .

$$5) \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |I_{B[a, p^{-m]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha)|_p = \frac{1}{p^\alpha} \text{ для } 0 < \alpha < 1.$$

где сплайн  $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$ ,  $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{Q}, \lambda_k \in \{1, \dots, p^{n+m}\}$ .

В  $\mathbb{Q}_p$  норма  $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$  принимает дискретные значения, равные целой степени  $p$ . Но т. к.  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , то в данном случае функция  $f$  будет принимать значения не из поля  $\mathbb{Q}_p$ , а из поля  $K$ , являющегося трансцендентным расширением поля  $\mathbb{Q}_p$ , содержащего  $\mathbb{Q}_p$  и  $p^\alpha$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы вытекает из леммы 2. Надо лишь найти значение  $\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p$  и подставить его в выражение (9). Для вычисления максимума нужно воспользоваться формулами (5), (6) и утверждением 2.

Вначале докажем теорему для случая, когда  $\alpha \geq 2$ . Из формул (3), (4) следует, что

$$|a_k|_p = p^{-\alpha(n+m-k-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (13)$$

Подставим в формулу (7) значения  $b_k, k = 0, 1, \dots, n+m$ , в соответствии с равенствами (6):

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{k=0}^n b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \frac{-a_k p^k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sum_{i=0}^k a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \left( \frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} - \frac{1}{a_0} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{\sum_{i=0}^2 a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^1 a_i p^i} \right) + \dots + \left( \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i} \right) + \\ &+ p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \end{aligned}$$

В итоге выражение (7) примет вид

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i}. \quad (14)$$

Вычислим  $p$ -адический модуль от слагаемых в (14), используя равенства (13). Тогда  $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$  и, используя утверждение 1, имеем

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = \left| a_0 + \sum_{i=1}^n a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}. \quad (15)$$

В результате первое слагаемое (14) примет вид:

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (16)$$

Для того чтобы найти  $p$ -адический модуль  $|b_k|_p$ , вычислим  $p$ -адические модули выражений

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)}, \\ \left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^k a_i p^i \right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}. \end{aligned}$$

Тогда окончательный результат для  $|b_k|_p$  будет следующим:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \text{ где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (17)$$

Теперь вычислим  $|b_{n+m}|_p$ . Для этого нужно вычислить  $p$ -адические модули

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p = \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{-\alpha(n+m-1)}, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} p^{\alpha(n+m-1)} \cdot (p^\alpha - 1) \cdot p^{(1-\alpha)i} \right|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1} \} = p^{-n-m+1}, \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \\ &= \max \left\{ \left| -p^{-\alpha(n+m-1)} \right|_p, \left| \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, |a_{n+m} p^{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1}, p^{-n-m} \} = p^{-n-m+1}. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{-2(n+m-1)}. \quad (18)$$

Рассмотрим два случая. Если  $\alpha > 2$ , то  $|b_{n+1}|_p$  больше всех остальных  $|b_k|_p$ ,  $k = n+2, \dots, n+m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда при  $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = p^{\alpha(m-1)+n+1}. \quad (19)$$

Если  $\alpha = 2$ , то  $|b_{n+1}|_p = |b_{n+2}|_p = \dots = |b_{n+m-1}|_p = p^{2m+2n-1} > |b_{n+m}|_p$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{2(n+m)-1}, p^{-2(n+m-1)} \right\} = p^{2(n+m)-1} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

При  $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p \leq p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{2(n+m)-1}}{p^{(2-2)(n+1)}} = p^{2m+n-1}. \quad (20)$$

Очевидно, что значение модуля из формулы (19) и формулы (20) больше модуля из формулы (16). Поэтому модуль правой части равенства (14) для  $\alpha > 2$  равен  $p^{\alpha(m-1)+n+1}$ , а для  $\alpha = 2$  не превосходит  $p^{2m+n-1}$ . По доказанному видно, что для  $\alpha > 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}$$

для всех  $N = 1, \dots, m$ , а для  $\alpha = 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{2m+n-1}$$

для всех  $N = 1, \dots, m$ . Отсюда вытекает равенство

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}, \quad \text{где } \alpha > 2. \quad (21)$$

В силу (20) имеем неравенство

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p \leq p^{2m+n-1}, \quad \text{где } \alpha = 2. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (9), для  $\alpha > 2$  получим:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}. \quad (23)$$

Это эквивалентно утверждению 1 теоремы.

Подставляя (22) в (9), для  $\alpha = 2$  имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p \leq p^{2m+n-1} \cdot \frac{1}{p^{2(n+m)}} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (24)$$

Это эквивалентно утверждению 2 теоремы.

Теперь рассмотрим случай  $1 < \alpha < 2$ .

Значение  $p$ -адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (25)$$

Вычислим  $p$ -адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (25).

Получим:  $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+m-1$ ,

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = |a_n p^n|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}, \quad (26)$$

$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \quad (27)$$

Чтобы найти  $p$ -адические модули коэффициентов  $|b_k|_p$ , вычислим  $p$ -адические модули приведенных ниже сумм для случая, когда  $1 < \alpha < 2$ :

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \right|_p = |a_{k-1} p^{k-1}|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)},$$

$$\left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p = |a_k p^k|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}.$$

Тогда значение  $p$ -адического модуля для  $|b_k|_p$  для данного случая будет иметь вид:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \quad \text{где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (28)$$

Теперь вычислим  $|b_{n+m}|_p$ . Для этого нужно вычислить  $p$ -адические модули следующих сумм:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= \left| a_{n+m-1} p^{n+m-1} \right|_p = p^{-(n+m-1)}. \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p, \left| a_{n+m} p^{n+m} \right|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{-(n+m-1)}, p^{-n-m} \right\} = p^{-(n+m-1)}. \end{aligned}$$

В итоге получим значение  $p$ -адического модуля для  $b_{n+m}$ :

$$\left| b_{n+m} \right|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{2(n+m-1)}. \quad (29)$$

Если  $1 < \alpha < 2$ , то  $|b_{n+1}|_p$  больше всех остальных  $|b_k|_p$ ,  $k = n+2, \dots, n+m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p = \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{2(n+m)+\alpha-3}, p^{2(n+m-1)} \right\} = p^{2(n+m)+\alpha-3} = |b_{n+1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+m-1}|_p = p^{-n} \cdot p^{2(n+m)+\alpha-3} = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (30)$$

Очевидно, что  $p$ -адический модуль (30) больше  $p$ -адического модуля (27). Поэтому модуль правой части равенства (14) для  $1 < \alpha < 2$  равен  $p^{n+2m+\alpha-3}$ . Из доказанного видно, что для  $1 < \alpha < 2$

$$\left| p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k \right|_p \leq \left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \text{ для всех } N = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{n+2m+\alpha-3}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (9), имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, \alpha) \right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}. \quad (32)$$

В каждом из условий 1–3 теоремы 3 справа стоит некоторая вещественнозначная функция ошибки, зависящая от параметра  $\alpha$ . Найдем пределы слева и справа в точке  $\alpha = 2$ . Тогда из соотношений 1 и 3 теоремы 3 имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2+0} \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} = \frac{1}{p^{n+1}},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 2-0} \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}} = \lim_{\alpha \rightarrow 2-0} \frac{p^{-1}}{p^n} = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что пределы слева и справа в точке  $\alpha = 2$  совпадают и равняются значению функции ошибки в той же самой точке  $\alpha = 2$  (теорема 3 соотношение 2), т. е.

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} |I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 2)|_p = \frac{1}{p^{(n+1)}}, \text{ где } \alpha = 2.$$

Это эквивалентно утверждению 3 теоремы.

Покажем, что при  $\alpha = 1$  выражение

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x, 1) \right|_p$$

не стремится к нулю. Для этого достаточно привести хотя бы один контрпример. Пусть  $m = 0$ . Тогда

$$\lambda_j = \frac{\sum_{k=0}^n b_k p^k}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \text{ для всех } j = 1, \dots, p^n$$

и с учетом формул (3) и (4) справедлива оценка

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = \left| p^{n-1}(n(p-1)-1) \right|_p \leq p^{-n+1} |n(p-1)-1|_p \leq p^{-n+1},$$

из которой следует соотношение:

$$|\lambda_j|_p \geq p^{n-1}. \quad (33)$$

Используя (33) в правой части формулы (9), получим:

$$\max_{k=1, \dots, p^n} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^n} \geq \frac{p^{n-1}}{p^n} = \frac{1}{p}. \quad (34)$$

Это эквивалентно утверждению 4 теоремы.

