Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2012. Том 20. № 2. С. 3–9

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ, СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ АБЕЛЕВЫ ИЛИ ЭКСТРАСПЕЦИАЛЬНЫ

Д. В. Грицук, В. С. Монахов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
e-mail: Dmitry.Gritsuk@gmail.com, Victor.Monakhov@gmail.com
Поступила 12.11.2012

Экстраспециальной называют p-группу, у которой коммутант, центр и подгруппа Фраттини имеют порядок p. Доказывается, что производная и нильпотентная длины разрешимой группы, у которой силовские p-подгруппы абелевы или экстраспециальны, не превышают $2 \cdot |\pi(G)|$ и $2 + |\pi(G)|$ соответственно.

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют работам [1, 2]. Экстраспециальной называют p-группу, у которой коммутант, центр и подгруппа Фраттини имеют простой порядок.

Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l^a_\pi(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, группа G становится разрешимой и значение $l^a_\pi(G)$ совпадает со значением производной длины. Если поменять абелевы факторы на нильпотентные, то получим определение нильпотентной π-длины $l^n_\pi(G)$, [3]. В случае $\pi = \pi(G)$ значение $l^n_\pi(G)$ совпадет со значением нильпотентной длины разрешимой группы G.

В настоящей работе исследуется нильпотентная и производная π-длины π-разрешимой группы, у которой силовские p-подгруппы абелевы или экстраспециальны для всех $p \in \pi$. Доказывается, что $l^n_\pi(G) \le 2 + |\pi(G)|$ и $l^a_\pi(G) \le 2 \cdot |\pi(G)|$. Для такой A_4-свободной группы нильпотентная π-длина снижается: $l^n_\pi(G) \le |\pi(G)|$. При $\pi = \pi(G)$ отсюда выводятся оценки нильпотентной и производной длин разрешимой группы, которые также являются новыми результатами. Здесь A_4 — знакопеременная группа степени 4.

1. Определения и предварительные результаты. Напомним некоторые обозначения и определения. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а π — некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначается через π'. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ — множество простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$, а $|\pi(G)|$ — число различных простых делителей порядка группы G. Для единичной группы 1 получаем: $\pi(1) = \emptyset$ и $|\pi(1)| = 0$. Группа G называется π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$.

Пусть G — группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G:

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_t \subseteq \ldots,$$

где $F_{i+1}/F_i = F(G/F_i(G))$. Здесь $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X, т.е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы X. Если группа G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k = G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной разрешимой группы G и обозначают через $n(G)$. Наименьшее натуральное число k, для которого выполняется равенство $G^{(k)} = 1$, называют производной длиной разрешимой группы G и обозначают через $d(G)$. Здесь G' — коммутант группы G и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

Субнормальным (π', π)-рядом группы G называют ряд

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в котором для каждого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1} и фактор-группа G_{i+1}/G_i либо π-группа, либо π'-группа. Если π-факторы ряда (1) являются разрешимыми группами, то группа G называется π-разрешимой. Наименьшее число π-факторов среди всех субнормальных (π', π)-рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$. При $\pi = \{p\}$ определение π-длины превращается в определение p-длины $l_p(G)$, предложенное Ф. Холлом и Г. Хигмэном [4] для p-разрешимых групп. Элементарная теория p-длины изложена в монографии Хупперта [2, VI.6].

Поскольку подгруппа Фиттинга неединичной разрешимой группы отлична от 1, то каждая π-разрешимая группа обладает (π', π^n)-рядом, т.е. таким субнормальным (π', π)-рядом, у которого все π-факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех (π', π^n)-рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l^n_\pi(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то π-разрешимая группа G становится разрешимой и значение нильпотентной π-длины группы G совпадает со значением нильпотентной длины.

