Проблемы физики, математики и техники, № 1 (14), 2013

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С БИЦИКЛИЧЕСКИМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Д.В. Грицук[1], В.С. Монахов[1], О.А. Шпырко[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*
[2]*Филиал Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Севастополь, Украина*

ON FINITE π-SOLVABLE GROUPS WITH BICYCLIC SYLOW SUBGROUPS

D.V. Gritsuk[1], V.S. Monakhov[1], O.A. Shpyrko[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*
[2]*Branch of the M.V. Lomonosov Moscow State University, Sevastopol, Ukraine*

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Доказывается, что производная π-длина конечной π-разрешимой группы с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p\in\pi$ не превышает 6, а в случае, когда $2\notin\pi$, не превышает 3.

***Ключевые слова**: конечная группа, π-разрешимая группа, бициклическая группа, силовская подгруппа, производная π-длина.*

The group is called a bicyclic group if it is the product of two cyclic subgroups. It is proved that the π-solvable group with bicyclic Sylow p-subgroups for any $p\in\pi$ is at most 6 and if $2\notin\pi$, then the derived π-length of a π-solvable group with bicyclic Sylow p-subgroups for any $p\in\pi$ is at most 3.

***Keywords**: finite group, π-solvable group, bicyclic group, Sylow subgroup, derived π-length.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Инварианты конечных разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [3]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. Разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами, изучены в [4].

Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi=\pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

В настоящей статье исследуется производная π-длина π-разрешимой группы, у которой силовские p-подгруппы бициклические для всех $p\in\pi$. Доказывается, что $l_\pi^a(G)\le 6$, а если $2\notin\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 3$. Отсюда вытекают некоторые результаты работы [3].

1 Основные понятия

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G считаем, что $\pi(G)=\pi(|G|)$.

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π. Если $\pi(m)\subseteq\pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется π-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi$, и π'-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi'$. В последнем случае $\pi(G)\cap\pi=\varnothing$.

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G:

$$1=F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\ldots\subseteq F_t\subseteq\ldots,$$

где $F_{i+1}/F_i=F(G/F_i(G))$. Здесь $F(X)$ – подгруппа Фиттинга группы X, т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы X. Если группа G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k=G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной разрешимой группы G и обозначают через $n(G)$. Наименьшее натуральное число n, для которого выполняется равенство $G^{(n)}=1$, называют производной длиной разрешимой группы G и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)}=(G^{(i-1)})'$.

Группа G называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом

$$1=G_0\subseteq G_1\subseteq G_2\subseteq\ldots\subseteq G_m=G, \qquad (1.1)$$

факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Ряд (1.1) будем называть (π',π)-рядом группы G. Наименьшее число π-факторов среди всех нормальных (π',π)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$. При $\pi=\{p\}$ определение π-длины π-разрешимой группы превращается в определение p-длины $l_p(G)$, предложенное Ф. Холлом и Г. Хигменом [5] для p-разрешимых групп. Элементарная теория p-длины изложена в монографии Хупперта [2].

Поскольку π-факторы (π',π)-ряда π-разрешимой группы G разрешимы, то каждая π-разрешимая группа обладает (π',π^n)-рядом, т. е. таким нормальным (π',π)-рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех (π',π^n)-рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если $\pi(G)\subseteq\pi$, то π-разрешимая группа G становится разрешимой и значение нильпотентной π-длины группы G совпадает со значением нильпотентной длины.

Теперь введем понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Обратим внимание на то, что здесь будут использоваться субнормальные ряды. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным (π',π^a)-рядом, т. е. таким рядом

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1, \qquad (1.2)$$

что подгруппа G_i нормальна в G_{i-1} и факторы G_{i-1}/G_i являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами для всех i. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных (π',π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi=\pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

Метациклическая группа – это группа, содержащая циклическую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая. Ясно, что метациклическая группа всегда является бициклической. Бициклическая примарная группа нечетного порядка является метациклической [2, III.11.5]. Бициклические 2-группы и непримарные бициклические группы нечетного порядка могут быть неметациклическими (см. примеры 2.2 и 2.3 в статье [4]). Общие свойства бициклических групп можно найти в монографии [2].

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

***Лемма* 2.1** [3, следствие теоремы 2]. *Группа нечетного порядка с метациклическими силовскими подгруппами дисперсивна по Оре и имеет нильпотентный коммутант.*

Из определений π-длины, нильпотентной π-длины и производной π-длины вытекает следующая лемма.

