ВЕСТНИК БГУ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1969 ГОДА
ОДИН РАЗ В ЧЕТЫРЕ МЕСЯЦА

СЕРИЯ 1

3, 2012

МИНСК
БГУ

Из неравенств $0 \le \frac{1}{2m\pi(k-1)} - \frac{1}{2m\pi(k-1)+s} \le \frac{1}{2m\pi(k-1)^2}$ следует, что

$$-\frac{1}{2m\pi(k-1)^2} + \frac{1}{2m\pi(k-1)} \le \frac{1}{2m\pi(k-1)+s} \le \frac{1}{2m\pi(k-1)}, \quad k = 2,3,\dots. \tag{12}$$

Неравенства (12) умножим на $|\sin s|$, проинтегрируем по s от 0 до $2m\pi$ и просуммируем по k от 2 до $p^n - 1$, в результате получим оценки:

$$\sum_{k=2}^{p^n-1} \frac{-2}{\pi(k-1)^2} + \sum_{k=2}^{p^n-1} \frac{2}{\pi(k-1)} \le \sum_{k=2}^{p^n-1} \int_0^{2m\pi} \frac{|\sin s|}{\pi(k-1)+s} ds \le \sum_{k=2}^{p^n-1} \frac{2}{\pi(k-1)}. \tag{13}$$

Значит, выражение в середине (13) эквивалентно $\frac{2}{\pi} \ln p^n$ при $n \to \infty$.

Таким образом, выражение (11) эквивалентно $\frac{2}{\pi} \int_0^{2m\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds + \frac{2}{\pi^2} \ln p^n$ при $n \to \infty$. Вместе с (10) получаем, что

$$\left\| D_{m,n}(x,u) \right\|_1 \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{2m\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds + \frac{2}{\pi^2} \ln p^n, \quad n \to \infty, \tag{14}$$

и первое слагаемое в правой части (14) преобразуется к виду

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2m\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2m-1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin s|}{s} ds = \mathrm{const} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2m-1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin s|}{s} ds.$$

К последней сумме интегралов применим те же рассуждения, что и к (11) – (13), и получим соотношение

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{2m-1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin s|}{s} ds \sim \frac{4}{\pi^2} \ln m, \quad m \to \infty,$$

что вместе с (14) дает требуемую асимптотическую формулу (3).

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Государственное издательство физико-математической литературы. М., 1961.
2. Taibleson M. Fourier Analysis on Local Fields, 1975.
3. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. М., 1975.
4. Радына А. Я., Радына Я. М., Радына Я. В. Пачаткі неархімедавага аналізу. Мінск, 2010.
5. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М., 1985. Т. 1.

Поступила в редакцию 02.04.12.

Александр Яковлевич Радыно – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций.
Наталья Игоревна Карпович – аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель – А. Я. Радыно.

УДК 512.542

Д. В. ГРИЦУК, В. С. МОНАХОВ, О. А. ШПЫРКО

О ПРОИЗВОДНОЙ π-ДЛИНЕ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

A new notion of the derived π-length of a π-soluble group is proposed. The dependence of the derived π-length of a π-soluble group on the structure of Hall π-subgroups are found. In particular, it is proved that the derived π-length of a π-soluble group with abelian Sylow p-subgroup for any $p \in \pi$ coincides with the derived length of a Hall π-subgroup. Also it is established that if $2 \notin \pi$ then the derived π-length of a π-soluble group with a metabelian Hall π-subgroup is at most 3.

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1]. Понятие p-длины p-разрешимых групп предложили Холл и Хигмэн [2]. Они установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. Элементарная теория p-длины изложена в монографии [1, VI.6]. Картер, Фишер и Хоукс [3] ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья [4]. Оценкам нильпотентной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы [5, 6]. В данной статье предлагается понятие производной π-длины π-разрешимой группы и находятся ее значения в зависимости от строения π-холловой подгруппы.

Используемые определения и обозначения

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел N следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G)=\pi(|G|)$ и $\pi(G:H)=$ $=\pi(|G:H|)$. Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m)\subseteq\pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется π-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi$, и π'-группой, если $\pi(G)\subseteq\pi'$. В этом случае $\pi(G)\cap\pi'=\varnothing$.

Ряд подгрупп $G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1$ называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i-1}, и нормальным, если G_i нормальна в G для всех i.

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G:

$$1=F_0\subseteq F_1\subseteq F_2\subseteq\ldots\subseteq F_i\subseteq\ldots,$$

где $F_{i+1}/F_i=F(G/F_i)$. Здесь $F(X)$ подгруппа Фиттинга группы X. Если группа G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k=G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$. Наименьшее натуральное число n, для которого выполняется равенство $G^{(n)}=1$, называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)}=\left(G^{(i-1)}\right)'$.