Поскольку коммутант неединичной разрешимой группы отличен от всей группы, то каждая π-разрешимая группа обладает (π', π^a)-рядом, т.е. таким субнормальным (π', π)-рядом (1), у которого все π-факторы абелевы. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех (π', π^a)-рядов группы G называется производной π-длиной и обозначается через $l^a_\pi(G)$. В случае $\pi = \pi(G)$ значение $l^a_\pi(G)$ совпадает со значением производной длины разрешимой группы G.

Лемма 1 [5, теорема 18.12]. *В каждой p-разрешимой группе G для любого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$ существует единственный класс сопряженных $\{p, q\}$-холловых подгрупп.*

Лемма 2 [6, теорема 6.4.3] *Если G — p-разрешимая группа, то*

$$C_G(\mathrm{O}_{p',p}(G)) \subseteq \mathrm{O}_{p',p}(G).$$

Лемма 3 [2, теорема III.3.18]. *Пусть P — p-группа, $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$. Если α индуцирует тождественный автоморфизм на фактор-группе $P/\Phi(P)$, то порядок α есть степень p.*

Лемма 4 [2, теорема II.3.10]. *Неприводимая абелева группа автоморфизмов p-группы является циклической группой.*

Лемма 5 [6, теорема 5.1.9]. *Пусть P — p-группа и A — максимальная абелева подгруппа из P. Предположим, что $|P'| = p$. Тогда*

$$|P : A| = |A/Z(P)| \quad \text{и} \quad |P/Z(P)| = |A/Z(P)|^2.$$

Лемма 6 [6, теорема 8.6.9]. *Пусть Q — силовская q-подгруппа группы $SL(2, p)$, $p \neq q$. Если $q \neq 2$, то Q циклическая. Если $q = 2$, то Q — группа кватернионов.*

Лемма 7 [6, теорема 8.6.7]. *Пусть P_1, P_2 — различные силовские p-подгруппы группы $GL(2, p)$. Тогда $\langle P_1, P_2 \rangle = SL(2, p)$.*

Лемма 8 [6, теорема 8.6.12]. *Пусть $p > 2$. Предположим, что a — p-элемент и Q — $\langle a\rangle$-допустимая p'-подгруппа группы $SL(2,p)$. Если $1 \neq [Q,a]$, то $p = 3$, Q — группа кватернионов порядка 8 и $Q\langle a\rangle \simeq SL(2,3)$.*

Из определений производной длины, π-длины и производной π-длины легко выводится следующее утверждение.

Лемма 9. *Если G — π-разрешимая группа, то $d(G_\pi) \leq l^a_\pi(G) \leq l_\pi(G)\, d(G_\pi)$. В частности, $l^a_\pi(G) \leq 1$ для группы с абелевой π-холловой подгруппой.*

В дальнейшем под $l^*_\pi(G)$ будем понимать либо всюду $l_\pi(G)$, либо всюду $l^n_\pi(G)$, либо всюду $l^a_\pi(G)$.

Лемма 10 [3, лемма 1; 7, лемма VI.6.4; 8, лемма 2]. *Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H — подгруппа группы G, то $l^*_\pi(H) \leq l^*_\pi(G)$;

2) если N — нормальная подгруппа группы G, то

$$l^*_\pi(G/N) \leq l^*_\pi(G), \quad l^*_\pi(G) \leq l^*_\pi(G/N) + l^*_\pi(N); \tag{2}$$

3) если N — нормальная π'-подгруппа группы G, то $l^*_\pi(G/N) = l^*_\pi(G)$;

4) если G и V — π-разрешимые группы, то $l^*_\pi(G \times V) = \max\{l^*_\pi(G), l^*_\pi(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G, то

$$l^*_\pi(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l^*_\pi(G/N_1), l^*_\pi(G/N_2)\}.$$

Напомним, что через $O_\pi(G)$ ($O_{\pi'}(G)$) обозначается наибольшая нормальная π-подгруппа (π'-подгруппа соответственно) группы G, а $O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_\pi(G/O_{\pi'}(G))$.