***Лемма* 2.2.** *Если G – π-разрешимая группа, то $l_\pi(G)\le l_\pi^n(G)\le l_\pi^a(G)$.*

В дальнейшем под $l_\pi^*(G)$ будем понимать либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l_\pi^n(G)$, либо всюду $l_\pi^a(G)$.

***Лемма* 2.3** *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:*

1) *если H – подгруппа группы G, то*

$$l_\pi^*(H)\le l_\pi^*(G);$$

2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N)\le l_\pi^*(G)$ и $l_\pi^*(G)\le l_\pi^*(G/N)+l_\pi^*(N)$;*

3) *если N – нормальная π'-подгруппа группы G, то $l_\pi^*(G/N)=l_\pi^*(G)$;*

4) *если G и V – π-разрешимые группы, то $l_\pi^*(G\times V)=\max\{l_\pi^*(G),l_\pi^*(V)\}$;*

5) *если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то $l_\pi^*(G/(N_1\cap N_2))\le\max\{l_\pi^*(G/N_1),l_\pi^*(G/N_2)\}$.*

Доказательство. Для $l_\pi(G)$ и $l_\pi^n(G)$ утверждения доказаны в [2] и [7] соответственно. Докажем справедливость утверждения для производной π-длины $l_\pi^a(G)$.

Для π-разрешимой группы G зафиксируем субнормальный (π',π^a)-ряд (1.2), в котором число абелевых π-факторов совпадает с $l_\pi^a(G)=t$.

1. Пусть $H_i=G_i\cap H$. Ряд

$$H=H_0\supseteq H_1\supseteq H_2\supseteq\ldots\supseteq H_n=1 \qquad (2.1)$$

будет субнормальным для подгруппы H, причем факторы

$$H_i / H_{i+1} = (G_i \cap H)/(G_{i+1} \cap H) \simeq$$
$$\simeq (G_i \cap H)G_{i+1} / G_{i+1}$$

изоморфны подгруппам факторов (π', π^a)-ряда (1.2). Поэтому построенный ряд (2.1) будет (π', π^a)-рядом группы H и число абелевых π-факторов этого ряда не превосходит t. Из определения производной π-длины заключаем, что $l_\pi^a(H) \le t = l_\pi^a(G)$.

2. Ясно, что ряд

$$G/N = G_0/N \supseteq G_1N/N \supseteq \ldots \supseteq G_nN/N = 1 \quad (2.2)$$

будет субнормальным рядом группы G/N с факторами

$$(G_iN/N)/(G_{i+1}N/N) \simeq G_iN/G_{i+1}N =$$
$$= G_i(G_{i+1}N)/G_{i+1}N \simeq$$
$$\simeq G_i/(G_i \cap G_{i+1}N) = G_i/(G_{i+1}(G_i \cap N)) \simeq$$
$$\simeq (G_i/G_{i+1})/(G_{i+1}(G_i \cap N)/G_{i+1}),$$

изоморфными фактор-группам групп G_i/G_{i+1}. Построенный ряд (2.2) будет (π', π^a)-рядом для группы G/N, и число его абелевых π-факторов не превосходит t. Поэтому $l_\pi^a(G/N) \le t = l_\pi^a(G)$.

Пусть теперь ряды

$$G/N = G_0/N \supseteq G_1/N \supseteq \ldots \supseteq G_n/N = 1, \quad (2.3)$$
$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_m = 1 \quad (2.4)$$

будут субнормальными (π', π^a)-рядами, в которых число абелевых π-факторов совпадает с $l_\pi^a(G/N)$ и с $l_\pi^a(N)$ соответственно. Тогда ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n =$$
$$= N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_m = 1$$

будет субнормальным (π', π^a)-рядом группы G, в котором число абелевых π-факторов равно $l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$. Из определения производной π-длины получаем, что $l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$.

3. Пусть N – нормальная π'-подгруппа группы G и пусть ряд (2.3) является (π', π^a)-рядом группы G/N, в котором число абелевых π-факторов совпадает с $l_\pi^a(G/N)$. Тогда ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq N \supseteq 1$$

будет (π', π^a)-рядом для группы G, в котором число абелевых π-факторов равно $l_\pi^a(G/N)$. Из определения производной π-длины следует, что $l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/N)$. Так как уже доказано, что $l_\pi^a(G/N) \le l_\pi^a(G)$, то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$.

4. Поскольку G и V – подгруппы группы $G \times V$, то из утв. 1 следует, что

$$\max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\} \le l_\pi^a(G \times V).$$

Покажем, используя индукцию по $|G| + |V|$, обратное неравенство. Пусть

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = 1, \quad (2.5)$$
$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_m = 1 \quad (2.6)$$

– субнормальные (π', π^a)-ряды π-разрешимых групп G и V, в которых число абелевых π-факторов равно $l_\pi^a(G)$ и $l_\pi^a(V)$ соответственно. Предположим, что одна из подгрупп G/G_1, V/V_1 является π'-подгруппой. Пусть, например, G/G_1 – π'-подгруппа. Тогда $l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G_1)$, а по индукции

$$l_\pi^a(G_1 \times V) = \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V)\}.$$

Поскольку

$$(G \times V)/(G_1 \times V) \simeq G/G_1$$

является π'-группой, то

$$l_\pi^a(G \times V) = l_\pi^a(G_1 \times V)$$

и утв. 4 справедливо.

Пусть теперь G/G_1 и V/V_1 являются π-подгруппами. Из выбора рядов (2.5) и (2.6) следует, что

$$l_\pi^a(G_1) = l_\pi^a(G) - 1, l_\pi^a(V_1) = l_\pi^a(V) - 1.$$

Действительно, у (π', π^a)-ряда

$$G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = 1$$

число абелевых π-факторов равно $l_\pi^a(G) - 1$, поэтому

$$l_\pi^a(G_1) \le l_\pi^a(G) - 1.$$

Но если $l_\pi^a(G_1) < l_\pi^a(G) - 1$, то у ряда (2.5) число абелевых π-факторов равно

$$l_\pi^a(G_1) + 1 < l_\pi^a(G),$$

что противоречит выбору этого ряда. Поэтому

$$l_\pi^a(G_1) = l_\pi^a(G) - 1.$$

Аналогично, $l_\pi^a(V_1) = l_\pi^a(V) - 1$. Отсюда следует, что

$$\max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\} = 1 + \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V_1)\}.$$

Используя индукцию, получаем:

$$l_\pi^a(G_1 \times V_1) = \max\{l_\pi^a(G_1), l_\pi^a(V_1)\}.$$

Так как

$$(G \times V)/(G_1 \times V_1) \simeq G/G_1 \times V/V_1$$

является абелевой π-группой, то

$$l_\pi^a(G \times V) \le 1 + l_\pi^a(G_1 \times V_1) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}.$$

Утв. 4 доказано.

5. Пусть N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G. По лемме Ремака группа $G/(N_1 \cap N_2)$ является подгруппой группы $(G/N_1) \times (G/N_2)$, поэтому из утв. 1 и 4 следует, что

$$l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}.$$

Лемма доказана.

***Лемма* 2.4** *Если* G – π*-разрешимая группа, то* $n(G_\pi) \le l_\pi^n(G) \le l_\pi(G)n(G_\pi)$ *и*

$$d(G_\pi) \le l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi).$$

Доказательство. Для $l_\pi^n(G)$ утверждение доказано в [7]. Докажем вторую цепочку неравенств. Пусть

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_n = 1$$

– нормальный ряд группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо π-группами, причем число π-факторов совпадает со значением $l_\pi(G)$. Пусть G_i / G_{i+1} – π-фактор этого ряда. Тогда

$$G_i / G_{i+1} \subseteq G_\pi G_i / G_{i+1},$$

где G_π – π-холлова подгруппа группы G. Поэтому

$$d(G_i / G_{i+1}) \le d(G_\pi).$$

Для каждого натурального t подгруппа $(G_i)^{(t)}$ является характеристической в G_i, поэтому

$$\left(G_i\right)^{(t)} \lhd G,\ \left(G_i\right)^{(t)} G_{i+1} \lhd G.$$

Так как

$$(G_i / G_{i+1})^{(t)} = (G_i)^{(t)} G_{i+1} / G_{i+1},$$

то ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_i \supseteq (G_i)' G_{i+1} \supseteq (G_i)'' G_{i+1} \supseteq ...$$
$$... \supseteq (G_i)^{(d(G_i/G_{i+1}))} G_{i+1} = G_{i+1} \supseteq ... \supseteq G_n = 1$$

будет нормальным рядом группы G и на участке от G_i до G_{i+1} число абелевых π-факторов не превышает числа $d(G_\pi)$. Поступая так с каждым π-фактором исходного ряда, приходим к нормальному ряду группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причем число абелевых π-факторов не превысит числа $l_\pi(G)d(G_\pi)$. Следовательно, $l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi)$. Из утв. 1 следует, что

$$d(G_\pi) = l_\pi^a(G_\pi) \le l_\pi^a(G).$$

Лемма доказана.

