**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542

# ЗАВИСИМОСТЬ ПРОИЗВОДНОЙ *p*-ДЛИНЫ *p*-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ОТ ПОРЯДКА ЕЕ СИЛОВСКОЙ *p*-ПОДГРУППЫ

**Д.В. Грицук**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

# DEPENDENCE OF THE DERIVED *p*-LENGTH OF A *p*-SOLVABLE GROUP ON THE ORDER OF ITS SYLOW *p*-SUBGROUP

**D.V. Gritsuk**

*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

Доказывается, что производная *p*-длина $l_p^a(G)$ *p*-разрешимой группы $G$ с силовской *p*-подгруппой порядка $p^n$ не превышает $1+\frac{n}{2}$, а если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$.

***Ключевые слова***: *конечная группа, p-разрешимая группа, силовская подгруппа, производная p-длина.*

It is proved that the derived *p*-length $l_p^a(G)$ of the *p*-solvable group $G$ in which the Sylow *p*-subgroup has order $p^n$ is at most $1+\frac{n}{2}$ and if $p \notin \{2,3\}$ then $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$.

***Keywords***: *finite group, p-solvable group, Sylow subgroup, derived p-length.*

## *Введение*

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

В 1956 году Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие *p*-длины *p*-разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской *p*-подгруппы [2, VI.6.6]. В частности, *p*-длина *p*-разрешимой группы с силовской *p*-подгруппой порядка $p^n$ не превышает $n$. Эта оценка существенно снижена Е.Г. Брюхановой [4], которая доказала, что *p*-длина *p*-разрешимой группы не превышает производной длины ее силовской *p*-подгруппы. А. Манн [5] установил, что производная длина разрешимой группы $G$ порядка $p^n$ не превышает наибольшего значения $d$, удовлетворяющего неравенству: $n \ge 2^{d-1}+2d-4$.

В.С. Монахов [6] предложил следующее определение производной *p*-длины *p*-разрешимой группы. Пусть $G$ – *p*-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом,

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы которого являются либо $p'$-группами, либо абелевыми *p*-группами. Наименьшее число абелевых *p*-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы $G$ называется производной *p*-длиной группы $G$ и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что производная *p*-длина *p*-группы совпадает с ее производной длиной. Некоторые оценки производной *p*-длины получены в работах [7]–[9]. В частности, в [8] установлено, что производная *p*-длина конечной *p*-разрешимой группы $G$ с бициклической силовской *p*-подгруппой не превышает 2 при $p \ge 3$ и $l_2^a(G) \le 3$. Понятно, что

$$l_p^a(G) \le l_p(G) \cdot d(G_p), \quad (0.2)$$

где $l_p(G)$ – *p*-длина *p*-разрешимой группы $G$, а $d(G_p)$ – производная длина ее силовской *p*-подгруппы. Из неравенства (0.2) и [4] получаем общую оценку производной *p*-длины *p*-разрешимой группы $G$:

$$l_p^a(G) \le (d(G_p))^2. \quad (0.3)$$

Но эта оценка неточная. Из (0.3) для симметрической группы $S_4$ степени 4 получаем, что $l_2^a(S_4) \le 4$, в то время как $l_2^a(S_4) = 2$. Соответствующие примеры можно привести для любого простого *p*.

В настоящей статье исследуется производная *p*-длина *p*-разрешимой группы $G$ в зависимости от порядка $p^n$ ее силовской *p*-подгруппы. Доказывается, что $l_p^a(G) \le 1+\frac{n}{2}$, а если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$.

## *1 Используемые понятия и обозначения*

Зафиксируем некоторое множество простых чисел $\pi$. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число $m$ называется $\pi$-числом. Группа $G$ называется

$\pi$-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и $\pi'$-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$.

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы $G$, если подгруппа $G_{i+1}$ нормальна в $G_i$ для каждого $i$. Фактор–группы $G_i / G_{i+1}$ называют факторами ряда (0.1).

Группа называется $p$-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1) факторы которого являются либо разрешимыми $p$-группами, либо $p'$-группами. Наименьшее число $p$-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы $G$ называется $p$-длиной $p$-разрешимой группы $G$ и обозначается через $l_p(G)$.

Производной длиной группы $G$ называют наименьшее натуральное число $m$, для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь $G'$ – коммутант группы $G$ и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

### *2 Вспомогательные леммы*

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

При $\pi = \{p\}$ из [7] получаем утверждения следующих двух лемм.