Лемма 11 [3, лемма 2; 7, лемма VI.6.9; 8, лемма 4]. *Пусть G — π-разрешимая группа и t — натуральное число. Предположим, что $l^*_\pi(G/N) \leq t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l^*_\pi(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p \in \pi$;

4) $O_{p'}(G) = 1$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$;

5) $\Phi(G) = 1$ и $F(G)$ — минимальная нормальная в G подгруппа для $l^*_\pi(G) = l_\pi(G)$ и $l^*_\pi(G) = l^n_\pi(G)$.

2. Основные результаты. Из определения π-разрешимой группы следует, что она будет τ-разрешимой для любого $\tau \subseteq \pi$. Поэтому у π-разрешимой группы можно рассматривать τ-длину, нильпотентную τ-длину и производную τ-длину.

Теорема 1. *Если G — π-разрешимая группа и $\tau \subseteq \pi$, то $l^*_\pi(G) \leq l^*_\tau(G) + l^*_{\pi\setminus\tau}(G)$.*

Доказательство. Для $l_\pi(G)$ утверждение доказано в [7, 1.7.15]. Чтобы доказать справедливость утверждения для нильпотентной π-длины воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме 11 $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F(G)$. Поэтому $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого $p \in \pi$ и $O_{p'}(G) = 1$. Ясно, что

$$l^n_\pi(G/F(G)) = l^n_\pi(G) - 1. \tag{3}$$

Будем считать, что $p \in \tau$. Тогда $O_{\tau'}(G) \subseteq O_{p'}(G) = 1$ и $1 \neq F(O_\tau(G)) = F(G)$, поэтому

$$l^n_\tau(G/F(G)) = l^n_\tau(G) - 1. \tag{4}$$

Для фактор-группы $G/F(G)$ по индукции имеем

$$l^n_\pi(G/F(G)) \le l^n_\tau(G/F(G)) + l^n_{\pi\setminus\tau}(G/F(G)), \tag{5}$$

поэтому

$$l^n_\pi(G) \overset{(3)}{=} 1 + l^n_\pi(G/F(G)) \overset{(5)}{\le} 1 + l^n_\tau(G/F(G)) + l^n_{\pi\setminus\tau}(G/F(G)) \overset{(4)}{\le}$$

$$\overset{(4)}{\le} 1 + l^n_\tau(G) - 1 + l^n_{\pi\setminus\tau}(G/F(G)) \overset{(2)}{=} l^n_\tau(G) + l^n_{\pi\setminus\tau}(G).$$

Здесь над знаками равенств и неравенств указан номер используемой формулы.

Осталось доказать утверждение для производной π-длины. Пусть $\pi\setminus\tau = \sigma$. Предположим, что утверждение $l^a_\pi(G) \le l^a_\tau(G) + l^a_\sigma(G)$ неверно и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда для любой нееединичной нормальной подгруппы N группы G по индукции

$$l^a_\pi(G/N) \le l^a_\tau(G/N) + l^a_\sigma(G/N). \tag{6}$$

По формуле (2) $l^a_\tau(G/N) \le l^a_\tau(G)$, $l^a_\sigma(G/N) \le l^a_\sigma(G)$, поэтому

$$l^a_\pi(G/N) \le l^a_\tau(G) + l^a_\sigma(G). \tag{7}$$

Если существует нормальная неединичная подгруппа N такая, что $l^a_\pi(G/N) = l^a_\pi(G)$, то из (7) получаем:

$$l^a_\pi(G) = l^a_\pi(G/N) \le l^a_\tau(G) + l^a_\sigma(G),$$

и теорема справедлива. Поэтому следует считать, что $l^a_\pi(G) > l^a_\pi(G/N)$ для любой неединичной нормальной в G подгруппы N. По лемме 11 $O_{\pi'}(G) = 1$, в группе G только одна минимальная нормальная подгруппа, $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ для некоторого простого $p \in \pi$, $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Пусть $N = F(G)$ и

$$l^a_\pi(G/N) = l^a_\pi(G) - i \tag{8}$$

для некоторого натурального $i > 0$. Фиксируем субнормальный ряд

$$G/N = G_0/N \supset G_1/N \supset \ldots \supset G_n/N = 1, \tag{9}$$

где $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ — либо абелева π-группа, либо π'-группа, причем число абелевых π-факторов совпадает с $l^a_\pi(G) - i$.