Напомним, что через $O_\pi(G)$ $(O_{\pi'}(G))$ обозначается наибольшая нормальная π-подгруппа (π'-подгруппа соответственно) группы G, а $O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$.

Лемма 2.5 *Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_\pi^*(G/N) \le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_\pi^*(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) *в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа*;

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ *для некоторого простого* $p \in \pi$;

4) $O_{p'}(G) = 1$ *и* $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Доказательство. Для $l_\pi(G)$ и $l_\pi^n(G)$ утверждения доказаны в [2] и [7]. Докажем утверждения для $l_\pi^a(G)$.

1. Предположим, что $O_{\pi'}(G) \ne 1$. Тогда по условию леммы $l_\pi^a(G/O_{\pi'}(G)) \le t$. Теперь из леммы 2.3 (2) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^a(G/O_{\pi'}(G)) \le t,$$

противоречие. Поэтому предположение неверно и $O_{\pi'}(G) = 1$.

2. Допустим, что в группе G существуют две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Тогда $N_1 \cap N_2 = 1$ и по условию

$$l_\pi^a(G/N_1) \le t,\quad l_\pi^a(G/N_2) \le t.$$

Теперь из леммы 2.3 (5) заключаем, что

$$l_\pi^a(G) \le \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\} \le t,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа.

3. Так как группа G π-разрешима и $O_{\pi'}(G) = 1$, то $O_\pi(G) \ne 1$. Подгруппа $O_\pi(G)$ разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга $F(O_\pi(G))$ отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G)) \subseteq F(G).$$

Из утв. 1 следует, что $F(G)$ является π-подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F(O_\pi(G)), F(G) = F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна, а согласно утв. 2 в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого $p \in \pi$.

4. Если $O_{p'}(G) \ne 1$, то в группе G будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы: p-подгруппа из $O_p(G)$ и p'-подгруппа из $O_{p'}(G)$. Имеем противоречие с утв. 2. Поэтому $O_{p'}(G) = 1$.

Так как подгруппа $O_p(G)$ нормальна в G, то $C_G(O_p(G))$ нормальна в G. Предположим, что

$$C_G(O_p(G)) \not\subseteq O_p(G).$$

Тогда фактор-группа

$$C_G(O_p(G))O_p(G)/O_p(G)$$

будет неединичной нормальной подгруппой фактор-группы $G/O_p(G)$. Поскольку $O_p(G/O_p(G)) = 1$, то минимальная нормальная в $G/O_p(G)$ подгруппа $A/O_p(G)$ из $C_G(O_p(G))O_p(G)/O_p(G)$ будет p'-группой. Пусть $K - p'$-холлова подгруппа из A. Тогда фактор-группа $KO_p(G)/O_p(G)$ будет p'-холловой подгруппой в группе $A/O_p(G)$, поэтому

$$A = KO_p(G) = K \times O_p(G).$$

Так как K холлова, то K – характеристическая подгруппа в A, а подгруппа A нормальна в G. Следовательно, подгруппа K нормальна в G и

$$K \subseteq O_{p'}(G) = 1.$$

Имеем противоречие. Поэтому допущение неверно и $C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.6** *Если G – π-разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l^*_\pi(G) \le l^*_{\pi_1}(G) + l^*_{\pi_2}(G)$.*