***Лемма* 2.1.** *Пусть $G$ – p-разрешимая группа. Тогда:*

1) *если $H$ – подгруппа группы $G$, то*
$$l_p^a(H) \le l_p^a(G);$$

2) *если $N$ – нормальная подгруппа группы $G$, то*
$$l_p^a(G/N) \le l_p^a(G), l_p^a(G) \le l_p^a(G/N) + l_p^a(N);$$

3) *если $N$ – нормальная $p'$-подгруппа группы $G$, то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$;*

4) *если $G$ и $V$ – p-разрешимые группы, то*
$$l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\};$$

5) *если $N_1$ и $N_2$ – нормальные подгруппы в $G$, то*
$$l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}.$$

***Лемма* 2.2.** *Если $N$ – нормальная p-подгруппа p-разрешимой группы $G$, то*
$$l_p^a(G) \le l_p^a(G/N) + d(G_p).$$

***Лемма* 2.3** [9, Лемма 2.5]. *Пусть $G$ – p-разрешимая группа, а $G_p$ – ее силовская p-подгруппа. Тогда:*

1) *если $G_p$ имеет порядок $p$ или $p^2$, то*
$$l_p^a(G) \le 1;$$

2) *если $G_p$ имеет порядок $p^3$, то $l_p^a(G) \le 2$ для всех $p$ и $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$;*

3) *если $G_p$ имеет порядок $p^4$, то $l_p^a(G) \le 2$ для $p \ge 5$ и $l_p^a(G) \le 3$ для $p \in \{2,3\}$. Кроме того, $l_p(G) \le 2$ для всех $p$.*

***Лемма* 2.4** [5, Теорема 1]. *Пусть $G$ – p-группа порядка $p^m$ и производной длины $d$. Тогда*
$$m \ge 2^{d-1} + 2d - 4.$$

Через $O_{p'}(G)$ обозначается наибольшая нормальная $p'$-подгруппа группы $G$. Из [10, Лемма 2] при $\pi = \{p\}$ получаем следующую лемму.

***Лемма* 2.5.** *Если $G$ – p-разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$ и $O_p(G) = F(G)$.*

***Лемма* 2.6**. *Если $G$ – неединичная p-разрешимая группа и $O_{p'}(G) = 1$, то $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$.*

*Доказательство.* Пусть $G$ – неединичная $p$-разрешимая группа, $O_{p'}(G) = 1$ и $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа $G/\Phi(G)$ – неединичная $p$-разрешимая группа. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе $G/\Phi(G)$. Известно, что в этом случае $N/\Phi(G)$ либо элементарная абелевая $p$-группа, либо $p'$-группа.

Если $N/\Phi(G)$ – элементарная абелевая $p$-группа, то $N/\Phi(G)$ нильпотентна и $N$ – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда, $\Phi(G) < N \le F(G)$ и лемма доказана.

Если $N/\Phi(G)$ – $p'$-группа, то $N = [\Phi(G)]K$ по [2], где $K$ – $p'$-холлова подгруппа в $N$. К нормальной подгруппе $N$ и $p'$-холловой подгруппе $K$ можно применить лемму Фраттини:
$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$
следовательно, $K$ нормальна в $G$ и $K \le O_{p'}(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

### *3 Оценка производной p-длины*

***Теорема* 3.1.** *Пусть $G$ – p-разрешимая группа, $G_p$ – ее силовская p-подгруппа порядка $p^n$. Если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$. Если $p \in \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le 1 + \frac{n}{2}$.*

*Доказательство.* Воспользуемся индукцией по порядку группы $G$. Если $n \le 2$, то $G_p$ абелева и по лемме 2.3 (1) $l_p^a(G) = 1 \le \frac{n+1}{2}$. Далее считаем, что $n \ge 3$.

По лемме 2.1 (3) можно считать, что $O_{p'}(G) = 1$. Покажем, что в группе $G$ существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть $N_1$ и $N_2$ – две минимальные нормальные подгруппы группы $G$. Так как $|G/N_i| < |G|$, $i = 1,2$, то по предположению индукции $l_p^a(G/N_i) \le \frac{n+1}{2}$. По лемме 2.1 (5) $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$. Итак, в группе $G$ существует единственная минимальная нормальная подгруппа $N$.