Без ущерба для доказательства можно считать, что $p \in \tau$. Так как $\tau \subseteq \pi$, то $\pi' \subseteq (\tau)'$. Поэтому π'-факторы ряда (9) будут $(\tau)'$-факторами. Если $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$ — абелевый π-фактор ряда (9), то

$$(G_i/N)/(G_{i+1}/N) = (G_i/N)_1/(G_{i+1}/N) \times (G_i/N)_2/(G_{i+1}/N),$$

где $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$ — τ-холлова подгруппа, а $(G_i/N)_2/(G_{i+1}/N)$ — $(\tau)'$-холлова подгруппа группы $(G_i/N)/(G_{i+1}/N)$. Теперь ряд (9) уплотняем на участке от G_i/N до G_{i+1}/N следующим образом: $G_i/N \supset (G_i/N)_1 \supset G_{i+1}/N$. Первый фактор $G_i/N/(G_i/N)_1$ будет $(\tau)'$-группой, а второй фактор $(G_i/N)_1/(G_{i+1}/N)$ — абелевой τ-группой. Поступая так с каждым абелевым π-фактором ряда (9), мы приходим к новому ряду группы G/N, у которого факторы либо абелевы τ-группы, либо $(\tau)'$-группы, причем число абелевых τ-факторов осталось прежним, т.е. совпадает с $l^a_\pi(G) - i$. Из определения производной π-длины получаем, что

$$l^a_\tau(G/N) \le l^a_\pi(G) - i. \tag{10}$$

Имеем

$$l_\pi^a(G) \overset{(8)}{=} l_\pi^a(G/N) + i \overset{(6)}{\le} l_\tau^a(G/N) + l_\sigma^a(G/N) + i \overset{(10)}{\le} l_\tau^a(G) - i + l_\sigma^a(G) + i = l_\tau^a(G) + l_\sigma^a(G).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Если* G *—* π*-разрешимая группа, то*

$$l_\pi^n(G) \le \sum_{p\in\pi} l_p(G), \quad l_\pi^a(G) \le \sum_{p\in\pi} l_p^a(G) \le \sum_{p\in\pi} l_p(G)d(G_p).$$

Доказательство. Учитывая, что $l_p^n(G) = l_p(G)$, и применяя теорему 1 несколько раз, получим неравенства:

$$l_\pi^n(G) \le \sum_{p\in\pi} l_p(G), \quad l_\pi^a(G) \le \sum_{p\in\pi} l_p^a(G).$$

Остается применить лемму 9, согласно которой $l_p^a(G) \le l_p(G)d(G_p)$.

Следствие 1.2. *Если* G *— разрешимая группа, то*

$$n(G) \le \sum_{p\in\pi(G)} l_p(G), \quad d(G) \le \sum_{p\in\pi(G)} l_p(G)d(G_p).$$

Доказательство. При $\pi = \pi(G)$ π-разрешимая группа будет разрешимой и в этом случае $l_\pi^n(G) = n(G)$ и $l_\pi^a(G) = d(G)$. Остается применить следствие 1.1.

В работе [9] исследовалась p-длина p-разрешимой группы с экстраспециальной силовской p-подгруппой, изоморфной некоторой подгруппе минимальной не $\mathfrak{F}$-группы. Развивая результаты этой работы мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* G *—* p*-разрешимая группа с экстраспециальной силовской* p*-подгруппой. Тогда* $l_p(G) \le l_p^a(G) \le 2$. *Кроме того, если* $l_p(G) = 2$, *то* $p \in \{2,3\}$ *и группа* G *имеет секцию, изоморфную знакопеременной группе* A_4.