Доказательство. Для $l_\pi(G)$ и $l^n_\pi(G)$ утверждения доказаны в [6] и [7]. Докажем справедливость утверждения для производной π-длины $l^a_\pi(G)$. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G по индукции

$$l^a_\pi(G/N) \le l^a_{\pi_1}(G/N) + l^a_{\pi_2}(G/N). \qquad (2.7)$$

По лемме 2.3 (2)

$$l^a_{\pi_1}(G/N) \le l^a_{\pi_1}(G), l^a_{\pi_2}(G/N) \le l^a_{\pi_2}(G),$$

поэтому

$$l^a_\pi(G/N) \le l^a_{\pi_1}(G) + l^a_{\pi_2}(G). \qquad (2.8)$$

Если существует нормальная неединичная подгруппа N такая, что $l^a_\pi(G/N) = l^a_\pi(G)$, то из (2.8) получаем, что

$$l^a_\pi(G) = l^a_\pi(G/N) \le l^a_{\pi_1}(G) + l^a_{\pi_2}(G),$$

и лемма справедлива. Поэтому следует считать, что $l^a_\pi(G) > l^a_\pi(G/N)$ для любой неединичной нормальной в G подгруппы N. По лемме 2.5 $O_{\pi'}(G) = 1$, в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p \in \pi$, $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Пусть $N = F(G)$ и

$$l^a_\pi(G/N) = l^a_\pi(G) - i \qquad (2.9)$$

для некоторого натурального $i > 0$. Фиксируем субнормальный ряд

$$G/N = G_0/N \supset G_1/N \supset \ldots \supset G_n/N = 1, \quad (2.10)$$

где $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ – либо абелева π-группа, либо π'-группа, причем число абелевых π-факторов совпадает с $l^a_\pi(G) - i$.

Без ущерба для доказательства можно считать, что $p \in \pi_1$. Так как $\pi_1 \subseteq \pi$, то $\pi' \subseteq (\pi_1)'$. Поэтому π'-факторы ряда (2.10) будут $(\pi_1)'$-факторами. Если $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ – абелевый π-фактор ряда (2.10), то

$$(G_i/N)/(G_{i+1}/N) =$$

$$= (G_i/N)_1/(G_{i+1}/N) \times (G_i/N)_2/(G_{i+1}/N),$$

где $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$ – π_1-холлова подгруппа, а $(G_i/N)_2/(G_{i+1}/N)$ – $(\pi_1)'$-холлова подгруппа группы $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$. Теперь ряд (2.10) уплотняем на участке от G_i/N до G_{i+1}/N следующим образом

$$G_i/N \supset (G_i/N)_1 \supset G_{i+1}/N.$$

Ясно, что первый фактор $G_i/N/(G_i/N)_1$ будет $(\pi_1)'$-группой, а второй фактор $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$ – абелевой π_1-группой. Поступая так с каждым абелевым π-фактором ряда (2.10), мы приходим к новому ряду группы G/N, у которого факторы либо абелевы π_1-группы, либо $(\pi_1)'$-группы, причем число абелевых π_1-факторов осталось прежним, т. е. совпадает с $l^a_\pi(G) - i$. Из определения производной π-длины получаем, что

$$l^a_{\pi_1}(G/N) \le l^a_\pi(G) - i. \qquad (2.11)$$

Теперь имеем

$$l^a_\pi(G) \overset{(2.9)}{=}$$

$$= l^a_\pi(G/N) + i \overset{(2.7)}{\le} l^a_{\pi_1}(G/N) + l^a_{\pi_2}(G/N) + i \overset{(2.11)}{\le}$$

$$\overset{(2.11)}{\le} l^a_{\pi_1}(G) - i + l^a_{\pi_2}(G) + i = l^a_{\pi_1}(G) + l^a_{\pi_2}(G).$$

Лемма доказана.

***Лемма* 2.7** *Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – ее π-холлова подгруппа. Если G_π абелева, то $l^a_\pi(G) \le 1$.*

Доказательство. Ясно, что в любой факторгруппе группы G π-холлова подгруппа абелева. По индукции $l^a_\pi(G/N) \le 1$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G. По лемме 2.5 в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $O_{\pi'}(G) = 1$ и

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого $p \in \pi$. Так как $F(G) \subseteq G_\pi$ и G_π абелева, то $G_\pi \subseteq C_G(F(G))$. Но из леммы 2.5 следует, что

$$C_G(F(G)) \subseteq F(G),$$

поэтому $G_\pi = F(G)$ и $l^a_\pi(G) \le 1$. Лемма доказана.

