УДК 517.927.21

С.А. МАРЗАН
Республика Беларусь, г. Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим класс функций (в общем случае комплекснозначных)

$$W\left[L;(iu)^{\alpha}\right]=\left\{f(x)\in L(-\infty;\infty),\,(iu)^{\alpha}\,\hat{f}(u)=\hat{\varphi}(u),\,\varphi(x)\in L(-\infty;+\infty),\,\alpha>0\right\},$$

где $\hat{f}$ – знак преобразования Фурье функции f, $(iu)^{\alpha}=\begin{cases} e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}u^{\alpha}, u\geq 0\\ e^{\frac{i3\pi\alpha}{2}}|u|^{\alpha}, u<0\end{cases}$.

Теорема. Если $f\in W[L;(iu)^{\alpha}]$, φ – абсолютно непрерывная функция на R, то

$$\int_0^{\infty}u^{\alpha}du\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\cos ut dt=\pi\varphi(x)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}dt,$$

$$\int_0^{\infty}u^{\alpha}du\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)\sin ut dt=-\pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}dt,$$

и справедливы равенства:

$$-\pi\varphi(x)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}dt=\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\Phi_x(t)}{t^{\alpha+1}}dt,$$

$$-\pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2}-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}dt=\Gamma(\alpha+1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\Phi_x(t)}{t^{\alpha+1}}dt,$$

где $\Phi_x(t)=f(x-t)+f(x+t)-2f(x)$.

Доказательство. Из [1] следует, что

$$\int_0^{+\infty}u^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\cos ut dt=\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\cos\left(ut-\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt,\qquad(1)$$

$$\int_0^{+\infty}u^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\sin ut dt=\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin\left(ut-\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt.\qquad(2)$$

Преобразуем правую часть (1).

$$\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\cos\left(ut-\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt=\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\cos ut\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sin ut\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\cos ut\cos\frac{\alpha\pi}{2}dt+\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin ut\sin\frac{\alpha\pi}{2}dt=$$

$$=\pi\cos\frac{\alpha\pi}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\cos ut dt+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin ut dt=$$

$$=\pi\cos\frac{\alpha\pi}{2}\varphi(x)+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin ut dt.$$

Рассмотрим $\int_0^{\lambda}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin ut dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)dt\int_0^{\lambda}\sin ut du.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)dt\int_0^{\lambda}\sin ut du=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\frac{1}{t}\left(-\cos\lambda t+1\right)dt=$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)}{t}\cos\lambda t dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)}{t}dt=$$

$$=-\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\cos\lambda t dt+\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}dt=-I_1+I_2.$$

Можно показать, что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}I_1=0$, где $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}\cos\lambda t dt$.

Значит, интеграл

$$\int_0^{+\infty}u^{\alpha}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\cos ut dt \tag{3}$$

сходится к

$$\pi\varphi(x)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x-t)-\varphi(x+t)}{t}dt. \tag{4}$$

Но из [1] следует, что интеграл (3) (C,1)-суммируем к

$$-\Gamma\left(\alpha+1\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\Phi_x(t)}{t^{\alpha+1}}dt. \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5) получаем равенство:

$$-\pi\varphi(x)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}dt\,\sin\frac{\alpha\pi}{2}=\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\Phi_x(t)}{t^{\alpha+1}}dt.$$

Дальше преобразуем правую часть равенства (2).

$$\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\sin\left(ut-\frac{\alpha\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\sin ut \cos\frac{\alpha\pi}{2}\,dt - \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\cos ut \sin\frac{\alpha\pi}{2}\,dt =$$

$$=\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\sin ut\,dt - \sin\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)\cos ut\,dt =$$

$$=-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt - \pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2}.$$

Значит, интеграл

$$\int_0^{+\infty} du^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\sin ut\,dt \qquad (6)$$

сходится к

$$-\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt - \pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2}. \qquad (7)$$

С другой стороны, интеграл (6) (С,1)-суммируем к

$$-\Gamma(\alpha+1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\psi_x(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получим равенство

$$\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt - \pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2} = -\Gamma(\alpha+1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{\psi_x(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

Значит,

$$\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x+t)-\varphi(x-t)}{t}\,dt - \pi\varphi(x)\sin\frac{\alpha\pi}{2} = -\Gamma(\alpha+1)\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенчук, Н. П. О (С,1)-суммируемости и сходимости одного класса тригонометрических интегралов / Н. П. Семенчук // Весці АН БССР. – 1989, №4. – С. 28–34.