С.А. МАРЗАН, Д.В. ГАВВА
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Пусть $I_{a+}^{\alpha} g$ и $D_{a+}^{\alpha} y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 1$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, §2.2, 2.4]. Обозначим через $\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x)$ модифицированную дробную производную Капуто [2], определяемую формулой

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right)(x),$$

где $\alpha > 1, n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1,2,...\}$, и $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Рассмотрим алгоритм приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha > 1$:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)],\ y^{(j)}(a) = b_j, b_j \in C\ (j = 0,1,\ldots,n-1), \tag{1}$$

основанный на методе аппроксимирующих полиномов В.К. Дзядыка [3].

Пусть $Y \subset R$ – конечный или бесконечный интервал действительной оси R, функция $f[x,y]:[a,b]\times Y \to R$ при фиксированном $y \in Y$ непрерывна по x на $[a,b]$,

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\bar{Y}} \left| f[x,y] \right| = M < \infty, \tag{2}$$

и удовлетворяет условию липшицевости относительно второй переменной:

$$\left| f[x,y] - f[x,Y] \right| \le L|y - Y|\ \ (L > 0). \tag{3}$$

В работе [4] было показано, что при выполнении условия (2) задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \tag{4}$$

а при дополнительном условии (3) уравнение (4) имеет единственное решение в пространстве $C^{n-1}[a,b]$.

Построим при помощи итерационного процесса по v функции $\tilde{y}_v(x)$ вида

$$\tilde{y}_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j, \ \tilde{y}_v(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j +$$

$$+\frac{b-a}{2\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} a_{ik}^{(l,m)} f\left[t_k^{(m)}, \tilde{y}_{v-1}\left(t_k^{(m)}\right)\right] \frac{l_i^{(l)}(x)}{\left(x_i^{(l)} - t_k^{(m)}\right)^{1-\alpha}}, \qquad (5)$$

где $l_i^{(l)}$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам

$$t_i^{(l)} = a + \frac{(b-a)\left(1-\cos\frac{i\pi}{l}\right)}{2} \quad (i = 0,\ldots,l),$$

$$a_{ik}^{(l,m)} = \frac{\varepsilon_k}{m}\left\{1 - C_i^{(l)} + \frac{1}{2}C_k^{(m)}\left(1 - C_{2i}^{(l)}\right) + \sum_{v=2}^{m} \varepsilon_v C_{kv}^{(m)} \left[\frac{C_{(v-1)i}^{(l)}}{v-1} - \frac{C_{(v+1)i}^{(l)}}{v+1} - \frac{2}{v^2-1}\right]\right\},$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_m = \frac{1}{2},\ \varepsilon_v = 1 \ при \ v = 1,\ldots,m-1, \ и \ C_k^{(s)} = \cos\frac{k\pi}{s}.$$

Обозначим через $W^r = W^r C[a,b]$ $(r > 1)$ класс функций $F:[a,b] \to R$, представимых интегралом

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x (x-t)^{r-1} h(t)dt, \ \max_{a \le x \le b} |h(t)| = \mu < \infty.$$

Теорема. Пусть $\alpha > 1$, $K_H = \{y \in R, |y| < H\}$ $(H > 0)$, функция $f[t,y]:[a,b] \times K_H \to R$ удовлетворяет условиям (2), (3) и такая, что при любых фиксированных $x \in [a,b]$, $y \in K_H$ и некоторых $r > 1$, $\mu > 0$

$$f[t,y](x-t)^{\alpha-1} \in W^r C[a,b].$$

Пусть

$$q = \frac{L(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1,$$

где L определяется условием (3), и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\max\left\{\frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon), \frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)}\right\} \le H,$$

где M определяется условием (2).

Последовательность многочленов $\tilde{y}_v(x)$, определяемых условием (5), приближает решение $y(x)$ задачи Коши (1) таким образом, что при всех натуральных l и m, таких, что $\delta_{mn} < \varepsilon$, выполняется неравенство:

$$\left\| y(x) - \tilde{y}_\nu(x) \right\|_C \le D \frac{q^\nu + \delta_{lm}(1-q^\nu)}{1-q},\; D = \max\left\{ \frac{M(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}; \frac{\mu(b-a)^{r+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(r+1)} \right\}.$$

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто:

$$\left({}^c D_{0+}^{\frac{5}{2}} y \right)(x) = \frac{3}{2} y + x^2, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\; x \in \left[0, \frac{1}{100} \right], \qquad (6)$$

решение которой имеет вид:

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\frac{3}{2}} E_{\frac{5}{2},\frac{5}{2}} \left[\frac{3}{2} (x-t)^{\frac{5}{2}} \right] t^2 dt,$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг–Леффлера.

В результате применения рассмотренного выше итеративного метода получен полином, приближающий решение задачи типа Коши (6):

$y_4(x) = -1,00976 \cdot 10^{-10} x + 1,14216 \cdot 10^{-7} x^2 - 0,0000382971 x^3 + 0,0066095 x^4$.

В табл. 1 приведены значения точного и приближенного решения, а также модули их разностей.

Таблица 1

Сравнение точного и приближённого решений

x	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y(x)$	$2,7341 \cdot 10^{-14}$	$6,1865 \cdot 10^{-13}$	$3,8358 \cdot 10^{-12}$	$1,3998 \cdot 10^{-11}$	$3,8209 \cdot 10^{-11}$
$y_4(x)$	$5,4284 \cdot 10^{-14}$	$6,6456 \cdot 10^{-13}$	$3,7996 \cdot 10^{-12}$	$1,3967 \cdot 10^{-11}$	$3,8209 \cdot 10^{-11}$
$\lvert y(x) - y_4(x) \rvert$	$2,6944 \cdot 10^{-14}$	$4,5911 \cdot 10^{-14}$	$3,6152 \cdot 10^{-14}$	$3,2038 \cdot 10^{-14}$	$3,2059 \cdot 10^{-17}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. 2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent // Geophis. J. Astronom. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Дзядык, В.К. О применении линейных операторов к приближённому решению обыкновенных дифференциальных уравнений // В.К. Дзядык. – Теория приближения функций и её приложения. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 61–97.

4. Нелинейные дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 1. – С. 29–35.