УДК 517.927.21

С.А. МАРЗАН
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО МЕТОДОМ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТОНЕЛЛИ

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто [1] порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 1)$

$$\left({}^c D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f[x, y(x)],\ \ y^{(j)}(a) = b_j,\ \ b_j \in C\ \ (j = 0,1,\ldots,n-1), \tag{1}$$

где $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$. Пусть

$$\max_{(x,y)\in[a,b]\times\overline{R}} \left| f[x,y] \right| = M < \infty. \tag{2}$$

В работе [2] показано, что при выполнении условия (2) задача Коши (1) равносильна интегральному уравнению

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \tag{3}$$

которое, при условии липшицевости функции $f[x,y]$ относительно второй переменной, имеет единственное решение $y(x) \in C^{n-1}[a,b]$.

Для установления разрешимости задачи Коши (1) в пространстве $C^{n-1}[a,b]$ без использования условия липшицевости функции $f[x,y]$ относительно второй переменной к условию (2) добавим два дополнительных условия:

$$\left| f[x,y] \right| \le L(d + |y|),\ (x \in [a,b],\ y \in R), \tag{4}$$

где $L > 0$, $d > 0$ – некоторые постоянные, и

$$AL < 1,\ \ A = \frac{(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{|\Gamma(\alpha)|\,\mathrm{Re}(\alpha)}. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 1, \alpha \notin N)$, *и* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, *функция* $f : [a,b] \times Y \to R$ $(Y \subset R)$ *удовлетворяет условиям* (2), (4) *и* (5). *Тогда задача Коши* (1) *имеет по крайней мере одно решение* $y(x)$ *в пространстве* $C^{n-1}[a,b]$.

Доказательство. Наряду с уравнением (3) рассмотрим последовательность уравнений

$$y_m(x) = y_0(x, b_0, \ldots, b_{n-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f\left[t, y\left(t - \frac{b-a}{m}\right)\right] dt\ \ (m \in N), \tag{6}$$

$$y_0(t,b_0,...,b_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!}(t-a)^k;\ \ y_m(x)=y_0(x,b_0,...,b_{n-1})\text{ при }-\frac{b-a}{m}\le x\le a\,.$$

Нетрудно видеть, что при каждом $m\in N$ уравнение (6) имеет единственное решение $y_m(x)\in C[a,b]$. Это решение называется m-тым приближением Тонелли уравнения (3). Покажем, что при сделанных предположениях последовательность приближений Тонелли $y_m(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $C[a,b]$.

Обозначим

$$h=\sup_{-(b-a)\le x\le(b-a)}\left\|y_0(x,b_0,...,b_{n-1})\right\|_C\,, \tag{7}$$

и зафиксируем $m\in N$. Если $a\le x\le\dfrac{b-a}{m}$, то используя (7) и условие (4), получим:

$$\left\|y_m(x)\right\|_C\le h+A\left\|f\left(x,y_m\left(x-\frac{b-a}{m}\right)\right)\right\|_C\le dAL+h(1+AL).\,, \tag{8}$$

Если $m^{-1}(b-a)\le x\le 2m^{-1}(b-a)$, то используя (8), получим

$$\left\|y_m(x)\right\|_C\le h+AL\left(d+\left\|y_m\left(x-\frac{b-a}{m}\right)\right\|_C\right)\le d(AL+A^2L^2)+h(1+AL+A^2L^2).$$

Аналогичным образом оценим приближения Тонелли $y_m(x)$ на каждом промежутке $j\dfrac{b-a}{m}\le x\le(j+1)\dfrac{b-a}{m}$ $(j=1,2,\ldots,m-1)$:

$$\left\|y_m(x)\right\|_C\le d\left[AL+(AL)^2+...+(AL)^j\right]+h\left[1+AL+...+(AL)^j\right].$$

Следовательно, при всех $a\le x\le b$

$$\left\|y_m(x)\right\|_C\le d\left[AL+(AL)^2+...+(AL)^m+...\right]+h\left[1+AL+...+(AL)^m+...\right].$$

Согласно условию (5), ряды справа сходятся, и $\left\|y_m(x)\right\|_C\le\dfrac{dAL+h}{1-AL}$ $\forall x\in[a,b]$. Из последнего неравенства следует равномерная ограниченность приближений Тонелли $y_m(x)$ в пространстве $C[a,b]$.

Покажем теперь, что эта последовательность равностепенно непрерывна в пространстве $C[a,b]$. Пусть $\Delta x>0$; $x,x+\Delta x\in[a,b]$. Используя (6), условие (4), и неравенство $\left|(x+\Delta x-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}\right|\le|\alpha-1|(x-t)^{\mathrm{Re}(\alpha)-2}\Delta x$, имеем:

$$\left\|y_m(x+\Delta x)-y_m(x)\right\|_C\le\frac{L}{|\Gamma(\alpha)|}\left[d+\left\|y_m\left(t-\frac{b-a}{m}\right)\right\|_C\right]\times$$

$$\times \frac{1}{\mathrm{Re}(\alpha)-1}\left[|\alpha-1|(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)-1}\Delta x+(\Delta x)^{\mathrm{Re}(\alpha)}\right],$$

и, следовательно,

$$\|y_m(x+\Delta x)-y_m(x)\|_C \le C_1\left[d+\|y_m(x)\|_C\right]\Delta x,\ C_1=\frac{L\left[|\alpha-1|(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)-1}+1\right]}{(\mathrm{Re}(\alpha)-1)|\Gamma(\alpha)|}.$$

Так как последовательность приближений Тонелли $y_m(x)$ равномерно ограничена в пространстве $C[a,b]$, получаем равностепенную непрерывность в $C[a,b]$.

По теореме Арцела-Асколи [3, с.167] для всех $x\in[a,b]$ последовательность $y_m(x)$ предкомпактна в $C[a,b]$. Поэтому из последовательности $y_m(x)$ можно выбрать подпоследовательность $y_{m_k}(x)$, сходящуюся к $y_*(x)\in C[a,b]$. При этом последовательность $y_{m_k}(x-(m_k)^{-1}(b-a))$ так же сходится к $y_*(x)\in C[a,b]$.

В силу непрерывности интегрального оператора

$$Ay(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f[t,y(t)]dt,$$

как оператора из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, возможен предельный переход в равенствах (6), откуда вытекает, что

$$y_*(x)=y_0(x,b_0,...,b_{n-1})+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f[t,y_*(t)]dt.$$

Последнее равенство означает, что функция $y_*(x)$ удовлетворяет уравнению (3). Подставляя $y_*(x)$ в уравнение (3) и последовательно дифференцируя полученное тождество $n-1$ раз, заключаем, что $y_*(x)$ является решением задачи Коши (1) в пространстве $C^{n-1}[a,b]$, что и доказывает теорему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent // Geophis. J. Astronom. Soc. – 1967. –Vol. 13. – P. 529–539.

2. Килбас, А.А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.

3. Антоневич, А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2003. – 430 с.