Пусть  $0 < \alpha < 1$ . В этом случае значение  $p$ -адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \quad (35)$$

Вычислим  $p$ -адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (35).

Тогда  $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+m-1$ , и т. к.  $|a_0|_p > |a_1 p|_p > \dots > |a_{n+m-1} p^{n+m-1}|_p$ ,

то

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i p^i \right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}, \quad (36)$$

откуда



$$\left| \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} = p^{\alpha n + \alpha(m-1)}. \quad (37)$$

Чтобы найти  $p$ -адические модули коэффициентов  $|b_k|_p$ , вычислим  $p$ -адические модули следующих выражений для случая, когда  $0 < \alpha < 1$ :

$$\left| \sum_{i=0}^k a_i p^i \right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n+m-1.$$

В итоге значение  $p$ -адического модуля для  $|b_k|_p$  примет вид:

$$|b_k|_p = \left| \frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^k a_i p^i} \right|_p = p^{\alpha(n+m+k-1)}, \quad \text{где } k = n+1, \dots, n+m-1. \quad (38)$$

Далее вычислим  $|b_{n+m}|_p$ , для чего нужно вычислить суммы

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \right|_p &= |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}. \\ \left| \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i \right|_p &= \left| \sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m} \right|_p = \max \left\{ p^{-\alpha(n+m-1)}, |a_{n+m} p^{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m} \right\} = p^{-\alpha(n+m-1)}. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{2\alpha(n+m-1)}. \quad (39)$$

Если  $0 < \alpha < 1$ , то  $|b_{n+1}|_p < |b_{n+2}|_p < \dots < |b_{n+m-1}|_p = |b_{n+m}|_p$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m} \right|_p \leq \max \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k \right|_p, |b_{n+m}|_p \right\} = \\ &= \max \left\{ p^{2\alpha(n+m-1)}, p^{2\alpha(n+m-1)} \right\} = p^{2\alpha(n+m-1)} = |b_{n+m-1}|_p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right|_p \leq p^{-n} \cdot |b_{n+m-1}|_p = p^{-n} \cdot p^{2\alpha(n+m-1)} = p^{(2\alpha-1)n+2\alpha(m-1)}. \quad (40)$$

Поскольку  $p$ -адический модуль (37) больше  $p$ -адического модуля (40) для достаточно больших  $n$   $\left( n > \frac{\alpha(m-1)}{1-\alpha} \right)$ , то

$$\max_{k=1, \dots, p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(n+m-1)}. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (9), имеем:

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a, p^{-m}]}(x) - L_{n, m}(x, \alpha) \right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^\alpha}, \quad (42)$$

что эквивалентно утверждению 5 теоремы.

Согласно теореме 1, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на множестве целых  $p$ -адических чисел. Но поскольку известно, что  $\mathbb{Z}_p$  является компактом, то локально постоянная функция есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров. Следовательно, данную функцию можно равномерно приблизить конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров, т. е.

$$\sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]} \rightrightarrows f(x), \quad \max_{k=1, \dots, N} m_k \rightarrow \infty, \quad \mu_k = f(a_k) \in \mathbb{K}.$$

На основании теоремы 1 и данных рассуждений покажем справедливость следующей теоремы о равномерной сходимости  $p$ -адического сплайна к непрерывной  $\mathbb{Q}_p$ -значной функции, заданной на  $\mathbb{Z}_p$ , если параметр  $\alpha > 1$  и  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**Теорема 3.** Для любой функции  $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$  существует последовательность  $L_{n, m}(x, \alpha)$ , где  $\alpha > 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$  такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{Q}_p} |L_{n, m}(x, \alpha) - f(x)|_p = 0. \quad (43)$$

**Доказательство.** Т. к. функцию  $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$  можно равномерно приблизить линейной комбинацией характеристических функций шаров, то для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такой, что для всех  $N \geq N_\varepsilon$  выполняется неравенство

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p < \varepsilon, \quad \text{для всех } x \in \mathbb{Z}_p. \quad (44)$$

Запишем сильное неравенство треугольника для  $|\cdot|_p$ :

$$\begin{aligned} & |L_N(x, \alpha) - f(x)|_p = \\ & = \left| L_N(x, \alpha) - \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) + \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \leq \\ & \leq \max \left\{ \left| L_N(x, \alpha) - \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) \right|_p, \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - f(x) \right|_p \right\}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$L_N(x, \alpha) = \sum_{k=1}^N \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha).$$

Т. к. по теореме 3  $p$ -адический сплайн равномерно приближает характеристическую функцию шара, то справедливы следующие оценки:

существует такой номер  $\nu_1$ , что для любого  $n_1 > \nu_1$

$$\left| I_{B[a_1, p^{-m_1}]}(x) - L_{n_1, m_1}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_1|_p},$$

существует такой номер  $\nu_2$ , что для любого  $n_2 > \nu_2$

$$\left| I_{B[a_2, p^{-m_2}]}(x) - L_{n_2, m_2}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_2|_p},$$

...

существует такой номер  $\nu_k$ , что для любого  $n_k > \nu_k$

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p},$$

...

существует такой номер  $\nu_N$ , что для любого  $n_N > \nu_N$

$$\left| I_{B[a_N, p^{-m_N}]}(x) - L_{n_N, m_N}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_N|_p},$$

для  $k = 1, \dots, N$ . Т. к. этих номеров конечное число, то выберем из них максимальный такой, что

$$\nu = \max \{N, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}.$$

Тогда для любого  $n_k > \nu$  будем иметь

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - \sum_{k=1}^N \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p = \\ & = \left| \sum_{k=1}^N \mu_k \left( I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right) \right|_p \leq \\ & \leq \max_{1, \dots, N} |\mu_k|_p \cdot \left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (46)$$

Т. к. первый член неравенства (45) меньше  $\varepsilon$  согласно неравенству (44), а второй меньше  $\varepsilon$  согласно выражению (46), то данное неравенство примет вид

$$|L_N(x, \alpha) - f(x)|_p \leq \varepsilon,$$

что эквивалентно выражению (42).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schikhof, W. Ultrametric calculus / W. Schikhof. – Cambridge : University Press, 1984.
2. *p*-адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 2001. – 352 с.
3. Радына, А. Я. Элементарныя ўводзіны ў *p*-адычны аналіз : дапаможнік / А. Я. Радына, Я. В. Радына. – Мінск : БДПУ, 2006. – 82 с.
4. Khrennikov, A. *p*-Adic interpolation and approximation of a continuous function by linear combinations of shifts of *p*-adic valuations / A. Khrennikov, A. Radyna // Journal of Approximation Theory. – 2003. – № 120. – P. 124–135.
5. Радына, А. Я. Інтэрпаляцыя і набліжэнне *p*-адычнымі лінейнымі сплайнамі функцыі класа  $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{R})$  / А. Я. Радына // Вес. НАН Беларусі. – 2004. – № 2. – С. 21–24.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.2019

#### **Sender A. N. *p*-adic Splines for Approximation of Local Constant Functions from $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$**

*The article is devoted to approximation of continuous *p*-adic function of *p*-adic argument by *p*-adic splines that is functions of the form  $L_{n,m}(x, \alpha) = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$  where their parameters are defined from interpolation relations by a function to be approximated. The theorem about uniform approximation of a continuous function by such splines is proved for different  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .*

УДК 512.542

**А. А. Трофимук<sup>1</sup>, В. О. Лукьяненко<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Информатика»

Гомельского государственного технического университета имени П. В. Сухого

e-mail: [alexander.trofimuk@gmail.com](mailto:alexander.trofimuk@gmail.com)**О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП**

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *tcc-подгруппой* в  $G$ , если в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$  и для любых  $X \leq A$  и  $Y \leq T$  существует элемент  $u \in \langle X, Y \rangle$  такой, что  $XU^u \leq G$ . Устанавливается сверхразрешимость группы  $G$  в каждом из следующих случаев: все максимальные подгруппы являются *tcc-подгруппами* в  $G$ ; все 2-максимальные подгруппы являются *tcc-подгруппами* в  $G$ .

**Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2].

Напомним, что подгруппа  $H$  группы  $G$  называется 2-максимальной подгруппой, если в  $G$  найдется такая максимальная подгруппа  $M$ , в которой  $H$  является максимальной подгруппой.