Доказательство. Если N — неединичная нормальная в G подгруппа, то $N \cap G_p$ нормальна в силовской p-подгруппе G_p, поэтому $Z(G_p) \subseteq N \cap G_p$ или $N \cap G_p = 1$. Значит, силовская p-подгруппа в G/N абелева или экстраспециальна. Так как $l_p^a(G) \le 1$ по лемме 9 в случае, когда силовская p-подгруппа абелева, то применима индукция по порядку группы.

Из теоремы Холла–Хигмэна [2, теорема VI.6.6] следует, что $l_p(G) \le 2$ при любом p. Покажем, что $l_p^a(G) \le 2$. При $l_p(G) \le 1$ это верно по лемме 9. Пусть $l_p(G) = 2$. По индукции $O_{p'}(G) = 1$, поэтому минимальная нормальная подгруппа N является элементарной абелевой p-подгруппой. Так как $N \subseteq G_p$, то $Z(G_p) \subseteq N$ и G_p/N абелева. Теперь из леммы 9 следует, что $l_p^a(G) \le 2$.

Остается доказать, что если $l_p(G) = 2$, то $p \in \{2,3\}$ и группа G содержит секцию, изоморфную A_4. Будем опять использовать индукцию по порядку группы G. В силу леммы 11 имеем $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, подгруппа Фиттинга $F = F(G) = O_p(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, $C_G(F) = F$ по лемме 2 и фактор-группа G/F изоморфна некоторой подгруппе из группы $\mathrm{Aut}(F) = GL(n,p)$, где $p^n = |F|$. Так как силовская p-подгруппа G_p экстраспециальна, то $\overline{G_p} = G_p/F$ — элементарная абелева.

Предположим, что группа G не бипримарна. По лемме 1 в группе имеется собственная $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}} = G_pG_q$ для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Если $l_p(G_pG_q) = 2$ для некоторого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то по индукции $p \in \{2,3\}$ и подгруппа G_pG_q содержит секцию, изоморфную A_4, т.е. утверждение доказано. Поэтому $l_p(G_pG_q) \le 1$ для всех $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Так как $F \subseteq G_pG_q$, то $O_{p'}(G_pG_q) \subseteq C_G(F) = F$, $O_{p'}(G_pG_q) = 1$ и G_p нормальна в G_pG_q. Теперь G_p нормальна в $\langle G_q |\ q \in \pi(G)\rangle = G$, т.е. $l_p(G) \le 1$. Поэтому следует считать, что G является $\{p,q\}$-группой для некоторого простого q.

Пусть $\overline{K}$ — подгруппа Фиттинга группы $\overline{G} = G/F$. Так как $O_p(\overline{G}) = 1$, то $\overline{K}$ является q-подгруппой и $C_{\overline{G}}(\overline{K}) \subseteq \overline{K}$ по свойствам подгруппы Фиттинга в разрешимых группах. Предположим, что $\overline{H} = \overline{K} \cdot \overline{G_p} \neq \overline{G}$. Если $l_p(H) = 2$, то по индукции $p \in \{2,3\}$ и подгруппа H содержит секцию, изоморфную A_4, т.е. утверждение доказано. Поэтому $l_p(H) \leq 1$, подгруппа G_p нормальна в H и подгруппа $\overline{H}$ нильпотентна, противоречие. Следовательно, $\overline{H} = \overline{G}$, т.е. фактор-группа $\overline{G}$ q-замкнута. Теперь $\Phi(\overline{G_q}) = \Phi(\overline{G})$, а по лемме 3 подгруппа $\overline{G_p}$ индуцирует на фактор-группе $\overline{G_q}/\Phi(\overline{G})$ нетождественный автоморфизм. Так как $\overline{G_q}$ — подгруппа Фиттинга группы $\overline{G}$, то $\overline{G_q}/\Phi(\overline{G_q})$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $\overline{G}$. Используя индукцию получаем, что сама подгруппа $\overline{G_q}/\Phi(\overline{G_q})$ является минимальной нормальной подгруппой группы $\overline{G}/\Phi(\overline{G_q})$. Поэтому подгруппа $\overline{G_p}$ действует неприводимо на $\overline{G_q}/\Phi(\overline{G_q})$. Так как $\overline{G_p}$ элементарная абелева, то по лемме 4 подгруппа $\overline{G_p}$ имеет простой порядок.