Группа называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Таким образом, у π-отделимой группы G существует ряд

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1, \qquad (1)$$

где G_i нормальна в G и фактор G_{i-1}/G_i либо разрешимая π-группа, либо π'-группа, $i=1,\ldots,n$. Ряд (1) будем называть нормальным (π', π)-рядом группы G. Наименьшее число π-факторов среди всех нормальных (π', π)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$. Поскольку π-факторы (π', π)-ряда π-разрешимой группы G разрешимы, то каждая π-разрешимая группа обладает (π', π)-рядом, т. е. таким нормальным (π', π)-рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех (π', π)-рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$.

Теперь введем понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Обратим внимание на то, что здесь будут использоваться субнормальные ряды. Пусть группа G – π-разрешимая. Тогда она обладает субнормальным (π', π^a)-рядом, т. е. таким субнормальным рядом

$$G=G_0\supseteq G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_{n-1}\supseteq G_n=1,$$

факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных (π', π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi=\pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

Вспомогательные результаты

Из приведенных определений непосредственно вытекает

Лемма 1. *Если G – π-разрешимая группа, то $l_\pi(G)\le l_\pi^n(G)\le l_\pi^a(G)$.*

Свойства π-длины $l_\pi(G)$ и нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$ π-разрешимой группы можно найти в работах [5, 6]. Свойства производной π-длины во многих случаях схожи, но есть и отличия. Например, $l_\pi(G)=l_\pi(G/\Phi(G))$, $l_\pi^n(G)=l_\pi^n(G/\Phi(G))$, а для производной π-длины аналог этих равенств нарушается. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Следующие леммы содержат начальные свойства производной π-длины π-разрешимой группы и несложно доказываются.

Лемма 2. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G, то $l_\pi^a(H) \le l_\pi^a(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_\pi^a(G/N) \le l_\pi^a(G)$ и $l_\pi^a(G) \le l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$;

3) если N – нормальная π′-подгруппа группы G, то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;

4) если G и V – π-разрешимые группы, то $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то $l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \le \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}$.

Лемма 3. *Если G – π-разрешимая группа, то $d(G_\pi) \le l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi)$.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = 1$ – нормальный ряд группы G, факторы которого являются либо π′-группами, либо π-группами, причем число π-факторов совпадает со значением $l_\pi(G)$. Пусть G_i/G_{i+1} – π-фактор этого ряда. Тогда $G_i/G_{i+1} \subseteq G_\pi G_i/G_{i+1}$, где G_π – π-холлова подгруппа группы G. Поэтому $d(G_i/G_{i+1}) \le d(G_\pi)$. Для каждого натурального t подгруппа $(G_i)^{(t)}$ является характеристической в G_i, поэтому $(G_i)^{(t)} \lhd G$, $(G_i)^{(t)} G_{i+1} \lhd G$. Так как $(G_i/G_{i+1})^{(t)} = (G_i)^{(t)} G_{i+1}/G_{i+1}$, то ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_i \supseteq (G_i)' G_{i+1} \supseteq (G_i)'' G_{i+1} \supseteq \ldots$$
$$\ldots \supseteq (G_i)^{(d(G_i/G_{i+1}))} G_{i+1} = G_{i+1} \supseteq \ldots \supseteq G_n = 1$$

будет нормальным рядом группы G и на участке от G_i до G_{i+1} число абелевых π-факторов не превышает числа $d(G_\pi)$. Поступая так с каждым π-фактором исходного ряда, приходим к нормальному ряду группы G, факторы которого являются либо π′-группами, либо абелевыми π-группами, причем число абелевых π-факторов не превысит числа $l_\pi(G)d(G_\pi)$. Следовательно, $l_\pi^a(G) \le l_\pi(G)d(G_\pi)$. Из утверждения 1 леммы 2 следует, что $d(G_\pi) = l_\pi^a(G_\pi) \le l_\pi^a(G)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_\pi^a(G/N) \le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_\pi^a(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) *в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа*;

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ *для некоторого простого $p \in \pi$*;

4) $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Доказательство. Все утверждения проверяются непосредственно, основываясь только на элементарных свойствах π-разрешимых групп.

Основные результаты

Теорема 1. 1. *Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$,* то $l_\pi^a(G) \le 2$.

2. *Если в π-разрешимой группе G силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то* $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \le |\pi(G_\pi)|$.