Запись  $H \leq G$  означает, что  $H$  – подгруппа группы  $G$ . Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *перестановочными*, если  $AB = BA$ . Заметим, что равенство  $AB = BA$  равносильно тому, что  $AB \leq G$ .

Исследования, связанные с изучением максимальных подгрупп, относятся к одному из самых перспективных направлений в теории групп. Это связано прежде всего с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп. Отметим, например, что группа  $G$  нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны; сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами (Б. Хупперт [2]).

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались также попытки изучения и применения 2-максимальных подгрупп. При этом как и для максимальных подгрупп, рассматривались группы с различными ограничениями на способ вложения обобщенно максимальных подгрупп в эти группы. Пожалуй, наиболее ранний результат, относящийся к этому направлению, был получен Б. Хуппертом [3], установившим сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами, была установлена Агравалем [4, теорема 6.5], а в работе [5] Л. Я. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы. Подгруппа  $H$  из  $G$  называется *квазинормальной* в  $G$ , если  $H$  перестановочна со всеми подгруппами из  $G$ . Группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены в работе А. Манна [6]. Очевидно, что если все максимальные подгруппы квазинормальны, то группа сверхразрешима, т. к. из квазинормальности подгруппы следует ее субнормальность. В [6] также было установлено, что ранг разрешимой группы  $G$  не превы-

шает 1 при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа является квазинормальной в  $G$ . Легко увидеть, что в этом случае группа  $G$  также сверхразрешима. Подробный обзор результатов, связанных с перестановочностью максимальных подгрупп и их обобщений, представлен в [7].

Одной из фундаментальных работ последнего десятилетия, посвященных перестановочности обобщенно максимальных подгрупп, является работа [8], в которой В. Го, К. Шум и А. Н. Скиба ввели понятие *tss-перестановочной* подгруппы: подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *tss-перестановочной*, если для произвольной подгруппы  $B$  группы  $G$  и любых  $X \leq A$  и  $Y \leq B$  существует элемент  $u \in \langle X, Y \rangle$  такой, что  $XU^u \leq G$ . Из работы [9] вытекает сверхразрешимость группы  $G$ , у которой все максимальные (2-максимальные) подгруппы *tss-перестановочны*.

Введем следующее

**Определение 1.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется *tss-подгруппой* в  $G$ , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) в  $G$  существует подгруппа  $T$  такая, что  $G = AT$ ;
- 2) для любых  $X \leq A$  и  $Y \leq T$  существует элемент  $u \in \langle X, Y \rangle$  такой, что  $XU^u \leq G$ .

Подгруппу  $T$  в дальнейшем будем называть *tss-добавлением* к подгруппе  $A$  в группе  $G$ .

Следующая теорема развивает результаты работы [9].

**Теорема 3.1.** 1. Если в группе  $G$  все максимальные подгруппы являются *tss-подгруппами*, то  $G$  сверхразрешима.

2. Если в группе  $G$  все 2-максимальные подгруппы являются *tss-подгруппами*, то  $G$  сверхразрешима.

### 1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Если  $H \leq G$  и  $H \neq G$ , то пишем  $H < G$ . Через  $G'$ ,  $Z(G)$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы  $G$  соответственно;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно;  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Элементарная абелева группа порядка  $p^t$  и циклическая группа порядка  $t$  обозначаются  $E_{p^t}$  и  $Z_t$  соответственно, а  $[A]B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

Пусть  $G$  – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}, p_1 > p_2 > \dots > p_k, a_i \in \mathbb{N}.$$

Пусть  $G_{p_i}$  – силовская  $p_i$ -подгруппа группы  $G$ .

Говорят, что группа  $G$  обладает силовой башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_{k-1} \leq G_k = G$$

такая, что  $G_i$  нормальна в группе  $G$  и фактор-группа  $G_i/G_{i-1}$  изоморфна силовской  $p_i$ -подгруппе  $G_{p_i}$  из  $G$  для всех  $i$ .

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через  $\mathcal{U}$  обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовской  $p$ -подгруппой называется  $p$ -замкнутой, а группа с нормальной  $p'$ -холловой подгруппой называется  $p$ -нильпотентной.

**Лемма 2.1** [9, теорема 1, предложения 1–2]. Пусть  $G = AB$  – произведение тсс-перестановочных подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда для минимальной нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$  справедливы следующие утверждения:

- (1)  $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$ ;
- (2) если  $N \leq A \cap B$  или  $N \cap A = N \cap B = 1$ , то  $|N| = p$ , где  $p$  – простое число.

**Лемма 2.2** [10, теорема 4]. Пусть  $G = AB$  является произведением тсс-перестановочных подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда  $[A, B] \leq F(G)$ .

**Лемма 2.3** [11, лемма б]. Предположим, что разрешимая группа  $G \notin \mathcal{U}$ , но фактор-группа  $G/K \in \mathcal{U}$  для каждой неединичной нормальной в  $G$  подгруппы  $K$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ ;
- (2) группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ ,  $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$  для некоторого  $p \in \pi(G)$ ;
- (3)  $G$  – примитивная группа;  $G = [N]M$ , где  $M$  – максимальная подгруппа в группе  $G$  с единичным ядром;
- (4)  $N$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $p^n$ ,  $n > 1$ ;
- (5) если  $V$  – подгруппа группы  $G$  и  $G = VN$ , то  $V = M^x$  для некоторого  $x \in G$ .

Из леммы 2.3 легко получается следующая

**Лемма 2.4** [12]. Пусть  $G$  – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $G$  разрешима и  $|\pi(G)| \leq 3$ ;
- (2)  $G$  имеет единственную нормальную силовскую подгруппу  $P$  и  $P = G^{\mathcal{U}}$ ;
- (3)  $P/\Phi(P)$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G/\Phi(P)$  и  $|P/\Phi(P)| > p$ ;
- (4) если  $Q$  – дополнение к  $P$  в  $G$ , то  $Q/Q \cap \Phi(G)$  либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;
- (5) если  $|\pi(Q)| = 2$ , то  $Q$  – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.
- (6) если  $G$  не является группой Шмидта, то  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Приведем некоторые свойства тсс-подгрупп.

**Лемма 2.5** Пусть  $A$  – тсс-подгруппа группы  $G$  и  $Y$  – тсс-добавление к  $A$  в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $A$  – тсс-подгруппа в  $H$  для каждой подгруппы  $H$  группы  $G$  такой, что  $A \leq H$ ;

(2)  $AN/N$  – тсс-подгрупа в  $G/N$  для каждой нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$ ;

(3) для каждой нормальной подгруппы  $A_1$  группы  $A$  и  $X \leq Y$  существует  $y \in Y$  такой, что  $A_1 X^y \leq G$ . В частности,  $A_1 M \leq G$  для некоторой максимальной подгруппы  $M$  группы  $Y$  и  $A_1 H \leq G$  для некоторой  $\pi$ -холловой подгруппы  $H$  разрешимой группы  $Y$  и любого  $\pi \subseteq \pi(G)$ ;

(4)  $A_1 K \leq G$  для каждой субнормальной подгруппы  $K$  в  $Y$  и для каждой нормальной подгруппы  $A_1$  группы  $A$ ;

(5) если  $T$  нормальная подгрупа в  $G$  такая, что  $T \leq A$  и  $T \cap Y = 1$ , то  $T_1$  нормальная подгрупа в  $G$  для каждой нормальной подгруппы  $T_1$  группы  $A$  такой, что  $T_1 \leq T$ ;

(6) если  $T$  нормальная подгрупа в  $G$  такая, что  $T \cap A = 1$  и  $T \leq Y$ , то  $A_1 \leq N_G(T_1)$  для каждой нормальной подгруппы  $T_1$  группы  $T$  и для каждой нормальной подгруппы  $A_1$  группы  $A$ ;

(7)  $A^x$  – тсс-подгрупа группы  $G$  и  $Y^x$  – тсс-добавление к  $A^x$  в  $G$  для любого  $x \in G$ .

*Доказательство.*

1. Т. к.  $Y$  – тсс-добавление к  $A$  в  $G$ , то  $G = AY$ ,  $A$  и  $Y$  – тсс-перестановочные подгруппы из  $G$ . По тождеству Дедекинда  $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$ . Т. к.  $H \cap Y \leq Y$ , то для любых  $X \leq A$  и  $Z \leq H \cap Y$  существует элемент  $u \in \langle X, Z \rangle$  такой, что  $XZ^u \leq G$ . Поэтому  $A$  и  $H \cap Y$  тсс-перестановочны и, значит,  $A$  – тсс-подгрупа в  $H$ .