Теперь F — абелева подгруппа индекса p в p-группе G_p. Из леммы 5 заключаем, что $|G_p| = p^3$. Поэтому F — элементарная абелева подгруппа порядка p^2 и G/F изоморфна pd-подгруппе H из группы $\mathrm{Aut}(F) = GL(2,p)$, для которой $O_p(H) = 1$.

Если $p = 2$, то $H = GL(2,2) \simeq S_3$ и $G \simeq S_4$, симметрическая группа степени 4. Поэтому G содержит подгруппу, изоморфную A_4.

Пусть $p = 3$. Тогда G/F изоморфна $3d$-подгруппе H из группы $GL(2,3)$, для которой $O_3(H) = 1$. Из строения группы $GL(2,3)$ следует, что $H \in \{SL(2,3), GL(2,3)\}$. Поэтому H содержит подгруппу, изоморфную A_4.

Далее считаем, что $p > 3$. Пусть P_1 и P_2 — различные силовские p-подгруппы группы G. Предположим, что подгруппа $\langle P_1, P_2 \rangle$, порожденная ими, является собственной подгруппой в группе G. Тогда по индукции $l_p(\langle P_1, P_2 \rangle) \leq 1$. Так как

$$O_{p'}(\langle P_1, P_2 \rangle) \subseteq C_G(F) = F,$$

то $O_{p'}(\langle P_1, P_2 \rangle) = 1$ и P_1 нормальна в $\langle P_1, P_2 \rangle$, $P_1 = P_2$, противоречие. Следовательно, $\langle P_1, P_2 \rangle = G$, а по лемме 7 фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $SL(2,p)$. Подгруппа Фиттинга $F(G/F)$ является p'-подгруппой и $[F(G/F), PF/P] \neq 1$. По лемме 8 это возможно лишь в случае, когда $p = 3$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть G — π-разрешимая группа, у которой для каждого $r \in \pi$ силовская r-подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда*

$$l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq |\pi \cap \{2,3\}| + |\pi(G_\pi)|, \quad l_\pi^a(G) \leq 2 \cdot |\pi(G_\pi)|.$$

Кроме того, если группа G не имеет секций, изоморфных знакопеременной группе A_4, то $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq |\pi(G_\pi)|$.

Доказательство. Пусть $\tau = \pi \cap \{2,3\}$, $\sigma = \pi \setminus (\pi \cap \{2,3\})$. Из теоремы 1 заключаем, что

$$l_\pi^n(G) \leq l_\tau^n(G) + l_\sigma^n(G) \leq \sum_{t \in \tau} l_t(G) + \sum_{s \in \sigma} l_s(G). \tag{11}$$

По теореме 2 $l_s(G) \leq 1$ для любого $s \in \sigma$, поэтому $\sum_{s \in \sigma} l_p(G) = |\sigma|$, и $l_t(G) \leq 2$ для любого $t \in \tau$. Возможны три случая.