Доказательство. Оба утверждения будем доказывать одновременно с помощью индукции по порядку группы. В любой факторгруппе группы G силовские p-подгруппы циклические или абелевы для всех $p \in \pi$. По индукции $l_\pi^a(G/N) \le 2$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G в первом случае и

$$l_\pi^a(G/N) = d(G_\pi N/N) \le |\pi(G_\pi N/N)| \le |\pi(G_\pi)|,\ d(G_\pi N/N) \le d(G_\pi) -$$

во втором. По лемме 4 в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $O_{\pi'}(G) = 1$ и $F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$ для некоторого простого $p \in \pi$. Так как $F(G) \subseteq G_p$, где G_p – силовская

p-подгруппа группы G, и G_p абелева в любом случае, то $G_p \subseteq C_G(F(G))$. Но из леммы 4 следует, что $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$, поэтому $G_p = F(G) = C_G(F(G))$.

1. Если подгруппа $G_p = F(G)$ циклическая, то факторгруппа $G/F(G)$ абелева как группа автоморфизмов циклической группы $G_p = F(G)$ [7, 2.16], поэтому $d(G/F(G)) \le 1$, а поскольку $F(G)$ абелева, то $l_\pi^a(G) \le 2$.

2. По индукции

$$l_\pi^a(G/F(G)) = d(G_\pi/F(G)) \le |\pi(G_\pi/F(G))| = |\pi(G_\pi)| - 1. \qquad (2)$$

Так как $F(G) = G_p$ абелева, то $l_\pi^a(G) \le |\pi(G_\pi)|$.

Подгруппа $K = G_\pi^{d(G_\pi)-1}$ отлична от 1, абелева и нормальна в G_π, а поскольку $O_{p'}(G_\pi) \subseteq C_G(F(G)) = F(G) = G_p$, то $O_{p'}(G_\pi) = 1$ и $K \subseteq G_p = F(G)$. Теперь $d(G_\pi/F(G)) = d(G_\pi) - 1$, а из (2) получаем, что $l_\pi^a(G/F(G)) = d(G_\pi) - 1$, $l_\pi^a(G) = d(G_\pi)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа сверхразрешима и силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \le 2$.

Доказательство. Пусть G_π сверхразрешима. По [7, 4.52] коммутант $(G_\pi)'$ нильпотентен. Поскольку силовские p-подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то подгруппа $(G_\pi)'$ абелева и $d(G_\pi) \le 2$. Из теоремы 1 получаем, что $l_\pi^a(G) \le 2$. Следствие доказано.

Теперь исследуем величину производной π-длины в зависимости от строения π-холловой подгруппы. Как обычно, X' и $Z(X)$ – коммутант и центр группы X.

Теорема 2. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – ее π-холлова подгруппа.

1. *Если* G_π *абелева, то* $l_\pi^a(G) \le 1$.

2. *Если* $(G_\pi)' \subseteq Z(G_\pi)$, *то* $l_\pi^a(G) \le 3$.

Доказательство. 1. Ясно, что в любой факторгруппе группы G π-холлова подгруппа абелева. По индукции $l_\pi^a(G/N) \le 1$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G. По лемме 4 в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $O_{\pi'}(G) = 1$ и $F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$ для некоторого простого $p \in \pi$. Так как $F(G) \subseteq G_\pi$ и G_π абелева, то $G_\pi \subseteq C_G(F(G))$. Но из леммы 4 следует, что $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$, поэтому $G_\pi = F(G)$ и $l_\pi^a(G) \le 1$.

2. Применим индукцию к порядку группы G. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа. Тогда G/N – π-разрешимая группа с π-холловой подгруппой $G_\pi N/N$. Ясно, что $Z(G_\pi)N/N \subseteq Z(G_\pi N/N)$, $(G_\pi)' N/N = (G_\pi N/N)'$. Теперь

$$(G_\pi N/N)' = (G_\pi)' N/N \subseteq Z(G_\pi)N/N \subseteq Z(G_\pi N/N),$$

т. е. факторгруппа G/N наследует условия леммы. По индукции $l_\pi^a(G/N) \le 3$, а по лемме 4 в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $O_{\pi'}(G) = 1$ и $F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$ для некоторого простого $p \in \pi$. Так как $F(G) \subseteq G_\pi$, а из леммы 4 следует, что $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$, то $(G_\pi)' \subseteq Z(G_\pi) \subseteq F(G)$ и $G_\pi/F(G)$ абелева. Из первого утверждения получаем, что $l_\pi^a(G/F(G)) \le 1$, а так как $d(F(G)) \le 2$, то $l_\pi^a(G) \le 3$. Теорема доказана.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [1, III.5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

Следствие 2.1. Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа дедекиндова, то $l_\pi(G)\le 1$ и $l_\pi^a(G)\le 2$.