2. Т. к.  $G = AY$ , то  $G/N = (AN/N)(YN/N)$ . Пусть  $B/N$  – произвольная подгрупа из  $AN/N$  и  $X/N$  – произвольная подгрупа в  $YN/N$ . Т. к.  $N \leq B \leq AN$ , то по тождеству Дедекинда  $B = B \cap AN = (B \cap A)N$ .

Аналогично  $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$ . Т. к.  $B \cap A \leq A$  и  $X \cap Y \leq Y$ , то  $(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$  для некоторого  $u \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle$ . Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y \rangle N/N \subseteq \langle B, X \rangle N/N = \langle B/N, X/N \rangle.$$

Значит,  $AN/N$  – тсс-подгрупа в  $G/N$ .

3. Т. к.  $A$  – тсс-подгрупа группы  $G$ , то по определению для каждой нормальной подгруппы  $A_1$  группы  $A$  и  $X \leq Y$  существует  $u \in \langle A_1 X \rangle$  такой, что  $A_1 X^u \leq G$ . Т. к.  $u \in G = AY = YA$ , то  $u = ya$  для некоторых  $y \in Y$  и  $a \in A$ . Тогда

$$A_1 X^u = A_1 X^{ya} = A_1 (X^y)^a = A_1^a (X^y)^a = (A_1 X^y)^a \leq G.$$



Поэтому существует подгруппа  $A_1X^y$  в группе  $G$  для некоторого  $y \in Y$ . Очевидно, что если  $X$  –  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $Y$ , то  $H = X^y$  –  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $Y$ . Поэтому  $A_1H \leq G$ . Аналогично и в случае, когда  $X$  – максимальная подгруппа группы  $Y$ . Тогда  $M = X^y$  – максимальная подгруппа группы  $Y$  и  $A_1M \leq G$ .

4. Поскольку  $K$  субнормальная подгруппа в  $Y$ , то существует цепь подгрупп

$$Y = K_0 \geq K_1 \geq \dots \geq K_{n-1} \geq K_n = K,$$

в которой подгруппа  $K_{i+1}$  нормальна в  $K_i$  для всех  $i$ . Применим индукцию по  $n$ . По п. (3) существует  $y \in Y$  такой, что  $A_1K_1^y = A_1K_1 \leq G$ . Поэтому утверждение справедливо для  $n=0$  и  $n=1$ . Значит,  $n \geq 2$ . Согласно п. (1)  $A$  – тсс-подгруппа в  $AK_1$  и  $K_1$  – тсс-добавление к  $A$  в  $AK_1$ . Т. к. длина субнормальной цепи между  $K$  и  $K_1$  меньше, чем  $n$ , то по индукции в группе  $AK_1$  существует подгруппа  $A_1K$ , а следовательно,  $A_1K \leq G$ .

5. По п. 3 в группе  $G$  существует подгруппа  $T_1Y$ . Т. к.  $T_1 = T \cap T_1Y$  нормальна в  $T_1Y$ , то  $Y \leq N_G(T_1)$  и  $T_1$  нормальна в  $G = AY$ .

6. Т. к.  $T_1$  субнормальна в  $Y$ , то по п. 4 в группе  $G$  существует подгруппа  $A_1T_1 \leq G$  каждой нормальной подгруппы  $A_1$  группы  $A$ . Т. к.  $T_1 = T \cap A_1T_1$  нормальна в  $A_1T_1$ , то  $A_1 \leq N_G(T_1)$ .

7. Т. к.  $AY = G$ , то  $A^xY^x = G$ . Пусть  $K \leq A^x$ ,  $L \leq Y^x$ . Тогда  $K^{x^{-1}} \leq A$ ,  $L^{x^{-1}} \leq Y$  и существует  $u \in \langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle$  такой, что  $K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u \leq G$ . Т. к.

$$\langle K^{x^{-1}}, L^{x^{-1}} \rangle = \langle K, L \rangle^{x^{-1}},$$

то существует  $v \in \langle K, L \rangle$  такой, что  $u = v^{x^{-1}}$ .

Поскольку  $x^{-1}u = vx^{-1}$ , то

$$K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u = K^{x^{-1}}L^{vx^{-1}} = (KL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому  $KL^v \leq G$ . Следовательно,  $A^x$  – тсс-подгруппа группы  $G$  и  $Y^x$  – ее тсс-добавление в  $G$ . Лемма доказана.

## 2. Доказательство основного результата

1. Предположим, что лемма неверна и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Пусть  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа и  $M/N$  – максимальная подгруппа  $G/N$ . Тогда  $M$  – максимальная подгруппа в  $G$  и по лемме 2.5 (2) все фактор-группы  $G/N$  наследуют условия теоремы. Поэтому  $G/N$  свёрхразрешима.

Пусть  $H$  – максимальная подгруппа и  $Y$  – ее тсс-добавление в  $G$ . Если  $F(G) \neq 1$ , то  $G$  разрешима. Поэтому  $F(G) = 1$  и по лемме 2.2  $Y \leq C_G(H)$ . Тогда  $H$  нормальна в  $G$  и  $|G:H|$  – простое число. Т. к.  $H$  – произвольная максимальная подгруппа в  $G$ , то группа  $G$  свёрхразрешима, а следовательно, разрешима.

По лемме 2.3 в  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа  $N$  такая, что

$$N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$$

для некоторого  $p \in \pi(G)$ ,  $N$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $p^n$ ,  $n > 1$ ,  $G = [N]T$ , где  $T$  – некоторая максимальная подгруппа группы  $G$ .

Пусть  $U$  – тсс-добавление к  $T$  в  $G$ . По лемме 2.1  $N \leq U$ . Т. к.  $N$  – элементарная абелева  $p$ -подгруппа, выберем нормальную подгруппу  $N_1$  в  $N$  такую, что  $|N_1| = p$ . Тогда по лемме 2.5 (6)  $T \leq N_G(N_1)$ . Поскольку  $N_1$  нормальна в  $N$ , то  $N_1$  нормальна в  $G = [N]T$  и  $N = N_1$ . Противоречие. Лемма доказана.

2. Предположим, что теорема неверна и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. По лемме 2.5 (1) и по теореме 3.1 каждая максимальная подгруппа  $M$  будет сверхразрешимой. Поэтому  $G$  – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 2.4. Тогда группа  $G$  разрешима,  $|\pi(G)| \leq 3$  и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу  $P = G^u$ . Очевидно, что  $\Phi(G) = 1$ . Поэтому  $P$  – минимальная нормальная подгруппа порядка  $p^n$ ,  $n > 1$  и  $G = [P]M$ , где  $M$  – некоторая максимальная подгруппа группы  $G$ .

Если  $|\pi(G)| = 3$ , то  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и  $M = [T]R$ , где  $|T| = t$ ,  $|R| = r$ ,  $t, r \in \pi(G)$ . Подгруппы  $T$  и  $R$  являются 2-максимальными подгруппами группы  $G$ . Тогда по условию  $TY_1 = G = RY_2$ , где  $Y_1$  и  $Y_2$  – их тсс-добавления в  $G$ . Кроме того,  $P \leq Y_1$  и  $P \leq Y_2$ . Пусть  $P_1$  – минимальная нормальная подгруппа в  $P$ . Тогда по лемме 2.5 (6)  $T \leq N_G(P_1)$  и  $R \leq N_G(P_1)$ . Тогда  $P_1$  нормальна в  $G = PM = PTR$ , противоречие.

Таким образом,  $|\pi(G)| = 2$ . Тогда  $M$  –  $q$ -группа. Если  $|M| > q$ , то существует в  $M$  максимальная подгруппа  $M_1$  такая, что  $M_1 \neq 1$ . Очевидно, что  $H = [P]M_1$  – максимальная подгруппа в  $G$ . Т. к.  $H$  сверхразрешима, то в  $H$  существует максимальная подгруппа  $H_1$  такая, что  $M_1 \leq H_1$  и  $|H:H_1| = p$ . По условию подгруппа  $H_1$  – тсс-подгруппа группы  $G$ . Тогда  $H_1V = G$ , где  $V$  – ее тсс-добавление в  $G$ . По лемме 2.1  $P \leq V$  и  $P \cap H_1 = 1$ . Тогда по тождеству Дедекинда

$$H_1 = H_1 \cap PM_1 = (H_1 \cap P)M_1 = M_1.$$

Поэтому  $|P| = p$ . Противоречие.

Значит,  $|M| = q$  и  $P$  – максимальная подгруппа. Пусть  $P_1$  – максимальная подгруппа в  $P$ . Тогда по условию  $P_1K = G$ , где  $K$  – тсс-добавление к  $P_1$  в  $G$ . По лемме 2.1  $P \leq K$  и  $P \cap P_1 = 1$ , что возможно только при  $|P| = p$ . Противоречие. Теорема доказана.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 320 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1967.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
4. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishen House, 1982.
5. Поляков, Л. Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л. Я. Поляков // Конечные группы : сб. – Минск : Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
6. Mann, A. Finite groups whose  $n$ -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
7. Ковалева, В. А. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщенно нормальными  $n$ -максимальными подгруппами / В. А. Ковалева // ПФМТ. – 2016. – Т. 29, № 4. – С. 48–58.
8. Guo, W. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.
9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // SEAMS Bull. Math. – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.
10. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.
11. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda [et al.] // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.
12. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, № 2. – P. 271–280.
13. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Zeitschrift. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2019

***Trofimuk A. A., Lukyanenko V. O. On the Supersolubility of a Group with Given Conditions of Permutability of Maximal Subgroups***

*A subgroup  $A$  of a group  $G$  is called tcc-subgroup of  $G$ , if there is a subgroup  $T$  of  $G$  such that  $G = AT$  and for any  $X \leq A$  and for any  $Y \leq T$  there exists an element  $u \in \langle X, Y \rangle$  such that  $XY^u \leq G$ . In present paper the supersolubility of a group  $G$  is obtained in each of the following cases: all maximal subgroups of  $G$  are tcc-subgroups in  $G$ ; all 2-maximal subgroups of  $G$  are tcc-subgroups in  $G$ .*

УДК 513.82

**А. А. Юдов<sup>1</sup>, Е. В. Кисилюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [modelmath@brsu.brest.by](mailto:modelmath@brsu.brest.by)**МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО РИПЕРА  
ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА**

Изучаются подмногообразия однородного пространства, описывается построение канонического рипера подмногообразия однородного пространства и строится вычислительный аппарат метода построения канонического рипера. Подмногообразие исследуется локально.

**1. Построение инвариантного продолжения подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли**

Пусть  $G$  – группа Ли,  $H$  – ее замкнутая подгруппа Ли,  $M = G/H$  – однородное  $G$ -пространство,

$$\pi: G \rightarrow G/H: a \rightarrow aH \quad (1)$$

каноническая проекция.

Группа  $G$  действует в  $M$  с помощью левых сдвигов:

$$G \times M \rightarrow M: (a, bH) \rightarrow abH = a \cdot bH = T_a(bH). \quad (2)$$

**Определение:** Подмногообразием размерности  $n$  однородного пространства  $M$  будем называть пару  $(D_0, f)$ , где  $D_0$  – окрестность нуля евклидова пространства  $R_n$ ,  $f$  – аналитическое вложение  $D_0$  в  $M$ .

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально. Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работе [4]. Ниже излагаются идеи работы [4] и строится канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли.

Предположим, что  $f(0) = \pi(e)$ . В противном случае, если  $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$ , от подмногообразия  $(D_0, f)$  перейдем к ему эквивалентному  $(D_0, T_{a^{-1}} \circ f)$ . Пусть  $\dim G = r$ ,  $\dim H = s$ , тогда  $\dim M = r - s = m$ .

Рассмотрим пространство  $\Gamma_1$  всех касательных к  $M$   $n$ -мерных подпространств. Действие группы  $G$  на  $M$  продолжается в действии на  $\Gamma_1$ , на котором группа  $G$  будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства  $M$ :

$$G \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1: (a, K) \rightarrow dT_a(K) = a \circ K. \quad (3)$$

При этом  $\Gamma_1$  становится  $G$ -пространством, но необязательно однородным. Наряду с  $G$ -пространством  $\Gamma_1$  будем рассматривать его подмножество  $Q_1$ , состоящее из  $n$ -мерных подпространств, касательных к  $M$  в точке  $\pi(e)$ .  $Q_1$  будет  $H$ -пространством, тоже необязательно однородным. Между  $H$ -орбитами множества  $Q_1$  и  $G$ -орбитами множества  $\Gamma_1$  существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Далее будем рассматривать  $G$ -орбиты пространства  $\Gamma_1$ . Каждой такой орбите будет сопоставляться класс  $n$ -мерных подмногообразий пространства  $M$ , такой, что

все касательные подпространства подмногообразия этого класса попадут в данную орбиту (по крайней мере, в некоторой окрестности). Предположим, что подмногообразие  $(D_0, f)$  принадлежит классу с орбитой  $O(K_1) = \{a \circ K_1 \mid a \in G\}$ , где  $K_1 = T_{f(0)}(\text{Im } f)$ ,  $\text{Im } f = f(D_0)$ . Пусть  $H_1$  – группа стационарности элемента  $K_1$ :

$$H_1 = \{a \in G \mid a \circ K_1 = K_1\}.$$

Приведем основные факты теории вычислительного аппарата метода построения канонического репера.

Рассмотрим множество  $Q_1$  всех  $n$ -мерных подпространств, касательных к  $M$  в точке  $\pi(e)$ . Наряду с множеством  $Q_1$  рассмотрим множество

$$Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) \mid K \in Q_1\}.$$

Множество  $Q_1$  является  $H$ -пространством. Множество  $Z_1$  также является  $H$ -пространством, причем действие группы  $H$  в  $Z_1$  индуцируется присоединенным представлением  $Ad$ .  $H$ -пространства  $Q_1$  и  $Z_1$  изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что

$$H_1 = \{a \in H \mid Ada(K'_1) = K'_1\}, \tag{4}$$

где  $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1)$ .

Пусть  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^r\}$  – базис пространства  $\bar{G}^*$  дуального к алгебре Ли  $\bar{G}$  группы Ли  $G$ ,  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^t\}$  – базис пространства  $K'_1$ , дуального к  $K'_1$ ,  $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s\}$  – базис пространства  $\bar{H}^*$ , дуального к  $\bar{H}$ . При этом  $t = s + n$ . Тогда система Пфаффа, определяющая пространство  $K'_1$ , будет иметь вид:

$$\omega^{t+1} = 0, \omega^{t+2} = 0, \dots, \omega^r = 0. \tag{5}$$

Найдем внешние дифференциалы форм системы (5):

$$d\omega^{t+1} = 0, d\omega^{t+2} = 0, \dots, d\omega^r = 0. \tag{6}$$

Введем индексы суммирования:  $i, j = 1, 2, \dots, r$ ;  $\sigma, \tau = s + 1, s + 2, \dots, r$ ;  $\varepsilon, \mu = t + 1, t + 2, \dots, r$ ;  $a, b, c = 1, 2, \dots, s_1$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, t$ ;  $p, q, l = s_1 + 1, s_1 + 2, \dots, s$ ;  $\rho, \delta = s + 1, s + 2, \dots, t$ .

Разложим внешние дифференциалы (6) по базису:

$$d\omega^{t+1} = \Lambda_{ij}^{t+1} \omega^i \wedge \omega^j, \dots, \Lambda_{ij}^r \omega^i \wedge \omega^j. \tag{7}$$

Предположим, что подмногообразие  $(D_0, f)$  продолжается в пространство  $M = G/H$  и  $f_1 : D_0 \rightarrow M_1$  – соответствующее продолжение,  $K_1 = T_{f(0)}(\text{Im } f)$ ,  $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1)$ ,  $K_2 = T_{f_1(0)}(\text{Im } f_1)$ ,  $K'_2 = d\pi_{1e}^{-1}(K_2)$ .

**Лемма 1** [4]. В формулах (7) равны нулю коэффициенты  $\Lambda_{\alpha\alpha}^{t+1} \dots \Lambda_{\alpha\alpha}^r$ ;  $\Lambda_{p,q}^{t+1}, \dots, \Lambda_{p,q}^r$ .

**Следствие 1.** Система форм

$$\begin{cases} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0 \end{cases} \tag{8}$$

эквивалентна системе

$$\begin{aligned} &\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \text{ (a)} \\ &\omega^p \wedge \theta_p^{t+1} = 0, \dots, \omega^p \wedge \theta_p^r = 0. \text{ (б)} \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть  $H_1$  – алгебра Ли группы  $H_1$ , тогда

$$H_1 = \{v \in H \mid [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (10)$$

Пусть  $K'_1 = H \oplus N$ ,  $K'_2 = H \oplus N$ .

**Теорема 1.1.** [4]. Если выполняется условие

$$[N, N] \subset K'_1, \quad (11)$$

то внешние дифференциалы  $d\omega^{t+1} = 0, \dots, d\omega^r = 0$  обращаются в нуль в пространстве  $K'_2$ .

Заметим, что условие (11) всегда выполняется для одномерного подмногообразия  $(D_0, f)$ , а также для подмногообразий любой размерности в случае, когда группа Ли  $G$  является полупрямым произведением группы стационарности точки пространства  $M$  и абелевой группы, в частности для всех евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Используя лемму Картана, систему (9, б) на пространстве  $K'_2$  можно переписать в виде [4]:  $\Theta_\rho^{t+1} = A_{\rho\delta}^{t+1} \tilde{\omega}^\delta, \dots, \Theta_\rho^r = A_{\rho\delta}^r \tilde{\omega}^\delta, A_{\rho\delta}^\varepsilon = A_{\delta\rho}^\varepsilon, \varepsilon = t+1, \dots, r$  ( $\tilde{\omega}^\delta$  – ограничение формы  $\omega^\delta$  на пространство  $K'_2$ ), а систему (9) в виде:

$$\begin{aligned} \omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0; \\ \Omega_\rho^{t+1} \equiv \Theta_\rho^{t+1} - A_{\rho\delta}^{t+1} \tilde{\omega}^\delta = 0, \dots, \Omega_\rho^r \equiv \Theta_\rho^r - A_{\rho\delta}^r \tilde{\omega}^\delta = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

**Теорема 1.2.** [4]. Система 1-форм

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \Omega_\rho^{t+1} = 0, \dots, \Omega_\rho^r = 0 \quad (13)$$

есть система форм Пфаффа, определяющая подпространство  $K'_2$ .

**Теорема 1.3.** Система форм

$$\Omega_\rho^{t+1} = 0, \dots, \Omega_\rho^r = 0, \rho = s+1, \dots, t, \quad (14)$$

рассматриваемая как алгебраическая система относительно форм  $\omega^{s_1+1} = 0, \dots, \omega^s = 0$ , разрешима относительно этих форм. При этом получается выражение форм  $\omega^{s_1+1}, \dots, \omega^s$  через формы  $\omega^{s_1+1}, \dots, \omega^t$ .

Разрешив систему (14) относительно форм  $\omega^{s_1+1} = 0, \dots, \omega^s = 0$ , найдем

$$\omega^{s_1+1} = \lambda_\rho^{s_1+1} \omega^\rho, \dots, \omega^s = \lambda_\rho^s \omega^\rho. \quad (15)$$

Система (15) эквивалентна системе (14). Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1} \omega^\rho = 0, \dots, \omega^s - \lambda_\rho^s \omega^\rho = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты  $\lambda_\rho^{s_1+1}, \dots, \lambda_\rho^s, \rho = s+1, \dots, t$  называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия  $(D_0, f)$ , полученными при первом продолжении*. Может быть, среди полученных дифференциальных инвариантов есть зависимость. Чтобы получить независимые инварианты первого продолжения, надо подействовать на подмногообразии  $(D_0, f)$  преобразованием  $h_1$  группы  $H_1$ . При этом подмногообразие  $(D_0, f)$  перейдет в  $(D_0, h_1 \circ f)$ , а подпространство  $K_1$  (а следовательно, и  $K'_1$ ) не изменится, а подпространство  $K_2$  и, соответственно,  $K'_2$  изменится. При этом надо так подобрать элемент  $h_1$ , чтобы  $K'_2$  привелось к возможно более простому виду. В соответствии с этим и система (13), определяющая  $K'_2$ , приведет к более простому виду и оставшиеся коэффициенты будут независимыми дифференциальными инвариантами первого продолжения.

**Замечание 1.** Теорема 1.3 верна как при выполнении условий  $\dim H - \dim H_1 = \dim Q$ , так и в случае

$$\dim Q > \dim H - \dim H_1. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь подмногообразие  $(D_0, f)$  пространства  $M_1 = G/H_1$  и применим к нему аналогичные рассуждения. Пусть  $f_2 : D_0 \rightarrow G/H_2$  – продолжение отображения  $f_1$  в пространство  $M_2 = G/H_2$ , где  $H_2$  – группа стационарности пространства  $K_2 = T_{f_1(0)}(Imf_1)$ . Системой Пфаффа, определяющей  $K_2$ , будет система (13). Продолжив ее и применив лемму Картана, придем, аналогично предыдущему, к системе Пфаффа, определяющей подпространство  $K'_3$ , где  $K_3 = T_{f_2(0)}(Imf_2)$ ,  $K'_3 = d\pi_{2e}^{-1}(K_3)$ ,  $\pi_2 : G \rightarrow G/H_2 : a \mapsto aH_2$  – каноническая проекция.

При этом получим новые дифференциальные инварианты. Выберем, как и выше, среди дифференциальных инвариантов независимые. При этом будем действовать преобразованиями группы  $H_2$ .

Предположим, что, повторив операцию продолжения  $p+1$  раз, мы приведем группу стационарности пространства  $K_{\rho+1}$  к единице:  $H_{\rho+1} = e$ . При этом получится система Пфаффа, определяющая пространство  $K'_{\rho+2}$ :

$$\omega^1 = \lambda^1_\rho \omega^\rho, \dots, \omega^s = \lambda^s_\rho \omega^\rho, \omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0, \quad (18)$$

в которой все формы выражены через базисные формы  $\omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0$ .

**Определение.** Коэффициенты  $\lambda^1_\rho, \dots, \lambda^s_\rho$  называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия  $(D_0, f)$  в точке  $f(0)$* .

При построении канонического репера в произвольной точке подмногообразия  $(D_0, f)$  получим дифференциальные инварианты  $\lambda^1_\rho(x_0), \dots, \lambda^s_\rho(x_0)$ ,  $x_0 \in D_0$ , являющиеся функциями. Эти функции определяют подмногообразие  $(D_0, f)$  с точностью до преобразования группы  $G$  [3] и потому образуют полную систему дифференциальных инвариантов подмногообразия  $(D_0, f)$ .

Чтобы получить канонический репер и дифференциальные инварианты подмногообразия  $(D_0, f)$  в произвольной точке  $x \in D = f(D_0)$ , нужно перейти от подмногообразия  $(D_0, f)$  к подмногообразию  $(D_0, a \circ f)$ , причем  $a$  выбрать так, чтобы  $a \circ x = \pi(e)$ . Возможен и второй путь, при котором по аналогии с вышеописанным непосредственно используются подпространства  $K'_{1|x}, \dots, K'_{p+1|x}$ .

Таким образом, строить канонический репер и находить дифференциальные инварианты можно сразу для всех точек подмногообразия  $(D_0, f)$ .

**Определение.** Систему (18) будем называть *характеризующей системой* подмногообразия  $(D_0, f)$ .

## 2. Проблема эквивалентности подмногообразий однородного пространства

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства  $M = G/H$ .

Пусть заданы два подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  пространства  $M$ .

**Определение.** Два подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  однородного  $G$ -пространства  $M$  называются эквивалентными (или  $G$ -эквивалентными), если существует элемент  $a \in G$  такой, что

$$g(x_0) = T_a(f(x_0)), \quad \forall x_0 \in D_0. \quad (19)$$

**Определение.** Подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  однородного пространства  $M$  будем называть эквивалентными по образу, если существует  $a \in G$  такое, что

$$g(D_0) = T_a(f(D_0)).$$

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

Подмногообразию  $(D_0, f)$ , для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп  $H \supset H_1 \supset \dots \supset H_{p+1} = e$ , названная типовой цепочкой или типом подмногообразия  $(D_0, f)$ . Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе  $G$ .

**Определение.** Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

**Теорема 2.1.** [3]. Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

**Теорема 2.2.** Два подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  однородного  $G$ -пространства  $M = G/H$  тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \quad (20)$$

$i = 1, 2, \dots, r$ , где  $\omega^i$  – базисные левоинвариантные формы на группе Ли  $G$  (т. е. базис в  $\bar{G}^*$ ), а  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  – канонические лифты подмногообразий  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$ .

