УДК 517.927.21

С.А. МАРЗАН, И.В. МОРОЗ
Республика Беларусь, г. Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $I^{\alpha}_{a+}g$ и $D^{\alpha}_{a+}y$ - дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I^{\alpha}_{a+}g)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \alpha\in \mathrm{C}, \mathrm{Re}(\alpha)>0 \qquad (1)$$

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1, \qquad (2)$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2 ,2.4].

Обозначим через $C_{\gamma}[a,b]$ $(\gamma \in \mathrm{C})$ класс функций $g(x)$, заданных на [a, b] и таких, что $(x-a)^{\gamma}g(x)\in C[a,b]$:

$$C_{\gamma}[a,b]=\{g(x): \|g\|_{C_{\gamma}}=\|(x-a)^{\gamma}g(x)\|_C<\infty\}, C_0[a,b]=C[a,b] \qquad (3)$$

Для $\gamma\in C$ и $n\in N=1,2,...$ обозначим через $C^n_{\gamma}[a,b]$ банахово пространство функций $g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ до порядка $n-1$ и имеющих производную порядка n, такую, что $g^{(n)}(x)\in C_{\gamma}[a,b]$:

$$C^n_{\gamma}[a,b]=\{g: \|g\|_{C^n_{\gamma}}=\sum_{k=0}^{n-1}\|g^{(k)}\|_C+\|g^{(n)}\|_{C_{\gamma}}\}, C^0_{\gamma}[a,b]=C_{\gamma}[a,b].$$

Рассмотри свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования (1) и (2) в пространстве $C_{\gamma}[a,b]$. Непосредственные оценки с учетом (3) и [1, (2.44)] дают условия ограниченности оператора в этом пространстве.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha\in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$ *и* $\gamma\in C$ $(0\le \mathrm{Re}(\gamma)<1)$.

Если $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)$, *то оператор* $I^{\alpha}_{\alpha+}$ *ограниченно действует из*

$C_\gamma[a,b]$ *в* $C_{\gamma-\alpha}[a,b]$:

$$\| I^\alpha_{\alpha+} f \|_{C_\gamma} \le k \| f \|_{C_\gamma},\ k = \frac{\Gamma[\mathrm{Re}(\alpha)]\Gamma[1-\mathrm{Re}(\gamma)]}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma[1+\mathrm{Re}(\alpha-\gamma)]}. \tag{4}$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha)$*, то оператор* $I^\alpha_{\alpha+}$ *ограниченно действует из* $C_\gamma[a,b]$ *в* $C[a,b]$:

$$\| I^\alpha_{\alpha+} f \|_C \le k_1 \| f \|_{C_\gamma},\ k_1 = (b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha-\gamma)} k. \tag{5}$$

В частности, оператор $I^\alpha_{\alpha+}$ *ограничен в* $C_\gamma[a,b]$*:*

$$\| I^\alpha_{\alpha+} f \|_C \le k_2 \| f \|_{C_\gamma},\ k_2 = (b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)} k. \tag{6}$$

Следующие три утверждения для функций $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ доказываются аналогично известным результатам для $g(x) \in L_\gamma(a,b)$ [1, §§ 2.3, 2.5, теорема 2.4] с учетом леммы 1.

Лемма 2. *Если* $\gamma \in C$, $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$ *то для* $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ *выполняется полугрупповое свойство*

$$(I^\alpha_{\alpha+} I^\alpha_{\alpha+} g)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{\alpha+} g)(x)\ \ (\alpha \in C, \mathrm{Re}(\alpha) > 0; \beta \in C, \mathrm{Re}(\beta) > 0).$$

Лемма 3. *Если* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ *и* $\gamma \in C$, $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$ *то для* $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ *справедлива формула*

$$(D^\alpha_{\alpha+} I^\alpha_{\alpha+} g)(x) = g(x).$$

Если дополнительно $\beta \in C$ *и* $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$*, то для* $g(x) \in C_\gamma[a,b]$

$$(D^\alpha_{\alpha+})(x) = (I^{\alpha-\beta}_{\alpha+} g)(x).$$

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$, $(I^{n-\alpha}_{\alpha+} g)(x)$ – *дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка* $n-\alpha$*, и пусть* $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$.

Если $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ *и* $(I^{n-\alpha}_{\alpha+} g)(x) \in C^n_\gamma[a,b]$*, то имеет место формула*

$$(I^\alpha_{\alpha+} D^\alpha_{\alpha+} g)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{g^{(n-j)}_{n-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j},\ g_{n-\alpha}(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+} g\right)(x). \tag{7}$$

В частности, при $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$

$$(I^{\alpha}_{\alpha+}D^{\alpha}_{\alpha+}g)(x) = g(x) - \frac{g_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},\ g_{1-\alpha}(x) = (I^{1-\alpha}_{\alpha+}g)(x),$$

а если $\alpha = n \in N,\ g(x) \in C^n[a,b]$ *то*

$$(I^{\alpha}_{\alpha+}D^{\alpha}_{\alpha+}g)(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \in C\ \ (\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$.

Если $\beta \in C\ \ (\mathrm{Re}(\beta) > 0)$*, то*

$$(I^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1},\ g_{1-\alpha}(x) = (I^{1-\alpha}_{\alpha+}g)(x). \tag{8}$$

Если $\beta \in C\ \ (\mathrm{Re}(\beta) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0)$*, то*

$$(D^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}. \tag{9}$$

В частности

$$(D^{\alpha}_{\alpha+}(t-a)^{\beta-1})(x) = 0,\ \beta = \alpha, \alpha-1, ..., \alpha - [\mathrm{Re}(\alpha)] \tag{10}$$

[1, (2.35), (2.44)].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.