Доказательство. В силу теоремы 2 можно считать, что подгруппа G_π – неабелева. Согласно [1, III.7.12] $G_\pi=Q\times A\times B$, где Q – группа кватернионов порядка 8, A – элементарная абелева 2-группа, B – абелева нечетного порядка. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что $l_\pi(G)\le 1$. Поскольку условия наследуют все факторгруппы, то применима лемма [1, VII.6.9], по которой $O_{\pi'}(G)=\Phi(G)=1$, $F=F(G)=O_p(G)$, $p\in\pi$, $C_G(F)\subseteq F$, $G_\pi=G_p$, $l_\pi(G)=l_p(G)$. Если $p>2$, то G_p – абелева и $l_\pi(G)=l_p(G)\le 1$ по [1, VI.6.6]. Пусть $p=2$ и G_2 – неабелева. Тогда $G_2=Q\times A$, где Q – группа кватернионов порядка 8, A – элементарная абелева 2-группа, $Z(G_2)=\langle i\rangle\times A$, $i^2=1$ и $G_2/Z(G_2)$ будет циклической порядка 4. Так как подгруппа F дополняема в группе G, то $G=[F]M$, $G_2=[F]M_2$, где G_2 и M_2 – силовские 2-подгруппы из G и M соответственно [1, VI.4.8]. Поскольку $Z(G_2)\subseteq C_G(F)\subseteq F$, то $G_2/Z(G_2)=[F/Z(G_2)](M_2Z(G_2)/Z(G_2))$. Так как $G_2/Z(G_2)$ – циклическая порядка 4, то либо $F/Z(G_2)=1$, либо $M_2Z(G_2)/Z(G_2)=1$. Если $F/Z(G_2)=1$, то $F=Z(G_2)$ и $G_2\subseteq C_G(F)\subseteq F\ne Z(G_2)$, противоречие. Если $M_2Z(G_2)/Z(G_2)=1$, то подгруппа M имеет нечетный порядок и $l_2(G)\le 1$. Итак, $l_\pi(G)\le 1$. Из леммы 3 заключаем, что $l_\pi^a(G)=d(G_\pi)l_\pi^a(G)\le 2$. Следствие доказано.

Следствие 2.2. Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G)\le 3$.

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Поскольку в каждой факторгруппе группы G π-холлова подгруппа является либо группой Шмидта, либо абелевой группой, то $l_\pi^a(G/N)\le 3$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G либо по индукции, либо по теореме 2. По лемме 4 получаем, что $O_{\pi'}(G)=1$, $F(G)=F(O_\pi(G))=O_p(G)$ для некоторого простого $p\in\pi$ и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$.

По условию π-холлова подгруппа G_π является группой Шмидта. Из свойств групп Шмидта следует, что $G_\pi=[R]Q$, где R – нормальная силовская r-подгруппа, $Q=\langle y\rangle$ – циклическая силовская q-подгруппа и $Z(G_\pi)=\Phi(R)\times\langle y^q\rangle$. Поскольку $F(G)\subseteq G_\pi$ и $C_G(F(G))\subseteq F(G)$, то $|Q|=q$ и $F(G)\subseteq R$. Если $F(G)\ne R$, то

$$F(G)\subseteq\Phi(R)\subseteq Z(G_\pi), \tag{3}$$

это следует из того, что в группе Шмидта $R/\Phi(R)$ – главный фактор. Однако (3) противоречит свойству $C_G(F(G))\subseteq F(G)$, поэтому неравенство $F(G)\ne R$ неверно и $F(G)=R$. Теперь $G_\pi/F(G)$ является циклической подгруппой. Из теоремы 2 получаем, что $l_\pi^a(G/F(G))\le 1$, а так как $d(F(G))\le 2$, то $l_\pi^a(G)\le 3$. Следствие доказано.

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

Теорема 3. Пусть G – π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Если $2\notin\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 3$.

Доказательство. Зафиксируем π-холлову подгруппу H группы G и применим индукцию к порядку группы. По лемме 4 в группе G точно одна минимальная нормальная подгруппа, $O_{\pi'}(G)=1$ и $F(G)=F(O_\pi(G))=O_p(G)$ для некоторого простого $p\in\pi$. Ясно, что $\langle Z(G_p),Z(H)\rangle\subseteq C_G(F(G))\subseteq F(G)$. Так как H метабелева, то H' – абелева подгруппа и $H'F(G)\subseteq F(H)=O_p(H)$.