**Доказательство.** Необходимость.

Пусть подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  эквивалентны, т. е. существует элемент  $a \in G$ , выполняется равенство (19), и пусть  $\hat{f} = \lambda_f \circ f$  и  $\hat{g} = \lambda_g \circ g$  их канонические лифты. Условие (19) удобно записывать в виде:

$$g(x_0) = a \circ f(x_0), \quad \forall x_0 \in D_0. \quad (21)$$

Пусть  $\tilde{f} : f(D_0) = \text{Im } f \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } f)$ ,

$\tilde{g} : g(D_0) = \text{Im } g \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } g)$  – соответствующие продолжающие отображения, причем очевидно, что продолжение производится в одно и то же пространство  $M_1 = G/H_1$ . Действие  $G$  в пространстве  $M_1$  определим формулой:

$$G \times M_1 \rightarrow M_1 : (a, K) \rightarrow dT_a(K) \equiv a \circ K. \quad (22)$$

Тогда имеем:

$$a \circ (\bar{T}_x(\text{Im } f)) = dT_a(T_x(\text{Im } f)) = \bar{T}_{a \circ x}(T_a(\text{Im } f)) = \bar{T}_{a \circ x}(\text{Im}(T_a \circ f)) = T_{a \circ x}(\text{Im } g).$$

Отсюда:

$$\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x). \quad (23)$$

Значит,  $a \circ f_1(x_0) = a \circ \tilde{f}(f(x_0)) = \tilde{g}(a \circ f(x_0)) = \tilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$ .

Таким образом,  $\forall x_0 \in D_0 \quad g_1(x_0) = a \circ f_1(x_0)$



Аналогично доказываются равенства  $g_2(x_0) = a \circ f_2(x_0), \dots, g_p(x_0) = a \circ f_p(x_0)$ , а следовательно и

$$\hat{g}(x_0) = a \circ \hat{f}(x_0) = L_a \left( \hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0. \quad (24)$$

Таким образом, эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты. Из (24) для любой левоинвариантной 1-формы  $\omega^i$  на группе  $G$  получим  $\hat{g}^*(\omega^i) = \left( L_a \circ \hat{f} \right)^*(\omega^i) = \hat{f}^*(L_a^*(\omega^i))$  и, следовательно, в силу левоинвариантности формы  $\omega^i : \hat{g}^*(\omega^i) = \hat{f}^*(\omega^i)$ .

**Достаточность.** Пусть выполняется равенство (20), тогда в силу теоремы 2.3 [1, с. 238] отображения  $\hat{f}$  и  $\hat{g}$  отличаются левым сдвигом, т. е. существует элемент  $a \in G$ , такой что  $\hat{g}(x_0) = L_a \left( \hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0$ .

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию  $\pi$  и, поскольку  $\pi$  есть  $G$ -морфизм, получим:  $\pi \circ \hat{g}(x_0) = \pi \circ L_a \circ \hat{f}(x_0) = a \circ \pi \circ \hat{f}(x_0)$ .

Т. к.  $\hat{f} = \lambda_f \circ f, \hat{g} = \lambda_g \circ g$ , то  $\pi \circ \lambda_g \circ g(x_0) = a \circ \pi \circ \lambda_f \circ f(x_0)$ .

Поскольку  $\lambda_f$  и  $\lambda_g$  – сечения, то  $\pi \circ \lambda_g = Id, \pi \circ \lambda_f = Id$ . Отсюда:  $g(x_0) = a \circ f(x_0), \forall x_0 \in D_0$ .

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  однородного  $G$ -пространства  $M$  тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе  $G$ ) их канонические лифты.

Необходимость доказывается равенством (24).

**Достаточность.** Пусть существует элемент  $a \in G$ , такой что  $\hat{g}(x_0) = L_a \left( \hat{f}(x_0) \right), \forall x_0 \in D_0$ .

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию  $\pi : \pi \circ \hat{g}(x_0) = \pi \circ L_a \left( \hat{f}(x_0) \right) = T_a \circ \pi \circ \hat{f}(x_0)$ . Отсюда  $g(x_0) = T_a \circ f(x_0)$ .

Достаточность доказана.

**Теорема 2.3.** Если канонический лифт  $\hat{f}$  подмногообразия  $(D_0, f)$  подвергнуть преобразованию  $I(h) : G \rightarrow G : a \rightarrow hah^{-1}$ , то получим канонический лифт подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$ , построенный по системе подпространств  $h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}$ .

**Доказательство.**

$I(h) = R_{h^{-1}} \circ L_h, L_h \left( \hat{f} \right)$  есть канонический лифт подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$ .

Это следует из того, что эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты (следствие 1). С другой стороны,  $R_{h^{-1}} \left( L_h \left( \hat{f} \right) \right)$  есть канонический лифт подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$  по совокупности подпространств

$h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}$ . Каждому подмногообразию  $(D_0, f)$ , для которого возможно построение канонического репера, была отнесена совокупность функций  $\lambda_p^1(x_0), \dots, \lambda_p^s(x_0)$ ,  $x_0 \in D_0$ , которые называются дифференциальными инвариантами подмногообразия  $(D_0, f)$ . Справедлива теорема о том, что два подмногообразия однородного пространства одинаковой размерности эквивалентны в том и только в том случае, если в соответствующих точках их дифференциальные инварианты одинаковы. Будем считать, что соответствие между точками подмногообразий задается с помощью прообразов. Что же означает «одинаковые дифференциальные инварианты»? Система  $\omega^{s+1} = 0, \dots, \omega^r = 0$ ,  $\omega^{s_1+1} - \lambda_p^{s_1+1} \omega^p = 0, \dots, \omega^s - \lambda_p^s \omega^p = 0$ , задающая дифференциальные инварианты подмногообразия  $(D_0, f)$ , дает выражение левоинвариантных форм группы через некоторые базисные:  $\omega^{s+1}, \dots, \omega^r$ . Базисные формы выбираются произвольно с тем условием, что они, будучи ограничены на  $T(\widehat{\text{Im}} f)$ , образуют там базис. Вид функций, являющихся дифференциальными инвариантами, зависит от выбора базиса. Выберем базис  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  векторных полей на  $D_0$ . Условимся в качестве базисных форм подмногообразия  $(D_0, f)$  в точке  $x_0 \in D_0$  брать формы  $d\widehat{f}(V_i)^*$ , где знак звездочка означает форму, дуальную соответствующему вектору, а знак черты означает ее левоинвариантное распространение на группу Ли  $G$ . При этом понятие «дифференциальные инварианты» приобретает конкретность для подмногообразия  $(D_0, f)$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.4.** Для того чтобы подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей

$V = \{V_1, \dots, V_n\}$  на  $D_0$ , такой, что  $d\widehat{f}(V_i)^* = d\widehat{g}(V_i)^*$ , и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах  $d\widehat{f}(V_i)^*$  и  $d\widehat{g}(V_i)^*$ , совпадают.

**Доказательство. Необходимость.**

Пусть подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  эквивалентны, т. е. существует такой элемент  $a \in G$ , что

$$g(x_0) = a \circ f(x_0). \quad (25)$$

Заметим, что эквивалентные подмногообразия продолжают в одну и ту же орбиту  $M_1 = G/H_1$  множества  $\Gamma_1$ . Пусть  $\tilde{f} : \text{Im } f \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } f)$ ,  $\tilde{g} : \text{Im } g \rightarrow M_1 : x \rightarrow \bar{T}_x(\text{Im } g)$  – продолжающие отображения. Тогда имеет место равенство (5):  $\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x)$ . Значит,  $a \circ f_1(x_0) = a \circ \tilde{f}(f(x)) = \tilde{g}(a \circ f(x_0)) = \tilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$ .

Аналогично доказываются равенства:

$$g_i(x_0) = a \circ f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (26)$$

где  $f_i, g_i$  – последующие отображения  $f$  и  $g$ . Отсюда:

$$\widehat{g}(x_0) = a \circ \widehat{f}(x_0). \quad (27)$$

Следовательно,

$$\hat{g}^*(x_0) = (a \circ \hat{f})^*(x_0). \quad (28)$$

Равенство (27) выполняется и для любых линейных комбинаций форм  $\omega^i$ .

Пусть  $x_0 \in D_0$ . Рассмотрим последовательность подпространств

$$N_f = T_{f(x_0)}(\text{Im } f), N_{1f} = T_{f_1(x_0)}(\text{Im } f_1), \dots, N_{p+1,f} = T_{f_{p+1}(x_0)}(\text{Im } f_{p+1}), \quad (29)$$

$$N_g = T_{g(x_0)}(\text{Im } g), N_{1g} = T_{g_1(x_0)}(\text{Im } g_1), \dots, N_{p+1,g} = T_{g_{p+1}(x_0)}(\text{Im } g_{p+1}). \quad (30)$$

В силу (26) пространства (29) с помощью сдвига элементом преобразуются в соответствующие пространства (30).