Случай 1. $|\pi \cap \{2,3\}| = 0$, т.е. $\tau = \emptyset$. В этом случае из (11) получаем

$$l_\pi^n(G) \leq |\sigma| = |\pi \cap \{2,3\}| + |\pi(G_\pi)|.$$

Случай 2. $|\pi \cap \{2,3\}| = 1$, т.е. $\tau = \{q\}$, где $q \in \{2,3\}$. В этом случае из (11) получаем

$$l_\pi^n(G) \leq 2 + |\sigma| = 2 + |\pi(G_\pi)| - 1 = |\pi \cap \{2,3\}| + |\pi(G_\pi)|.$$

Случай 3. $|\pi \cap \{2,3\}| = 2$, т.е. $\tau = \{2,3\}$. В этом случае из (11) получаем

$$l_\pi^n(G) \le 2 + 2 + |\sigma| = 2 + 2 + |\pi(G_\pi)| - 2 = |\pi \cap \{2,3\}| + |\pi(G_\pi)|.$$

Итак, утверждение $l_\pi(G) \le l_\pi^n(G) \le |\pi \cap \{2,3\}| + |\pi(G_\pi)|$ доказано.

По теореме 2 $l_r^a(G) \le 2$ для любого $r \in \pi$. Согласно следствию 1.1,

$$l_\pi^a(G) \le \sum_{p \in \pi} l_p^a(G) \le 2 \cdot |\pi(G_\pi)|.$$

Если в группе G нет секций, изоморфных знакопеременной группе A_4, то $l_r(G) \le 1$ для любого $r \in \pi$. Согласно следствию 1.1, $l_\pi^n(G) \le \sum_{p \in \pi} l_p(G) = |\pi(G_\pi)|$. Следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Пусть G — разрешимая группа, у которой для каждого $r \in \pi(G)$ силовская r-подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда*

$$n(G) \le |\pi(G) \cap \{2,3\}| + |\pi(G)|, \quad d(G) \le 2 \cdot |\pi(G)|.$$

Кроме того, если группа G не имеет секций, изоморфных знакопеременной группе A_4, то $n(G) \le |\pi(G)|$.

Пример. В системе компьютерной алгебры GAP [10] в библиотеке SmallGroups под номером $(216, 88)$ указана A_4-свободная группа с экстраспециальными силовскими подгруппами. Эта группа имеет строение $G = [[Z_3 \times Z_3]Z_3]Q_8$, где Q_8 — группа кватернионов порядка 8, а Z_3 — циклическая группа порядка 3. Производная длина группы G равна 4, а нильпотентная длина равна 2. Поэтому, полученные в теореме оценки являются точными.

Литература

1. *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск, 2006.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I. Berlin; Heidelberg; New York, 1967.
3. *Монахов В.С., Шпырко О.А.* О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 3. С. 145–152.
4. *Hall P., Higman G.* The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside′s problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 3. № 7. P. 1–42.
5. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М., 1978.
6. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York; Berlin; Heidelberg, 2004.
7. *Ballester–Bolinches A., Estaban–Romero R., Asaad M.* Products finite groups. De Gruyter Expositions in Mathematics, 2010.
8. *Грицук Д.В., Монахов В.С., Шпырко О.А.* О производной π-длине π-разрешимой группы // Вестник БГУ. Сер. 1. 2012. № 3. С. 90–95.
9. *Shemetkov L.A., Yi Xiaolan* On the p-length of a finite p-solvable groups // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 1. С. 93–96.
10. Система компьютерной алгебры GAP 4.4.12 [Электронный ресурс]. 2009. Режим доступа: http://www.gap-system.org/ukrgap/gapbook/manual.pdf.

D. V. Gritsuk, V. S. Monakhov

On solvable groups whose Sylow subgroups are either abelian or extraspecial

Summary

A p-group G is called extraspecial if its derived subgroup, center and Frattini subgroup are groups of order p. We consider the solvable groups whose Sylow subgroups are either abelian or extraspecial. It is proved that derived length is at most $2 \cdot |\pi(G)|$ and nilpotent length is at most $2 + |\pi(G)|$.