***Лемма* 2.8** *Пусть G – p-разрешимая группа с бициклической силовской p-подгруппой. Тогда*

1) *если $p > 2$, то $l_p(G) \le 1$ и $l^a_p(G) \le 2$;*

2) *если $p = 2$, то $l^a_2(G) \le 3$ и $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3; в частности, $l_2(G) \le 2$.*

Доказательство. По условию в группе G силовская p-подгруппа G_p бициклическая, поэтому подгруппа $(G_p)'$ абелева [1] и $d(G_p) \le 2$. Если $l_p(G) \le 1$, то $l^a_p(G) \le 2$ по лемме 2.7. Пусть $l_p(G) > 1$. Тогда по лемме из работы [3] число

$p=2$ и $G/O_{2',2}(G)$ изоморфна симметрической группе S_3. Из леммы 2.7 следует, что $l_2^a(G/O_{2',2}(G))\le 1$. Поскольку $l_2(O_{2',2}(G))\le 1$ и силовская 2-подгруппа из $O_{2',2}(G)$ имеет абелевый коммутант, то $l_2^a(O_{2',2}(G))\le 2$ по лемме 2.4. Теперь из леммы 2.3 (2) получаем, что $l_2^a(G)\le 3$. Лемма доказана.

3 Основные результаты

***Теорема* 3.1.** *Пусть G – π-разрешимая группа с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p\in\pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $2\notin\pi$, *то* $l_\pi(G)\le 2$, $l_\pi^n(G)\le 2$ *и* $l_\pi^a(G)\le 3$;

2) *если* $2\in\pi$, *то* $l_\pi(G)\le 4$, $l_\pi^n(G)\le 4$ *и* $l_\pi^a(G)\le 6$.

Доказательство. 1. Ясно, что в любой фактор-группе группы G силовские p-подгруппы являются бициклическими для всех $p\in\pi$. Поэтому можно воспользоваться индукцией по порядку группы. По лемме 2.5

$$O_{\pi'}(G)=1,$$
$$F(G)=O_p(G)=F(O_\pi(G)),$$
$$O_{p'}(G)=1$$

для некоторого простого $p\in\pi$. Так как силовская p-подгруппа G_p бициклическая и $p>2$, то $l_p(G)\le 1$ по лемме 2.8. Поэтому $G_p=F(G)$. По лемме 2.1 подгруппа $(G_\pi)'$ нильпотентна, поэтому $(G_\pi)'\subseteq F(G_\pi)$, фактор-группа $G_\pi/F(G)$ абелева и $l_\pi^a(G/F(G))\le 1$ по лемме 2.7. Из леммы 2.2 следует, что $l_\pi(G/F(G))\le 1$ и $l_\pi^n(G/F(G))\le 1$, а значит $l_\pi(G)\le 2$ и $l_\pi^n(G)\le 2$. Из того, что $F(G)$ нильпотентна и метациклическая следует, что $d(F(G))\le 2$. Следовательно, $l_\pi^a(G)\le 3$.

2. Под $l_\pi^*(G)$ будем понимать всюду одну из длин: $l_\pi(G)$, $l_\pi^n(G)$, $l_\pi^a(G)$. Пусть $\pi_1=\pi\setminus\{2\}$. Тогда по лемме 2.6 $l_\pi^*(G)\le l_{\pi_1}^*(G)+l_2^*(G)$. По первому пункту доказываемой теоремы $l_{\pi_1}(G)\le l_{\pi_1}^n(G)\le 2$ и $l_{\pi_1}^a(G)\le 3$, а по лемме 2.8 $l_2(G)=l_2^n(G)\le 2$ и $l_2^a(G)\le 3$.

Поэтому $l_\pi(G)\le l_\pi^n(G)\le 4$ и $l_\pi^a(G)\le 6$. Теорема доказана.

С учетом того, что $d(G_\pi)\le l_\pi^a(G)$ и $n(G_\pi)\le l_\pi^n(G)$ при $\pi=\pi(G)$, из теоремы 3.1 получаем два следствия

***Следствие* 3.2.** [3] *Если G – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то $n(G)\le 4$ и $d(G)\le 6$.*

***Следствие* 3.3.** *Если G – группа нечетного порядка с метациклическими силовкими p-подгруппами для всех $p\in\pi(G)$, то $n(G)\le 2$ и $d(G)\le 3$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

3. *Монахов, В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

4. *Monakhov, V.S.* On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.

5. *Hall, P.* The *p*-lengh of a *p*-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

6. *Ballester–Bolinches, A.* Products finite groups / A. Ballester–Bolinches, R. Estaban–Romero, M. Asaad // De Gruyter Expositions in Mathematics. – 2010. – 53 c.

7. *Монахов, В.С.* О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы / В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, № 3. – С. 145–152.

Поступила в редакцию 27.09.12.