Так как группа $G$ $p$-разрешима и $O_{p'}(G)=1$, то подгруппа Фиттинга $F(G)$ является $p$-подгруппой, поэтому $F(G)=O_p(G)$. По лемме 2.5

$$C_G(F(G))\subseteq F(G),\ \text{т. е. } C_G(F(G))=Z(F(G)).$$

Пусть $|F(G)|=p^m$, а $d(F(G))=d$. Тогда по индукции $l_p^a(G/F(G))\le\frac{n-m+1}{2}$. По лемме 2.2

$$l_p^a(G)\le d(F(G))+l_p^a(G/F(G))\le$$
$$\le d+\frac{n-m+1}{2}=\frac{n+1}{2}+d-\frac{m}{2}.$$

Ясно, что теорему надо доказывать в случае, когда $d-\frac{m}{2}>0$, т. е. когда $2d>m$.

По лемме 2.4 $m\ge 2^{d-1}+2d-4$, поэтому

$$2d>m\ge 2^{d-1}+2d-4, 0>2^{d-1}-4, d\in\{1,2\}.$$

При $d=1$ из неравенства $2d>m$ получаем, что $|F(G)|=p$. Теперь $G/F(G)$ $p'$-группа как группа автоморфизмов группы $F(G)$ и $|G_p|=p$, противоречие.

Следовательно, $d=2$, подгруппа $F(G)$ неабелева, значит $m=3$ и $C_G(F(G))=Z(F(G))=$ $=\Phi(F(G))$ – подгруппа порядка $p$. Поскольку $1\ne\Phi(F(G))\subseteq\Phi(G)$, то $\Phi(G)\ne 1$. По лемме 2.6 $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$, поэтому $|F(G):\Phi(G)|=p$ или $p^2$. Из [1, Теорема 4.24] имеем, что фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$. Так как $|F(G)/\Phi(G)|\le p^2$, то число прямых сомножителей не более 2.

Пусть $F(G)/\Phi(G)=K_1/\Phi(G)\times K_2/\Phi(G)$, где $K_i/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Ясно, что $|K_i/\Phi(G)|=p$ для $i\in\{1,2\}$. Поэтому фактор-группа

$$(G/\Phi(G))/C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

будет $p'$-группой. По [1, Лемма 2.33]

$$(G/\Phi(G))/\bigcap_{i=1}^{2}C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))$$

также будет $p'$-группой. Так как

$$\bigcap_{i=1}^{2}C_{G/\Phi(G)}(K_i/\Phi(G))=$$
$$=C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G))\subseteq F(G)/\Phi(G),$$

то $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G))\simeq G/F(G)$ будет $p'$-группой и $F(G)=G_p$ – имеет порядок $p^3$. По лемме 2.3 (2) $l_p^a(G)\le 2\le\frac{3+1}{2}$, т. е. теорема справедлива.

Остается случай, когда $F(G)/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/F(G)$. По [1, Теорема 2.8]

$$C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G),$$
$$G/\Phi(G)/C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G))\simeq G/F(G)$$

будет группой автоморфизмов для $F(G)/\Phi(G)$. Так как $|F(G)/\Phi(G)|=p$ или $p^2$, то $G/F(G)$ будет $p'$-группой или изоморфна подгруппе группы $GL(2,p)$. В последней силовская $p$-подгруппа имеет простой порядок, поэтому $|G_p|=p^3$ или $p^4$. Если $|G_p|=p^3$, то опять по лемме 2.3 (2) $l_p^a(G)\le 2\le\frac{3+1}{2}$. Если $|G_p|=p^4$, то по лемме 2.3 (3) $l_p^a(G)\le 2\le\frac{4+1}{2}$ для $p>3$ и $l_p^a(G)\le 3\le 1+\frac{4}{2}$ для $p\in\{2,3\}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.

3. *Hall*, *P.* The $p$-lengh of a $p$-soluble groups and reduction theorems for Burnside’s problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

4. *Брюханова*, *Е.Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е.Г. Брюханова // Математические заметки. – 1981. – Т. 29, № 2. – С. 161–170.

5. *Mann*, *A.* The derived length of $p$-groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.

6. *Монахов*, *В.С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.

7. Грицук, Д.В. О производной $\pi$-длине $\pi$-разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

8. *Грицук*, *Д.В.* О конечных $\pi$-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 61–66.

9. *Грицук*, *Д.В.* Производная $\pi$-длина $\pi$-разрешимой группы, силовские $p$-подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок $p^3$ / Д.В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.

10. *Монахов*, *В.С.* О нильпотентной $\pi$-длине максимальных подгрупп конечных $\pi$-разрешимых групп / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.

*Поступила в редакцию 15.08.14.*