Рассмотрим пространства  $N_f^* = d\pi^1(T_{f(x_0)}(\text{Im } f))$  и  $N_g^* = d\pi^1(T_{g(x_0)}(\text{Im } g))$ . В силу равенств  $\pi \circ L_a = T_a \circ \pi, d\pi \circ dL_a = dT_a \circ d\pi$  имеем

$$d\pi \circ dL_a(N_f^*) = dT_a(d\pi(N_f^*)) = dT_a(N_f) = N_g = d\pi(d\pi^1(N_g)) = d\pi(N_g^*).$$

Отсюда:

$$dL_a(N_f^*) = N_g^*, \quad (31)$$

поскольку при  $dL_a$  полный прообраз преобразуется в полный прообраз.

Пусть

$$\omega^{t+1} = 0, \dots, \omega^r = 0 - \quad (32)$$

система 1-форм в точке  $\hat{g}^*(x_0)$ , определяющая подпространство  $N_g^*$ , тогда система

$$dL_a \omega^{t+1} = 0, \dots, dL_a \omega^r = 0 \quad (33)$$

1-форм в точке  $\hat{f}(x_0)$  будет определять подпространство  $N_f^*$ . Рассуждая аналогично для подпространства  $N_{if}^*$  и  $N_{ig}^*$ ,  $i=1,2,\dots,p+1$ , получим, что  $N_{if}^*$  и  $N_{ig}^*$  определяются системами 1-форм, отличающимися левым сдвигом  $L_a$ . Это означает, что дифференциальные инварианты подмногообразий  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  в соответствующих точках совпадают. Базисными формами подмногообразия  $(D_0, f)$ ,  $\omega^{s+1}, \dots, \omega^t$  можно

выбрать формы  $\overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*}$ , где  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  – некоторый базис векторных полей на  $D_0$ . Тогда базисными формами подмногообразия  $(D_0, f)$  будут формы  $\overline{d(a \circ \hat{f})(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*}$ .

*Достаточность.* Пусть существует базис  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  векторных полей на  $D_0$ , такой, что  $\forall x_0 \in D_0$  в базисе  $\overline{\omega^i} = \overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*}$  подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  имеют одинаковые дифференциальные инварианты. Это значит, что любая форма  $\omega^i$ , не являющаяся базисной, выражается через  $\omega^i$  на пространствах  $T_{\hat{f}(x_0)}(\text{Im } \hat{f})$  и  $T_{\hat{g}(x_0)}(\text{Im } \hat{g})$  с одними и теми же коэффициентами. Поскольку

$\overline{\omega^i} = \overline{d\hat{f}(V_i)_{x_0}^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)_{x_0}^*}$ , то  $\omega^i \left( d\hat{f}(V_i)_{x_0}^* \right) = \omega^i \left( d\hat{g}(V_i)_{x_0}^* \right) = \delta_k^i$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$  и, значит,  
 $\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}(\omega^i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Остальные левоинвариантные формы  $\omega^i$  группы Ли  $G$  в точках  $\hat{f}(x_0)$  и  $\hat{g}(x_0)$  выражаются через базисные с одинаковыми коэффициентами:  $\omega^i = \sum_i \alpha_i \omega^i$ . Значит,

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{f}^* \left( \sum_i \alpha_i \omega^i \right) = \sum_i \alpha_i \hat{f}^*(\omega^i) = \sum_i \alpha_i \hat{g}^*(\omega^i) = \hat{g}^* \left( \sum_i \alpha_i \omega^i \right) = \hat{g}^*(\omega^i).$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.3 [2, с. 238]. Тогда существует элемент  $a \in G$ , такой что для любого  $x_0 \in D_0$ :  $g(x_0) = L_a(f(x_0))$ , т. е. по следствию 1 подмногообразия  $(D_0, f)$  и  $(D_0, g)$  эквивалентны. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь каноническое вложение  $\check{f}$  подмногообразия  $(D_0, f)$  в алгебру Ли  $\overline{G}$  структурной группы Ли  $G$ :

$$\check{f} : D_0 \rightarrow \overline{G} : x_0 \rightarrow \exp^{-1} \left( \hat{f}(x_0) \right). \quad (34)$$

По теореме 3 при воздействии на канонический лифт  $\hat{f}$  подмногообразия  $(D_0, f)$  преобразованием  $I(h)$  получим канонический лифт подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$  по совокупности пространств

$$h \circ K_1, h \circ K_2, \dots, h \circ K_{p+1}, h \in H. \quad (35)$$

Справедлива формула

$$\exp Ad(\sigma)X = I(\sigma)(\exp X). \quad (36)$$

Рассмотрим  $\check{f} = \exp^{-1} \circ \hat{f}$ . Отсюда  $\hat{f} = \exp \circ \check{f}$ . В силу (36) имеем:

$$I(h) \left( \exp \circ \check{f}(x_0) \right) = \exp Adh \left( \check{f}(x_0) \right) = I(h)(\hat{f}(x_0)), x_0 \in D_0. \quad (37)$$

Отсюда следует, что  $Ad(h)\check{f}$  есть образ при отображении  $\exp^{-1}$  канонического лифта подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$  по совокупности пространств (35).

Таким образом, справедлива теорема.

**Теорема 2.5.** Если на каноническое вложение  $\check{f}$  подмногообразия  $(D_0, f)$  действовать преобразованием  $Adh$  присоединенной группы  $AdH$ , то оно преобразуется в каноническое вложение подмногообразия  $(D_0, T_h \circ f)$  по совокупности подпространств (35).

Применив к равенству (37) каноническую проекцию  $\pi$ , получим:

$$\pi \circ I(h)(\exp \circ \check{f}(x_0)) = \pi \circ \exp Adh(\check{f}(x_0)) = \pi \circ I(h)(\hat{f}(x_0)). \quad (38)$$

Учитывая, что  $\pi \circ I(h) = T_h \circ \pi$ ,  $\pi \circ \hat{f} = f$ , получим:

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ I(h)(\hat{f}(x_0)), \quad (39)$$

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ \exp Adh(\check{f}(x_0)). \quad (40)$$

Равенства (39) и (40) вместе с теоремами 2.3 и 2.5 доказывают, что имеет место теорема.

**Теорема 2.6.** Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы  $H$  на множестве канонических лифтов  $n$ -мерных подмногообразий однородного пространства  $G/H$  индуцирует  $H$ -эквивалентность соответствующих подмногообразий. Эквивалентность относительно присоединенной группы  $AdH$  на множестве всех канонических вложений  $n$ -мерных подмногообразий однородного пространства  $G/H$  индуцирует  $H$ -эквивалентность соответствующих подмногообразий.

Поскольку в однородном пространстве  $G/H$  проблема  $G$ -эквивалентности подмногообразий сводится к проблеме  $H$ -эквивалентности, то теорема 2.5 сводит проблему  $G$ -эквивалентности подмногообразий в однородном пространстве  $M = G/H$  к проблеме  $AdH$ -эквивалентности подмногообразий в алгебре Ли  $\bar{G}$  структурной группы  $G$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М., 1956. – С. 428.
2. Стернберг, С. Лекции по дифференциальной геометрии / С. Стернберг. – М. : Наука, 1970. – 336 с.
3. Юдов, А. А.  $G$ -пространства, порожденные однородным фактор-пространством / А. А. Юдов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1975. – № 2. – С. 27–31.
4. Юдов, А. А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия / А. А. Юдов. – Деп. в ВИНТИ 1982, рег. № 359582.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.10.2019

***Yudov A. A., Kisilyuk E. V. Method for Constructing a Canonical Ripper of a Submanifold of Homogeneous Space***

*The work examines submanifolds of a homogeneous space, describes the construction of a canonical ripper of a submanifold of a homogeneous space, and constructs the computing apparatus of the method of constructing a canonical ripper. The submanifold is studied locally.*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай ці рускай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 см або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках (напрыклад, [1, с. 32], [2, с. 52–54]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруецца падзагалоўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры;
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на беларускай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, паштовы і электронны адрасы для перапіскі і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацый артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, афармленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А. Г. Хадыева, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 05.12.2019. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,79. Ул.-выд. арк. 8,26.

Тыраж 100 экз. Заказ № 512.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.