К. ф.-м. н. Марзан С.А.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина,

Республика Беларусь

Существование и единственность решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Адамара

Пусть $\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} f$ и $D_{a+}^{\alpha} g$ – дробные интегралы и производные Адамара порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, §18.3]. Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка α>0:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)] \quad (n-1 < \alpha \le n), \tag{1}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k, \quad b_k \in R \quad (k = 1,2,...,n = [\alpha]). \tag{2}$$

Рассмотрим класс $X_c^p(a,b)\,(c \in R, 1 \le p \le \infty)$, состоящий из комплексно-значных суммируемых по Лебегу функций *f* на $[a,b]$, для которых $\|f\|_{X_c^p} < \infty$.

В работе [2] показано, что при выполнении условий

$$f[x, y(x)] \in X_0^1(a,b), \ \|f[x, y(x)]\|_{X_0^1} = M < \infty \tag{3}$$

функция $y(x) \in X_0^1(a,b)$ является решением задачи типа Коши (1)–(2) тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha - 1} f[t, y(t)] \frac{dt}{t}, \ n = [\alpha] + 1. \tag{4}$$

Пусть выполняются два дополнительных условия:

$$\|f[x, y(x) - f[x, Y(x)]\|_{X_0^1} \le A \|y(x) - Y(X)\|_{X_0^1} \quad (A > 0), \tag{5}$$

$$A \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\alpha} < 1. \tag{6}$$

Обозначим через $G_n \ (n \in N)$ следующее множество точек $(x, y) \in R^2$:

$$G_n=\left\{(x,y)\in R^2: a\le x\le b, \left\| y(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j}\right\|_{X_0^1}\le d\right\},$$

$$d\ge M\,\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha}. \qquad (7)$$

Теорема. Пусть $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, $y(x)\in X_0^1(a,b)$ и $f[x,y(x)]$ – заданная на $[a,b]$ функция, такая, что выполняются условия (3), (5) и (6). Тогда существует единственное решение $y(x)\in X_0^1(a,b)$ задачи типа Коши (1)–(2) в G_n.

Доказательство. Докажем существование решения уравнения (4) методом последовательных приближений. Положим

$$y_0(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-j},$$

$$y_m(x)=y_0(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}f[t,y_{m-1}(t)]\frac{dt}{t}\quad (m=1,2,...).$$

Прежде всего покажем, что точки $(x,y_m(x))\in G_n$. Используя свойства дробных интегралов Адамара и условия (3), получим:

$$\left\|y_m(t)-y_0(t)\right\|_{X_0^1}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f[t,y_{m-1}(t)]\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}\right\|_{X_0^1}\le\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}. \qquad (8)$$

Оценим $\left\|y_m(t)-y_{m-1}(t)\right\|_{X_0^1}$ для $m\in N$. Для $m=1$ в соответствии с (8):

$$\left\|y_1(t)-y_0(t)\right\|_{X_0^1}\le\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$$

Используя свойства дробных интегралов Адамара, (5) и (8) получим:

$$\left\|y_2(t)-y_1(t)\right\|_{X_0^1}=\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(f[t,y_1(t)]-f[t,y_0(t)]\right)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{dt}{t}\right\|_{X_0^1}\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\left\|f[t,y_1(t)]-f[t,y_0(t)]\right\|_{X_0^1}\le\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\left\|y_1(t)-y_0(t)\right\|_{X_0^1}\le$$

$$\le\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$$

Повторяя действия, через m шагов получим оценку:

$$\left\| y_m(t) - y_{m-1}(t) \right\|_{X_0^1} \le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha} \left(\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha} \right)^{m-1}.$$

Из (6) следует, что последовательность $y_m(x)$ сходится к некоторой предельной функции $y(x) \in X_0^1(a,b)$ $\lim\limits_{m\to\infty} \left\| y_m(t) - y(t) \right\|_{X_0^1} = 0$.

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y_m(t)] \left(\ln\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] \left(\ln\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \right\|_{X_0^1} \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha} \left\| f[t, y_m(t)] - f[t, y(t)] \right\|_{X_0^1} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha} \left\| y_m(t) - y(t) \right\|_{X_0^1},$$

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y_m(t)] \left(\ln\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f[t, y(t)] \left(\ln\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \right\|_{X_0^1} = 0. \qquad (9)$$

Из (9) следует, что $y(t)$ есть решение уравнения (4) в пространстве X_0^1.

Предположим, что существует два решения $y(t)$ и $Y(t)$ уравнения (4). Подставим их в (4) и вычтем одно из другого:

$$\left\| y(t) - Y(t) \right\|_{X_0^1} = \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(f[t, y(t)] - f[t, Y(t)] \right) \left(\ln\frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \right\|_{X_0^1}.$$

$$\left\| y(t) - Y(t) \right\|_{X_0^1} \le \frac{\mathrm{A}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha} \left\| y(t) - Y(t) \right\|_{X_0^1},\ 1 \le A \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\frac{b}{a} \right)^{\alpha},$$

что противоречит предположению (6). Таким образом существует единственное решение $y(x) \in X_0^1(a,b)$ уравнения (4), а значит, и задачи типа Коши (1) – (2).

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Килбас А.А., Марзан С.А., Титюра А.А. Дробные интегралы и производные типа Адамара и дифференциальные уравнения дробного порядка. Доклады академии Наук, 2003, том 389, № 6, с. 734–738.