Пусть $\pi(G)\setminus\pi=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$, $\omega_i=\pi\cup\{r_i\}$. По [10, теорема D 5] в группе G существует ω_i-холлова подгруппа и все ω_i-холловы подгруппы сопряжены между собой. Поэтому можно выбрать ω_i-холлову подгруппу H_i группы G такую, что $H\subseteq H_i$. Ясно, что $H_i=HR_i$, где R_i – некоторая силовская r_i-подгруппа группы G, и H_i – разрешимая подгруппа, поскольку она r_i'-разрешима. Так как $F(G)\subseteq H_i$, $C_G(F(G))\subseteq F(G)$, то $O_{p'}(H_i)=1$ и $F(H_i)$ – p-группа. Поэтому $F(H_i)\subseteq F(H)=O_p(H)$.

По [9, лемма 5] подгруппа $K=H'\subseteq F(H_i)$. Теперь для любого $y\in R_i$

$$K^y\subseteq F(H_i)^y=F(H_i)\subseteq O_p(H).$$

Отсюда следует, что $K^x\subseteq O_p(H)$ для всех $x\in\langle H,R_1,R_2,\ldots,R_n\rangle=G$. Поэтому $K^G=\langle K^x\,|\,x\in G\rangle$ является p-группой и $H'=K\subseteq K^G\subseteq O_p(G)=F(G)$. В факторгруппе $G/F(G)$ π-холлова подгруппа $H/F(G)$ абелева, значит, $l_\pi^a(G/F(G))\le 1$ по теореме 2. Поскольку $d(F(G))\le 2$, то $l_\pi^a(G)\le 3$. Теорема доказана.

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York, 1967.
2. Hall P. // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 3. № 7. P. 1.
3. Carter R., Fischer B., Hawkes T. // J. Algebra. 1968. Vol. 9. № 3. P. 285.
4. Numata M. // Osaka J. Math. 1971. Vol. 8. P. 447.
5. Монахов В. С., Шпырко О. А. // Дискрет. мат. 2001. Т. 13. Вып. 3. С. 145.
6. Монахов В. С., Шпырко О. А. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 6. С. 3.
7. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск, 2006.
8. Шмидт О. Ю. // Мат. сб. 1924. 31. С. 366.
9. Kazarin L. S. // Infinite groups 94, Newell, Berlin, 1995. P. 111.
10. Hall P. // Proc. London Mat. Soc. 1956. Vol. 6. № 3. P. 286.

Поступила в редакцию 09.02.12.

Дмитрий Владимирович Грицук – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – В. С. Монахов.

Виктор Степанович Монахов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины.

Ольга Алексеевна Шпырко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в Севастополе.

УДК 512.55

В. М. ШИРЯЕВ

КОНЕЧНЫЕ РЕФЛЕКСИВНЫЕ *m*-КОЛЬЦА

The article deals with reflexive *m*-rings, *i. e.* such *m*-rings (K, +, ·, ○), in which $a\circ b$ and $b\circ a$ for a, $b\in$ K generate the same sub-*m*-ring. Being finite and possessing the identity, such *m*-ring K is an extention of a nilpotent *m*-ring by a boolean *m*-ring in which the operation of multiplication coincides with the operation of superposition.

Используется терминология и обозначения, введенные в [1–3], а также принятые в теории полугрупп и групп [4, 5], колец и полей [6–10], почтиколец [11] универсальных алгебр [12]. Универсальная алгебра (К, +, ·, ○) называется *m*-кольцом, если алгебра (К, +, ·) является ассоциативным коммутативным кольцом с операциями сложения "+" и умножения "·" (редукт *m*-кольца К), алгебра (К, ○) – полугруппой с операцией суперпозиции "○" (*o*-полугруппа *m*-кольца К), которая дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения. Тогда универсальная алгебра (К, +, ○) является правым почтикольцом [11] (называемым *o*-почтикольцом *m*-кольца К).

В данной работе продолжается исследование *m*-колец с условиями, близкими к коммутативным, начатое в [3, 13] (медиальными, слабо *c*-коммутативными, флексибильными и др.), в особенности с условиями, в которых существенную роль играет операция умножения в *m*-кольце (например, условие γ-коммутативности [3]). Здесь вводятся в рассмотрение рефлексивные *m*-кольца, у которых суперпозиции двух элементов порождают одно и то же под-*m*-кольцо. Такое название введено по аналогии с введенными в [14] понятиями σ-рефлексивных полугрупп и колец. Другое название – гамильтоновы полугруппы – использовалось для σ-рефлексивных полугрупп в работе [15], где получено их описание.

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА